Miscelánea Matemática **50** (2009) 89–94 SMM

Una nota sobre el Teorema de Rolle

Ernesto Pérez-Chavela

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Av. San Rafael Atlixco 186, México, D.F. 09340, México
epc@xanum.uam.mx

Kyriakos Petakos

Rhodes Tourism Academy
Rhodes, Greece 85100
kpetakos@aster.edu.gr

1. Introducción

Las raíces de este teorema son muy antiguas, según los historiadores se remontan al pensamiento matemático hindú (ver [4] para más detalles), sin embargo se le atribuye a Michel Rolle, un matemático francés de finales del siglo XVII y principios del XVIII, miembro de la Academia Francesa quién se dedicó al estudio de la teoría de ecuaciones. Estudiando métodos para localizar y acotar raíces de polinomios llegó a la formulación y demostración de una versión preliminar del famoso teorema, cuya importancia es bien conocida por todo aquel que haya estudiado un curso de cálculo diferencial. En el excelente artículo de Félix Martínez de la Rosa, *Panorámica de los Teoremas de Valor Medio* [5], el lector podra encontrar más detalles del contexto histórico en que se desarrollo el teorema de Rolle, así como varios teoremas de valor medio y una bella interpretación geométrica de los mismos.

El objetivo de este trabajo es mostrar a los lectores algunas aplicaciones interesantes de este teorema para la resolución de un cierto tipo de ecuaciones funcionales, pero sobre todo el de motivar a los jóvenes estudiantes a profundizar en el pensamiento matemático. Para empezar recordemos el enunciado de la versión mas popular de este teorema y su demostración (la versión original se refería solo a funciones polinomiales).

Teorema 1.1 *Sea $f : [a, b] \to R$. Supongamos que f es continua sobre $[a, b]$, diferenciable sobre (a, b) y que $f(a) = f(b)$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

Demostración. Como $[a,b]$ es compacto y f es continua, sabemos que f alcanza su máximo y su mínimo sobre $[a,b]$, si el máximo o el mínimo ocurren en un punto $\xi \in (a,b)$ entonces se tiene que $f'(\xi)=0$ lo que finaliza la prueba. El único caso que falta verificar es cuando f alcanza su máximo y su mínimo en los extremos a y b, lo cual implica que f es constante en el intervalo ya que $f(a)=f(b)$, y por tanto para todo $x \in (a,b)$ se tiene que $f'(x)=0$.

Otros dos teoremas fundamentales del cálculo diferencial, muy importantes en el estudio de límites, de ecuaciones diferenciales y en numerosas aplicaciones son el teorema del valor medio y el teorema del valor medio generalizado de Cauchy, cuyas demostraciones consisten en aplicar directamente el teorema de Rolle, a una función auxiliar que introducimos para este fin, y que como se menciona en [5], algunos autores llaman "idea feliz" . Ya que esta es una de las motivación del presente escrito, empecemos enunciando estos teoremas; primero el muy famoso Teorema del Valor Medio.

Teorema 1.2 *Sea $f:[a,b]\to R$. Supongamos que f es continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre (a,b), entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Demostración. Basta aplicar el teorema de Rolle a la función auxiliar $h(x)$ dada por $h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)$.

Si $f(x)$ representa la trayectoria de una partícula, este teorema indica que la velocidad instantánea de la partícula coincide al menos en una ocasión con su velocidad media. Geométricamente nos dice que la recta que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ es paralela a la recta tangente que pasa por el punto $(\xi, f(\xi))$, para algún $\xi \in (a,b)$. A partir de aquí el lector podra imaginar las innumerables aplicaciones que este teorema puede tener. Recordemos ahora el Teorema del Valor Medio de Cauchy.

Teorema 1.3 *Sean $f,g:[a,b]\to R$ dos funciones continuas sobre $[a,b]$ y diferenciables sobre (a,b), entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi),$$

si $g(a)\neq g(b)$ y $g'(\xi)\neq 0$ podemos escribir

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Demostración. En este caso debemos aplicar el teorema de Rolle a la función auxiliar $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$.

Como el lector puede observar, este teorema es una sencilla generalización del teorema previo, ya que si escogemos a la función g como la identidad, es decir $g(x) = x$, entonces recuperamos el teorema (1.2), de ahí que sus demostraciones sean muy parecidas.

2. Aplicaciones del Teorema de Rolle en la resolución de ecuaciones

En la demostración de los teoremas (1.2) y (1.3) buscamos una nueva función $h(x)$ que satisfaga las hipótesis del teorema de Rolle, para de esta forma garantizar la existencia de $\xi \in (a, b)$ tal que $h'(\xi) = 0$, conclusión que podemos reformular diciendo que ξ es solución de la ecuación $F(x) = 0$, con $F = h'$. En esta sección vamos a generalizar este concepto considerando ecuaciones que dependen de dos funciones diferenciables definidas sobre el intervalo $[a, b]$, es decir queremos resolver ecuaciones de la forma $\mathcal{H}(f, g, f', g') = 0$ que abusando de notación la escribiremos simplemente como $F(x) = \mathcal{H}(f, g, f', g') = 0$. Nuestro objetivo es resolver ciertas ecuaciones de la forma anterior sobre el intervalo $[a, b]$.

Problema 1

Sean f y g funciones continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b), resolver la ecuación

$$F(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 0 \tag{1}$$

sujeta a la condición $f(a) = 0$ y $g(b) = 0$ o bien $f(b) = 0$ y $g(a) = 0$.

Sea $h(x) = f(x)g(x)$, es claro que $F(x) = h'(x)$. Observemos que $h(a) = h(b) = 0$ y se satisfacen las hipótesis adicionales del teorema de Rolle, por tanto podemos garantizar la existencia de $\xi \in (a, b)$ tal que $h'(\xi) = 0$, es decir ξ es una solución al problema 1. Como el lector puede observar, uno puede pedir una condición de frontera más general, ya que de hecho las hipótesis del teorema de Rolle se satisfacen si $h(a) = f(a)g(a) = f(b)g(b) = h(b)$. Ejemplifíquemos lo anterior con una aplicación concreta.

Ejemplo. Demostrar que la ecuación

$$2x \sin(x + x^2) + (2x^3 + x^2 - 6x - 3)\cos(x + x^2) = 0, \tag{2}$$

tiene una solución entre 0 y $\sqrt{3}$.

Basta observar que la ecuación anterior se puede escribir como $h'(x) = 0$, donde $h(x) = f(x)g(x)$ con $f(x) = \sin(x + x^2)$ y $g(x) = x^2 - 3$. Notemos además que $f(0) = 0$ y $g(\sqrt{3}) = 0$.

En el siguiente problema nos preguntamos cuales son las hipótesis que nos aseguren que una determinada ecuación tenga solución.

Problema 2

¿Bajo que condiciones la siguiente ecuación tiene solución?

$$F(x) = f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \tag{3}$$

Es claro que f y g deben ser funciones continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b). La expresión $f'(x)g(x) - g'(x)f(x)$ da pie a pensar que la función auxiliar que debemos definir debe estar relacionada con el cociente $f(x)/g(x)$, entonces definiendo directamente $h(x) = f(x)/g(x)$ tenemos que una hipótesis adicional debe ser que $g(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$. Falta solo imponer las condiciones de frontera para aplicar el teorema de Rolle, las cuales deben ser $h(a) = h(b)$, o bien $f(a)/g(a) = f(b)/g(b)$, que podemos escribir como $f(a)g(b) = f(b)g(a)$. Con estas hipótesis, podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $h(x)$, garantizando la existencia de al menos un $\xi \in (a, b)$ tal que $h'(\xi) = 0$, es decir que la ecuación $F(x) = f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0$ con la condición de frontera $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ tiene al menos una solución sobre (a, b). Tomando cocientes de funciones conocidas con las condiciones iniciales correspondientes, no importa lo complicado que éstas puedan ser, el lector puede construir infinidad de familias de ejemplos interesantes.

Consideremos ahora el siguiente problema:

Problema 3

¿Cuáles son las condiciones de frontera que debemos imponer para que la siguiente ecuación tenga solución?

$$F(x) = f'(x) + g'(x)f(x) = 0. \tag{4}$$

La idea para resolver este problema es usar un procedimiento análogo a los problemas anteriores, muchos autores de libros o artículos suelen escribir cuando llegan a una situación similar "*es claro que debemos multiplicar por un factor adecuado $k(x)$ (dándonos la expresión de ese* *factor), que nos permita definir la función auxiliar* $h(x)$", lo cual puede resultar hasta agresivo para algunos lectores que siguen el manuscrito pero para quienes la claridad de este argumento no está por ningún lado. En aras de evitar este tipo de comentarios y esperando no resultar muy repetitivo damos una explicación de este argumento.

La expresión $f'(x)+g'(x)f(x)$ no parece ser la derivada de ninguna función conocida, que es el primer paso en el procedimiento para resolver los problemas anteriores. Sabemos de nuestros cursos de cálculo que el multiplicar por un factor $k(x)$ adecuado facilita nuestra tarea, la pregunta aquí es ¿cuál es ese factor, cómo podemos definirlo? Notemos primero que $k(x)$ debe ser escogido de tal forma que al manipular el producto $k(x)(f'(x)+g'(x)f(x))$ no debe afectar a los ceros de $f'(x)+g'(x)f(x)$, lo se logra si la función $k(x)$ no se anula. Otro factor a tomar en cuenta es que $k(x)$ aparece en la derivada de la función auxiliar buscada, una función conocida que es siempre positiva y que su derivada coincide con ella misma es la función exponencial, lo cual la convierte en un fuerte candidato a aparecer en la función auxiliar y en $k(x)$. Finalmente, notamos que $k(x)$ debe contemplar de alguna forma a la función $g(x)$. Después de pensar un rato y experimentar con algunas combinaciones de la función exponencial con $g(x)$ llegamos a la conclusión de que una buena opción para $k(x)$ es la función $k(x)=e^{g(x)}$ ya que entonces se tiene que

$$e^{g(x)}f'(x)+e^{g(x)}g'(x)f(x)=(e^{g(x)}f(x))',$$

de donde concluimos que una buena elección para la función auxiliar es $h(x)=e^{g(x)}f(x)$. Obviamente si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas sobre $[a,b]$ y derivables sobre (a,b) entonces $h(x)$ también lo es. Las condiciones de frontera que debemos imponer para poder aplicar el teorema de Rolle estan dadas por la igualdad $h(a)=h(b)$, o equivalentemente $e^{g(a)}f(a)=e^{g(b)}f(b)$.

Resumiendo, para cualesquiera dos funciones diferenciables f y g tales que $e^{g(a)}f(a)=e^{g(b)}f(b)$, la ecuación $F(x)=f'(x)+g'(x)f(x)=0$ tiene al menos una solución entre a y b.

Los lectores familiarizados con el tema de ecuaciones diferenciales ordinarias, habrán notado la similitud que la técnica para resolver el Problema 3 tiene con la técnica del factor integrante de las ecuaciones diferenciales. Recordemos brevemente estos conceptos:

Definición 2.1 *Decimos que la ecuación diferencial* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *es exacta si satisface la condición* $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$.

Si una ecuación diferencial es exacta, entonces se demuestra la existencia de una función $f(x,y)$ tal que $df=Pdx+Qdy$. con lo cual se obtiene que $f(x, y) = c$ es la solución general de la ecuación diferencial exacta.

Con mucha frecuencia ocurre que la expresión $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ no es una diferencial exacta, pero que existe una función $K(x, y)$ tal que $K(x, y)(P(x, y)dx+Q(x, y)dy)$ es una diferencial exacta. Si $K(x, y) \neq 0$, entonces las soluciones de $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ y las de $K(x, y)$ $(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$ coinciden. La función $K(x, y)$ es llamado un factor integrante. Desafortunadamente no hay reglas generales para encontrar un factor integrante. Para la ecuación general lineal de primer orden $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, el factor integrante tiene la forma $K(x, y) = e^{\int P dx}$. En el libro [3], el lector interesado puede encontrar todos los detalles sobre factor integrante. Esperamos que lo expuesto en el Problema 3 sirva de motivación y ayuda a los jóvenes que estudian el tópico de factor integrante.

No podemos finalizar esta nota sobre el teorema de Rolle sin hacer una atenta invitación a todos los lectores a que nos ayuden a encontrar algunas otras familias de problemas cuya solución sea una simple aplicación de este gran teorema, lo cual sin lugar a dudas enriquecerá el presente trabajo.

Referencias

[1] R. G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático* Editorial Limusa, 1982.

[2] D. Berkey, *Calculus* Saunders Publishing Company, 1983.

[3] M. Braun, *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones* Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

[4] T. Broadbent, Reviewed works on the history of ancient Indian mathematics, *The Mathematical Gazette*, **52**, 301-308, 1968.

[5] F. Martínez de la Rosa, Panorámica de los Teoremas de Valor Medio, *Miscelánea Matemática*, **47**, 23-38, 2008.

[6] K. Petakos, An equation solving approach to Rolle's theorem, *Mathematics Teaching*, **214**, 22-23, 2009.

[7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* McGraw-Hill, 1965.

[8] M. Spivak *Calculus* Editorial Reverté, 1978.