Miscelánea Matemática **41** (2005) 23–30 SMM

El fenómeno de la percolación

Ramón Sebastián Salat Figols*

Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN

rsalat@esfm.ipn.mx

A Juan José Rivaud Morayta, auténtico maestro.

1. Introducción

¿Qué tienen en común fenómenos tales como el paso del agua a través del café, un incendio forestal y la propagación de una enfermedad contagiosa? Quizá nada, pero en el afán del hombre de entender a la Naturaleza, es posible pensar en todos ellos bajo un esquema común que nos permita descubrir propiedades importantes de todos ellos y construir teorías que unifiquen nuestros pensamientos. Podemos estudiar a los tres fenómenos con un mismo modelo matemático, que recoge aspectos esenciales de los tres fenómenos.
Imaginemos una retícula cuadrada de n celdas por lado (con $n \times n$ celdas). Cada una de ellas puede estar vacía u ocupada por un árbol y en el caso de que esté ocupada por un árbol, éste puede no haber sido alcanzado por el fuego o puede estar encendido o estar quemado. Si cada una de estas posibilidades las representamos por $0, 1, 2$ y 3, respectivamente, entonces nuestra retícula aparecerá llena de números. Dividimos el tiempo en intervalos iguales, cuya duración corresponde al tiempo que tarda en propogarse el incendio de un árbol a otro más próximo. Pensemos que en cada uno de éstos intervalos de tiempo, para cada árbol prendido, el incendio se propaga hacia los árboles vecinos que se encuentren en las celdas más próximas hacia el norte, sur, este y oeste; que el árbol que esté encendido pasará a apagado en el próximo intervalo de tiempo. Bajo estas condiciones, el incendio se propagará si la cantidad y distribución de los árboles es favorable. En la Tabla 1, se ejemplifica la evolución de una retícula de 5 filas por 5 columnas de un

*Becario EDD y SIBE de COFAA del IPN.

instante de tiempo al siguiente.

1	0	0	1	2		1	0	0	2	3
0	1	2	1	1		0	2	3	2	2
1	1	0	1	1		1	0	0	1	1
1	1	1	1	0		1	1	1	1	0
0	0	1	0	0		0	1	1	1	0

Tabla 1.

Suponiendo que la distribución de árboles sea uniforme y que la probabilidad de que una celda esté ocupada es independiente de la probabilidad de que cualquier otra celda lo esté, una cuestión interesante es la relación que existe entre la densidad de árboles y la duración del incendio y con la probabilidad de que el fuego se propague desde un lado del cuadrado hasta el lado opuesto. Se entenderá que el incendio se propaga desde un lado del cuadrado hasta el opuesto, cuando al estar encendidos todos los árboles de la primer columna de la retícula, exista un tiempo finito después del cual aparecerá por lo menos un árbol encendido en la última columna de la retícula. Cuando el tamaño de la retícula es pequeño, estudiar esta relación se convierte en un ejercicio operativo de combinatoria, pero cuando es grande, el uso de la computadora se vuelve indispensable. Por ejemplo, consideremos una retícula de cuatro celdas. Y supongamos que existe una probabilidad p de que haya un árbol en cada una de ellas y que las probabilidades de que exista un árbol en dos celdas distintas es independiente la una de la otra. Si $0 < p < 1$, cada celda puede estar vacía u ocupada por un árbol; luego es posible tener 0, 1, 2, ...4 árboles distribuídos en todas las formas posibles en las 4 celdas. Las únicas configuraciones posibles que permiten que el incendio se propague desde el lado izquierdo del cuadrado al lado derecho son las que se muestran en la figura 1. Entonces, si $f(p)$ es la probabilidad de que el incendio se propague desde el lado izquierdo al lado derecho, se tiene $f(p) = p^4 + 3p^3(1-p) + 2p^2(1-p)^2 = p^2(2-p^2)$. En este caso, existen $2^4 = 16$ configuraciones posibles. Pero si consideramos un cuadrado de 5 celdas por lado, el número de configuraciones posibles es de $2^{5^2} = 33,554,432$. Como puede observarse, conforme el número de celdas por lado crece, rápidamente se convierte en un cálculo imposible de realizarse manualmente. Solamente con ayuda de la computadora podemos pretender obtener la expresión de $f(p)$ para algunos pocos valores del número de celdas. Pero si por ejemplo, consideramos un cuadro con 100 celdas por lado, ni aún la computadora nos bastará para analizar todos los casos.

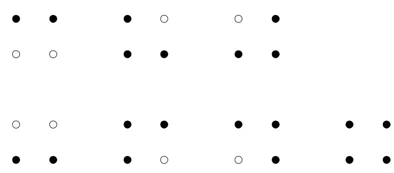

Figura 1

0 1 1 1 1 1	1 0 1 1 0 0
1 1 0 0 1 0	1 0 1 0 0 0
0 1 0 0 0 1	0 0 1 1 0 0
1 1 1 1 1 0	1 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 1	0 0 1 0 0 0

Figura 2

Una manera de tratar de encontrar una relación entre la densidad de árboles y la probabilidad de transmisión del incendio es utilizar las teorías de grafos y de probabilidad. Este camino ha sido fructífero en resultados y plantea interesantes problemas por resolver. Otro camino complementario consiste en simular el proceso de propagación del incendio para un número razonablemente grande de configuraciones iniciales obtenidas aleatoriamente, con la esperanza de que los resultados sean representativos de lo que podríamos observar si estudiáramos todas las configuraciones posibles. Al seguir aumentando el número de celdas, también la computadora encuentra sus limitaciones en cuanto a capacidad y rapidez. Esta es una de las razones por las que el fenómeno de percolación también se estudia analíticamente.

2. Uso de la computadora

En el proceso de obtener una respuesta a las preguntas planteadas en la sección anterior por medio de la computadora, lo primero que tenemos que definir con precisión es lo que queremos que haga la máquina. A continuación se presenta una descripción de dichas operaciones para simular esta situación:

1. Introducción de datos.

1.1 Admisión de las cantidades tamaño de la retícula, de la fracción de celdas ocupadas y del número de iteraciones que se desean realizar.

2. Preparación de las estructuras iniciales de datos.

2.1 Crear dos arreglos bidimensionales, uno para almacenar el estado del sistema y otro para almacenar los cambios en cada iteración.

2.2 Colocar aleatoriamente en el arreglo que almacena el estado del sistema como ocupadas, la fracción de celdas especificadas.

2.3 Poner en estado 2 las celdas de la primer columna de la izquierda que estén ocupadas.

3. Repetición del algoritmo descrito en la sección anterior un número

de veces predeterminado.
3.1 Realizar los cambios considerando el arreglo en el que se almacena el estado del sistema y depositarlos en el arreglo que almacena los cambios.
3.2 Almacenar variables tales como el número de celdas que se encuentren en el estado 3.
3.3 Mientras el número de celdas que estén en el estado 2 sea diferente de 0, regresar a 3.1.
3.4 Almacenar datos importantes, tales como la duración del proceso.
3.5 Regresar a 2.2 hasta que el número de iteraciones sea el especificado.
4. Almacenar los resultados en un archivo.
El segundo paso, es la traducción de esta secuencia en algún lenguaje de computadora. En este trabajo se escogió Pascal. El listado del programa no se presenta aquí, pero está disponible para quien lo desee.
Al correr el programa se consideraron los siguientes datos: la fracción inicial de celdas ocupadas (probabilidad de que una celda cualquiera esté ocupada) se varió desde 0.35 hasta 0.80 incrementado el valor en 0.05 en cada simulación; para cada configuración inicial se iteró la retícula hasta que no hubiera ninguna celda en estado 2 y este proceso se repitió mil veces, para estimar la duración y la fracción de casos en los que el incendio logró pasar desde el extremo izquierdo hasta el extremo derecho de la retícula. Esto es, de la misma manera en que para estimar la probabilidad de que al lanzar un dado aparezca un seis, por ejemplo, se puede lanzar el dado un gran número de veces y observar la fracción de lanzamientos en los que aparece el seis. En el gráfico 1 de la figura 3 se presenta la duración del incendio en función de la fracción de ocupación de las celdas. La curva con valores más pequeños corresponde a una retícula de 20 filas por 20 columnas, la siguiente, a una de 40 filas por 40 columnas y así aumentando de 20 en 20 hasta la última, de 100 filas por 100 columnas. Cada una de las curvas tiene un máximo para algún valor que parece estar entre 0.55 y 0.65; se conoce este valor como 0.5927.... Este valor, en el cual, la curva tiene un máximo, disminuye conforme el tamaño de la retícula crece.

Al generar aleatoriamente diferentes cuadros para una misma probabilidad de ocupación de las celdas, habrá unos que sean capaces de conducir el incendio desde el extremo izquierdo hasta el derecho del cuadro. Por ejemplo, en la figura 2, se presentan dos cuadros generados con $p = 0.4$. El de la izquierda es capaz de conducir, por medio de la trayectoria $(2,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,3) \rightarrow (1,4) \rightarrow (1,5) \rightarrow (1,6)$; mientras que el de la derecha, no. En el gráfico 2 de la figura 3, se presen-

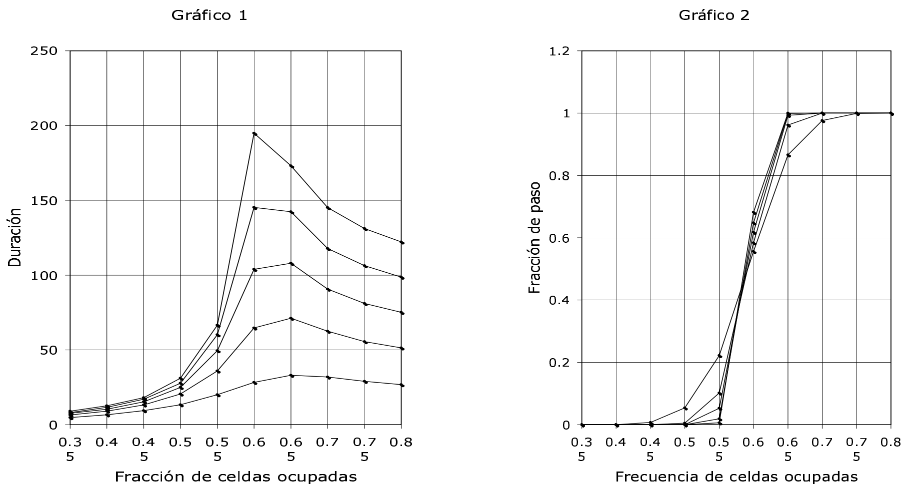

Figura 3

ta la frecuencia de paso desde el extremo izquierdo de la retícula hasta el extremo derecho como una función de la fracción de ocupación de las celdas. Los valores de los parámetros son los mismos que en el gráfico 1. La pendiente de las curvas aumenta conforme aumenta el tamaño de la retícula. En esta gráfica puede observarse un fenómeno interesante: en cualquiera de los casos, la frecuencia de paso cambia de valores próximos a cero a valores próximos a 1 conforme la frecuencia de ocupación pasa tan solo de 0.55 a 0.65. Además, como la pendiente de la curva aumenta conforme el tamaño de la retícula aumenta, entonces este intervalo en el que la frecuencia de paso aumenta considerablemente, disminuye conforme el tamaño de la retícula crece. Conforme aumenta el tamaño de la cuadrícula, la pendiente de la curva aumenta alrededor del punto de intersección. La abcisa de este punto de intersección es aproximadamente 0.594. Se sabe que 0.593 es una mejor aproximación. Dado que los fenómenos que se pretenden modelar tienen un número de celdas mucho mayor del número que puede simularse en cualquier computadora, es importante centrar la atención en lo que ocurrirá cuando este número tiende a infinito.

Mejorar la aproximación no es sencillo. En primer lugar, el uso de recursos computacionales crece aproximadamente en razón directa al cuadrado del lado de la retícula que se esté utilizando. Muchas de las situaciones que se pretenden modelar involucran retículas mucho mayores que las que se pueden considerar al simular en computadora. En

este sentido, el uso del papel y lápiz puede ser más efectivo que el de la computadora (Broadbendt, 1954). Sin embargo, en el caso que se está estudiando, mejorar la aproximación con papel y lápiz, por el momento, puede ser más dificil.
Existen otros algritmos más eficientes que el presentado aquí (Hoshen-Kopelman, 1976).

3. Con papel y lápiz

Considérese el conjunto de vértices $Z^d = \{(x_1, x_2, ..., x_d) | x_i \in Z\}$ con la métrica euclidiana y el conjunto E^d de los lados, formados por todos los pares no ordenados de vértices cuya distancia entre ellos sea 1. El conjunto de vértices y el conjunto de lados forman una retícula en un espacio de dimensión d. Supongamos que cada lado es conductor (de electricidad, de un líquido o de un gas) con probabilidad p. Una trayectoria es una sucesión alternante $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, ...$ de tal manera que e_i es el lado determinado por los vértices v_i y v_{i+1} y los lados $e_1, e_2, e_3, ...$ son conductores. Una trayectoria puede ser finita o infinita. Dos vértices están conectados si existe una trayectoria que contiene a ambos vértices (se acepta que todo vértice está conectado consigo mismo); ésta relación entre vértices es de equivalencia y a las clases inducidas se les llama conglomerados. Dado un vértice x, se define al conglomerado $C(x)$ como el conjunto de todos los vértices que están conectados con x. Puesto que cada lado conduce con probabilidad p, $C(x)$ es un conjunto aleatorio. Los elementos del espacio muestral son todas las configuraciones posibles al variar el estado de cada lado; cada una de ellas tiene cierta probabilidad de ocurrir. Para cada elemento del espacio muestral hay un $C(x)$.
Estamos interesados en la probabilidad de que exista un conglomerado $C(x)$ que sea infinito; a esta probablidad se le acostumbra a denotar por $\theta(p)$. Conforme el número de lados conductores aumenta, las posibilidades de tener un conglomerado infinito permanece o aumenta. Entonces $\theta(p)$ es cero para valores de p menores que un cierto valor p_c y mayor que cero para valores mayores o iguales que p_c. Está demostrado para $d \geq 2$ que $0 < p_c < 1$ (Hammersley, 1957). Para $d = 2$ está demostrado que $p_c = 1/2$ (Kesten, 1980).
A continuación, se verá un ejemplo sencillo de argumentación que permite entender que $p_c \geq \frac{1}{2}$ para $d = 2$. Dado un grafo planar G se construye su dual G^* colocando un vértice en cada cara de G y uniendo dos de estos vértices por un lado e^* si el vértice e de G pertenece a las dos caras. Además, consideramos que e conduce si y solamente si e^*

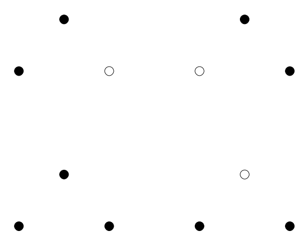

Figura 4

no conduce. Supongamos que p es la proprción de lados que conducen en G y que existe una trayectoria que cruza la retícula de izquierda a derecha con $p \neq p_c$, entonces $p > p_c$. Pero si existe tal trayectoria, entonces no puede haber ninguna trayectoria que cruce a ésta y que vaya del lado superior al inferior en el dual. Por lo tanto, la proporción de lados que conducen en el dual G^*, $1-p$, debe ser inferior o igual a p_c, es decir, $1-p \leq p_c$. Entonces $p > \frac{1}{2}$. Es decir, si $p > p_c$ entonces $p > \frac{1}{2}$, de donde, $p_c \geq \frac{1}{2}$.
En esta sección se ha analizado el fenómeno de percolación a través de los lados; los lados tienen dos estados posibles. Pero en la sección anterior, los que tienen diferentes estados son los vértices. En uno y otro caso, la probabilidad de percolación no es la misma. Y aún ésta varía con la distribución geométrica de los vértices.

4. Renormalización

Considérese una retícula en el plano, periódica en la que los vértices se encuentra en los vértices de un triángulo. Y que cada vértice está ocupado (por ejemplo, por un árbol) con probabilidad p. Si escogemos un conjunto de tres vértices que estén en un triángulo, entonces los estados posibles para que haya transmisión, por ejemplo de un incendio, son los que se muestran en la figura 4. Es decir, para que haya transmisión tiene que haber por lo menos dos vértices ocupados. La probabilidad de que ocurra alguna de éstas configuraciones es $p^3 + 3p^2(1-p)$. Cada tres vértices los substituimos por uno solo con probabilidad de ocupación $p_2 = f(p) = p^3 + 3p^2(1-p)$. Nuevamente, cada tres vértices se substituyen por uno solo con probabilidad de ocupación $p_3 = f(f(p))$, y así sucesivamente, hasta que quede un solo vértice. La función $f(p)$ tiene tres puntos fijos, 1, 0 y $\frac{1}{2}$. Si p vale 0 o 1, el sistema al reducirlo a un solo vértice, éste estará ocupado con probabilidad cero si $p = 0$ y con probabilidad 1 si $p = 1$. Si $p = \frac{1}{2}$, el sistema se reducirá a un solo vértice con probabilidad de ocupación de un medio. Si $p < \frac{1}{2}$, $f(p), f(f(p)), f(f(f(p))), ...$ convergerá a cero y la probabilidad de ocupación del último vértice será cero. Si $p > \frac{1}{2}$, $f(p), f(f(p)), f(f(f(p))), ...$ convergerá a uno y la probabilidad de ocupación del último vértice será uno. Por lo tanto, la probabilidad de percolación por vértices en una estructura triangular plana es $\frac{1}{2}$.

5. Comentarios finales

La teoría de la percolación es un ejemplo de un campo en el que converge el trabajo en computadora y los resultados teóricos, basados principalmente en geometría y probabilidad. Con ella es posible modelar una amplia gama de fenómenos de importancia práctica, tales como difusión de líquidos y gases en materiales porosos, comportamiento de materiales semiconductores, magnetismo y difusión de enfermedades contagiosas. Además, mantiene una buena cantidad de temas abiertos a la investigación. Indudablemente, se trata de un tema que atrae hacia las matemáticas.

Referencias

[1] Broadbendt, S. R., *Disscussion on symposium on Monte Carlo method*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **16** (1954), 68.

[2] Grimett, G.R., Percolation, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[3] Hammersley, J.M., *Percolation processes. Lower bounds for the critical probability*, Ann. of Math. Statistics **28** (1957), 790–795.

[4] Hoshen, J., Kopelman, R., *Percolation and Cluster Distribution. I. Cluster Multiple Labeling Technique and Critical Concentration Algorithm*, Phys. Rev. B **14**, 3438 (1976).

[5] Kesten, H., *The critical probability of bond percolation on the square lattice equals* $\frac{1}{2}$, Comm. Math. Phys. **74** (1980), 41–59.