LA CONQUISTA DEL INFINITO

ALFINIO FLORES PEÑAFIEL*

Reseña de: Dauben, Joseph Warren. Georg Cantor, his mathematics and philosophy of the infinite. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1979, 404 p.

> "La esencia de las matemáticas está precisamente en su libertad"
>
> [Cantor 1882, p. 564]

Cantor es uno de los matemáticos más fascinantes de fines del siglo 19. Su obra destaca por su originalidad y por haber abierto nuevas perspectivas para la investigación matemática.

Cantor despoja al infinito del halo casi místico que lo

* CIMAT
Apartado Postal 402
Guanajuato, Gto. 36000, MEXICO.

rodeaba. El infinito dejó así de ser objeto de discusiones filosóficas o teológicas y pasó a ser una herramienta de uso común para los matemáticos. "La matemática es la ciencia del infinito" afirma Weyl [Weyl 1925, p. 511]. La obra de Cantor rompe los esquemas rígidos que algunos tenían de lo que debía ser la investigación matemática. Las matemáticas del siglo 20 tuvieron un gran desarrollo gracias a que alcanzaron ese nivel de generalidad y abstracción, esa libertad a la que tanto contribuyó la cbra de Cantor.

Las aportaciones de Cantor encontraron desde la suspicacia y la duda de algunos hasta la abierta hostilidad de Kronecker. Estos ataques, la dificultad de los problemas que trataba de resolver, la falta de reconocimiento a su trabajo, su aislamiento, su inestable personalidad, hicieron que la vida de Cantor tuviera momentos dramáticos. Cantor era una persona llena de fuego creativo, entusiasta, era apasionado, sensible, en ocasiones eufórico y otras sumido en la más profunda depresión.

El trabajo de Cantor abre un campo nuevo y sorprendente para los matemáticos: la teoría de conjuntos. Algunos de los resultados eran verdaderamente increíbles. "Lo veo pero no lo creo" escribió Cantor en 1877 [Cantor/Dedekind p. 34]. Podemos darnos una idea de la novedad de esta teoría viendo lo que dice Hausdoff de ella: "un campo donde nada es evidente, donde lo correcto es a menudo paradójico y lo plausible falso" [Hausdorff 1914 p. V]. Para Hilbert la obra de Cantor representa "la más admirable flor de la mente matemática y uno de los más altos logros de la actividad puramente intelectual del hombre" [Hilbert 1925 p. 167]. La teoría de conjuntos permite un tratamiento unificado de muchas ramas de las matemáticas y deja ver con claridad la estructura interna de ellas. Ramas tales como la topología de conjuntos, la teoría de la dimensión, la teoría de la medida deben mucho al trabajo de Cantor.

El presente libro nos da una visión detallada de la evolución matemática de Cantor. Sus primeras investigaciones, alrededor de 1870, fueron acerca de series trigonométricas y sus puntos singulares. De esta manera llegó al concepto de punto límite y a su teoría de números irracionales. Poco a poco se fue convenciendo que se necesitaba una herramienta fundamentalmente nueva, una noción general y clara de los conjuntos infinitos. Las aplicaciones al análisis pasaron a segundo término y la teoría de conjuntos fue desarrollada en sí misma. Entre los años 1878 a 1884 aparecen sus trabajos fundamentales. Las ideas de Cantor permitieron comparar los órdenes de magnitud de conjuntos infinitos. La idea fundamental es que dos conjuntos infinitos A, B son equivalentes o de la misma cardinalidad si se puede establecer una correspondencia entre sus elementos de modo que a cada elemento de A le corresponda uno y solo un elemento de B e inversamente, es decir una correspondencia biunívoca. Por ejemplo, si tenemos el conjunto de los números naturales {1,2,3 .} y el conjunto de los números cuadrados {1, 4, 9, 16.. } se puede establecer una correspondencia entre ambos

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ 2 & & 4 \\ 3 & - & 9 \\ & & \\ n & - & n^2 \end{array}$$

Así pues estos dos conjuntos tienen el mismo orden de magnitud o cardinalidad. Cantor también encontró que el conjunto de los enteros positivos y negativos, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números algebraicos tienen la misma cardinalidad.

Cantor encontró también que el conjunto de puntos en un segmento de recta y el conjunto de puntos en una superficie tienen la misma cardinalidad. Además demostró que no puede existir una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de números reales, esto es que la cardinalidad de los naturales es estrictamente menor que la de los reales. Cantor logró al poder comparar conjuntos infinitos de diferentes magnitudes, crear la aritmética de los números transfinitos.

Las ideas de Cantor encontraron una fuerte resistencia sobre todo por parte del poderoso e influyente Kronecker, quien pensaba que todas las operaciones matemáticas se podían reducir a aquellas que trataban únicamente con números enteros. Kronecker se rehusaba a aceptar el infinito como algo completo.

A Cantor le fue bloqueado el acceso a los grandes centros de matemáticas como Berlín o Göttingen, donde hubiera tenido una acción más amplia. Cantor permaneció aislado en la pequeña universidad de Halle. A pesar de los ataques, Cantor tenía una fe religiosa en la veracidad de su obra. Siempre estuvo seguro que a la larga sus ideas prevalecerían sobre las de Kronecker: "Hay la cuestión sobre cuáles ideas son más poderosas, más amplias, más fructíferas, las de Kronecker o las más; sólo el éxito decidirá después de un tiempo nuestra lucha" [ver Schoenflies 1927 p. 12]

Así mismo, Cantor buscó nuevos foros donde poder exponer libremente sus ideas y donde discutirlas de manera abierta. Su enérgica contribución hizo posible la formación de la asociación alemana de matemáticos. También contribuyó a la realización de los primeros congresos internacionales de matemáticas.

A pesar de los ataques, la importancia de la obra de Cantor fue reconocida. El mismo Poincaré tradujo al francés uno de los trabajos fundamentales de Cantor [Cantor 1883] Después de su trabajo final de 1895, Cantor tuvo el reconocimiento de haber aportado algo de importancia duradera a las matemáticas. A pesar de que las paradojas descubiertas a la vuelta del siglo mostraban que no se habían resuelto las dificultades teóricas de manera satisfactoria, Hilbert resume la actitud de gran parte de los matemáticos: "Nadie podrá arrojarnos del paraíso que Cantor nos ha creado" [Hilbert 1925 p. 170].

Cantor dedicó muchos años de infructuosos esfuerzos a tratar de probar la hipótesis del continuo, esto es, que no existe un conjunto con cardinalidad intermedia entre la de los números naturales y la de los reales o continuo. La importancia que daba el mundo matemático a este problema queda de manifiesto ya que Hilbert escogió este como el primero de su famosa lista de problemas [Hilbert 1900] Cantor consideraba su obra inconclusa pues nunca pudo probar la hipótesis del continuo. Hay algo de trágico y de irónico en esto a la luz del descubrimiento de que esta hipótesis no puede ser demostrada [Cohen 1963]

Además de darnos una exposición de la obra matemática de Cantor el libro de Dauben nos permite tener una imagen más completa y objetiva de la personalidad de Cantor. En forma breve aclara la relación entre los colapsos nerviosos de Cantor con su trabajo matemático y los ataques externos. Nos muestra también los otros intereses de

Cantor: literarios, filosóficos y religiosos. Aunque no es propiamente una biografía, sí nos presenta a Cantor el hombre, dejando ver la riqueza no sólo de su trabajo matemático sino de toda su personalidad.

El libro de Dauben es una magnífica guia para que el público general con un interés en las matemáticas conozca cómo Cantor logró la conquista del infinito.

Referencias

Cantor 1882. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten parte 5. Mathematische Annalen 21 545-586.

Cantor 1883. Sur les ensembles infinis et linéares de points. Acta Mathematica 2 349-356.

Cantor-Dedekind 1937. Briefwechsel Cantor-Dedekind. Eds. E. Noether y J. Cavaillès. Paris: Hermann.

Cohen, P.J. 1963. The independence of the coninum hypothesis 1,2. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 1143-1148, 51 105-110.

Hausdorff, F. 1914. Grundzüge der Mengenlehre. (Reeditado por Chelsea, 1949.)

Hilbert, D. 1900. Mathematische Probleme. En Gesammelte Abhandlungen v. 3 p. 290-329. N.Y.: Chelsea, 1965.

Hilbert, D. 1925. Über das Unendliche. Mathematische Annalen 95 161-190. (Traducción al inglés en Van Heijenoort 1967 p. 367-392.)

Schoeflies A. 1927. Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. Acta Mathematica 50 1-23.

Van Heijenoort, J. 1967. From Frege to Gödel. Cambridge, Mass. Harvard University Press.

Weyl, H. 1925. Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik. En Gesammelte Abhandlungen vol. 2, p. 511-542. Springer Verlag, 1968.