MISCELÁNEA MATEMÁTICA **30** (2000) 27–40 SMM

Hacia el infinito y más allá ... en análisis funcional

Carlos Bosch Giral
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo # 1
01000 México D.F.
México
bosch@gauss.rhon.itam.mx

1 Introducción.

Los espacios de mayor interés en análisis son los de dimensión infinita. Sin embargo a menudo es conveniente considerar los espacios de dimensión finita, que suelen ser la base de nuestra percepción intuitiva sobre lo que se puede esperar cuando se trabaja con espacios vectoriales en general.

Es hacia el final del siglo XIX, cuando se empieza a buscar un nuevo análisis y un *Álgebra del infinito* que permitirá el desarrollo del análisis funcional. La noción de espacio métrico fue una de las piezas fundamentales para el desarrollo del *álgebra del infinito*, para ser más precisos fue la teoría de espacios normados lo que permitió comprender mejor gran parte de los problemas del análisis funcional y atacarlos con más generalidad y eficacia.

Entre 1910 y 1935 se juntaron los esfuerzos de Riesz, Nagy, Mazur y Banach, entre otros para combinar las ideas del álgebra lineal y la noción de distancia de manera muy productiva.

Aquí veremos algunas propiedades de los espacios de dimensión infinita, aunque en general, analizaremos primero cual es la situación de los espacios de dimensión finita. Veremos algunos problemas abiertos en el caso de la dimensión infinita, que para el caso finito hace tiempo están resueltos.

2 Espacios vectoriales.

El tratamiento moderno de muchos de los temas de las matemáticas puras y aplicadas se caracteriza por el esfuerzo que se hace por despojarlas de los detalles no esenciales y centrarse en las estructuras fundamentales y la forma de razonar. En el tratamiento axiomático del álgebra lineal, el concepto central es el de espacio vectorial o lineal que recordamos a continuación.

Un conjunto X con dos operaciones, $+$ suma y $\cdot$ multiplicación por un número real o complejo tal que $x + y$ es un elemento de X y αx es un elemento de X es un espacio vectorial si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. Existe un único elemento, denotado por 0 tal que $x + 0 = x$ para toda x.
4. A cada x en X le corresponde un único elemento, denotado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$
5. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
6. $(\alpha + \beta)\, x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
7. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
8. $1 \cdot x = x$

donde x, y, z son elementos de X y α, β son elementos de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{C}$.

En el caso de que la multiplicación sea por números reales, se dice que se tiene un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y si es por números complejos, se tiene un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Recordemos otros conceptos fundamentales en la teoría de espacios vectoriales.

Un conjunto *finito* de elementos de X a veces llamados vectores $x_1, \ldots, x_n$ en X es linealmente *dependiente* si existen elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, llamados escalares, no todos iguales a cero y dependiendo si el espacio vectorial X es real (*sobre* $\mathbb{R}$) o *complejo* (*sobre* $\mathbb{C}$) tales que:

$$\alpha_1, x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Si el conjunto finito $x_1, \ldots, x_n$ no es linealmente dependiente se dice que es *linealmente independiente.* En este caso la relación

$$\alpha_1, x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \quad \text{implica} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0\,.$$

Un conjunto infinito de vectores, S, es *linealmente independiente* si *todo subconjunto finito* de S es linealmente independiente; en los otros casos S es linealmente dependiente. Usando estos conceptos se puede definir la dimensión de un espacio vectorial.

Si X es un espacio vectorial real o complejo y suponemos que existe un entero positivo n, tal que X contiene un conjunto de n vectores que son linealmente independientes, mientras que cualquier conjunto de $n+1$ vectores es linealmente dependiente; entonces se dice que X es de dimensión finita y su dimensión es n, $\dim X = n$.

Si X no es de dimensión finita, se dice que X es de *dimensión infinita.*

Veamos algunos ejemplos que ilustran todas estas definiciones.

1. Sea $X = \mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ con } x_i \in \mathbb{R}\}$.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ entonces

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

es la suma y la multiplicación está dada por $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha_n x_n)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$, es claro que el neutro es $(0, \ldots, 0)$ y el inverso aditivo de x es $-x = (-x_1, ..., -x_n)$

Con las propiedades y definiciones mencionadas es fácil verificar que se cumplen los ocho axiomas de espacio vectorial, y así X es un espacio vectorial real. La dimensión de este espacio es n ya que $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ es un sistema de vectores linealmente independiente, y además si al conjunto $e_1, \ldots, e_n$ le adjuntamos cualquier otro vector e resulta que $\{e_1, \ldots, e_n, e\}$ es linealmente dependiente de manera que $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2. Sea $X = \mathbb{C}^n$, X resulta ser un espacio vectorial complejo si las operaciones se definen de manera análoga al caso anterior. Observemos que $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente y si se le adjunta uno más resulta un conjunto de vectores linealmente dependientes, a ese tipo de conjuntos se les llama *base*, por lo tanto $\dim \mathbb{C}^n = n$.

Observemos que si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces en general $\alpha x \notin \mathbb{R}^n$, por lo que $\mathbb{R}^n$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$. Recordemos que un subespacio vectorial de X sobre K es un conjunto M tal que si $x, y \in M$ y $\alpha \in K$ entonces $x + y \in M$ y $\alpha x \in M$ donde K representa a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y $X = \mathbb{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en $[a,b]\}$. $\mathbb{C}([a,b])$ resulta un espacio vectorial real al definir la suma y el producto por un número real de manera natural: $f_1 + f_2 = f$ si $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$ para toda x en $[a,b]$ y $\lambda f_1 = f$ si $\lambda f_1(x) = f(x)$ para toda x en $[a,b]$. El espacio $\mathbb{C}([a,b])$ es de dimensión infinita, pues si tomamos $f_\circ(x) = 1$, $f_1(x) = x, \ldots, f_n(x) = x^n$ es un conjunto linealmente independiente para cualquier n; ya que si $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0$ para toda x se tiene $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Por lo tanto $\mathbb{C}([a,b])$ no puede ser de dimensión finita.

4. Los elementos del espacio X son sucesiones del tipo

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

con $x_n \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ para toda n, tales que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Las operaciones en X se definen de la siguiente manera:

Si $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ la suma está dada por $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ y el producto por $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots)$.

Este espacio fue estudiado por David Hilbert a principios del Siglo XX y se denota por ℓ^2, luego:

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

Como el conjunto $x_1 = (1, 0, \ldots)$, $x_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$, $x_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, (con un uno en el lugar n y ceros en el resto), es un conjunto linealmente independiente para toda n, se tiene que ℓ^2 es de dimensión infinita. Este espacio es el clásico prototipo de lo que se conoce como espacio de Hilbert del cual hablaremos más adelante.

3 Operadores lineales.

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y una función $A : X \to Y$. Denotamos por $D(A)$ al dominio de A; $D(A)$ resulta ser un subespacio vectorial de X. Un operador A es lineal si $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ para todo x_1, x_2 en $D(A)$ y $A(\alpha x) = \alpha Ax$ para todo x en $D(A)$ y α en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Un ejemplo de operador lineal es el siguiente:

Sea $Y = \mathbb{C}([0,1])$ y sea $X \subset Y$ tal que X consiste de todas las funciones derivables, cuya derivada es continua, y tales que si $x \in X$ entonces $x(0) = 0$. Definimos $A : X \to Y$ como $Ax = y$ donde

$y(s) = x'(s) + p(s) \cdot x(s)$ con $p \in Y$. Definido de esta manera A resulta ser un operador lineal.

La pregunta ¿Es A sobre? o ¿Es la imagen de A todo Y? es equivalente a que la ecuación $y = x' + px$ con $x(0) = 0$ tenga solución para cada $y \in Y$. Observemos que la condición inicial $x(0) = 0$ está incorporada en el espacio X. Una respuesta afirmativa a esa pregunta nos da un teorema de existencia de la ecuación antes mencionada.

La pregunta ¿Es x único en caso de que exista una solución? es equivalente a preguntar si ¿existe A^{-1}, inverso de A? En este caso una respuesta afirmativa nos da un teorema de unicidad. Cuando la dimensión es finita la unicidad y la existencia son equivalentes, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $A : X \to Y$ un operador lineal con* $\dim X = \dim Y = n$, *n finita, entonces la imagen de A es Y si y sólo si A^{-1} existe.*

El hecho que la dimensión sea finita es esencial como vemos en el siguiente ejemplo.

Sea $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ con derivadas de todos los ordenes$\}$. Sea $X = Y$ y $A = X \to Y$ tal que $Ax = y$ donde $y(s) = x'(s)$. En este caso claramente la imagen de A es Y pues una solución de $Ax = y = x'$ está dada por $x(s) = \int_0^s y[t]\,dt$. Sin embargo A^{-1} no existe ya que para $Ax = 0$, $x$igual a una constante es solución de la ecuación $x' = 0$.

4 Funcionales lineales.

Un operador lineal de X a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$ es una funcional lineal. El conjunto de todas las funcionales lineales $\{f : X \to \mathbb{R} : f$ es lineal$\}$ lo denotamos por X^*, claramente X^* es un espacio vectorial cuando definimos la suma como la función $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y la multiplicación como la función $(f.g)(x) = f(x)g(x)$

A X^* le llamamos el dual algebraico de X. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos.

1. Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) con $n \geq 1$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. No lo probaremos aquí pero una caracterización de este tipo de funcionales lineales es la siguiente: si f es una funcional lineal y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces $f(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ donde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es un vector fijo. De manera que a cada funcional lineal le corresponde un vector

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e inversamente es decir que $(\mathbb{R}^n)^*$ y $\mathbb{R}^n$ son isomorfos en el caso de dimensión finita.

2. Sea $X = \mathbb{C}[a,b]$ y tomemos $t_\circ \in [a,b]$, $t_\circ$ fijo.

Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x(t_\circ)$, f resulta ser lineal.

Otro ejemplo en este mismo espacio es:

$f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_a^b x[t]\,dt$.

3. Sean $X = \ell^2$ y $a = (\alpha_n) \in \ell^2$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ con $X = (x_1, \ldots x_i, \ldots)$. Esta función está bien definida, pues la serie que usamos para definirla es convergente ya que por la desigualdad de Cauchy:

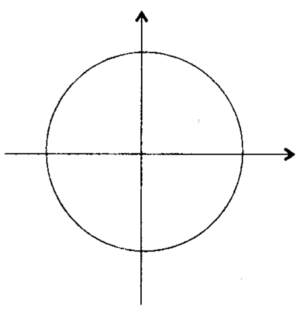
$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para toda n. De modo que como $a \in \ell^2$ y $x \in \ell^2$ las sumas parciales están acotadas y la serie converge absolutamente. Además es claro que f es lineal entonces para cada $a \in \ell^2$ tenemos una funcional lineal, es decir que tenemos que en cierto sentido ℓ^2 se puede considerar como un subconjunto de $(\ell^2)^*$.

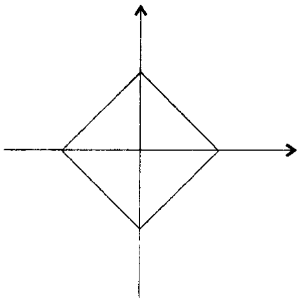
5 Espacios normados.

Estamos acostumbrados a medir en $\mathbb{R}^2$ y para eso tenemos varias normas definidas en ese espacio. Las más usuales son las siguientes:

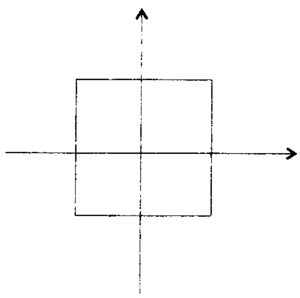
Normal usual $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ la bola unitaria cerrada es $\{x : \|x\| \leq 1\}$



Otra norma es $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ la bola unitaria cerrada es $\{x : \|x\| \leq 1\}$



Otro ejemplo es $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$ la bola unitaria cerrada es $\{x : \|x\| \leq 1\}$



La norma es esencial en la definición de continuidad. En efecto recordemos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto a si:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \epsilon D(f)$ con

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

y si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tenemos que cambiar la norma que corresponde al dominio es decir:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \epsilon D(f)$ con

$$\|x - a\|_{\mathbb{R}^2} < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\,.$$

En general si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tendremos:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \epsilon D(f)$ con

$$\|x - a\|_{\mathbb{R}^2} < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon\,.$$

Recordemos que la norma usual en $\mathbb{R}^n$ está dada por $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

A partir del caso de dimensión finita se puede sacar lo esencial para definir una norma en un espacio vectorial X. Una norma en Xse denota por $\|x\|$ y tiene las propiedades:

1) $||x_1 + x_2|| \leq ||x_1|| + ||x_2||$para todo $x_1, x_2 \epsilon X$
2) $||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||$ para todo $x \epsilon X$ y α en el campo
3) $||x|| \geq 0$
4) $||x|| \neq 0$ si $x \neq 0$

A un espacio vectorial con una norma se le llama un espacio vectorial normado. Algunos ejemplos son los siguientes.

Ejemplos.
1) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ con la norma usual.
2) $\mathbb{R}^n$ con $||x|| = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ con $p \geq 1$
3) ℓ^2 con $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
4) $\mathbb{C}([a,b])$ con $||f|| = \sup_{x \epsilon [a,b]} |f(x)|$
5) Un espacio vectorial normado de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ o bien $\mathbb{C}^n$.

6 La continuidad de las funcionales.

Como hemos visto en el apartado anterior la continuidad depende fuertemente de la norma, asi que ahora que tenemos definidos los espacios normados vamos a definir la continuidad de operadores. Sea $A : (X, ||\ \ ||) \to (Y, ||\ \ ||)$, decimos que A es continuo en $D(A)$ si para toda $x_0 \in D(A)$ y $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, para toda $x \in D(A)$ con $||x - x_0|| < \delta$, implica que $||Ax - Ax_0|| < \varepsilon$. Hay que observar que la primera norma es la norma en X y la segunda norma es la norma en Y.

En caso de tener funcionales, la definición es idéntica, excepto que el espacio Y es el campo y la norma es el valor absoluto en el caso de $\mathbb{R}$ y el módulo en el caso de $\mathbb{C}$.

Una caracterización de los operadores *lineales continuos* que es muy usada es la siguiente.

Teorema 2. *Si $A : (X, ||\ \ ||) \to (Y, ||\ \ ||)$, es un operador lineal, A es continuo en todo punto de $D(A)$ o en ningún punto de su dominio.*

El operador A es continuo en $D(A)$ si y sólo si existe una constante M tal que $||Ax|| < M\, ||x||$ para toda $x \in D(A)$.

Este teorema es especialmente útil pues nos indica que basta con que un operador sea continuo en un punto para que sea continuo en todo su dominio, y para eso basta probar la desigualdad que aparece al final, en la cual hay que observar que la norma que aparece en la primera parte de la desigualdad es la que corresponde a Y y la que aparece en la segunda parte es la que corresponde a X. Estas desigualdades nos dicen que el operador A es continuo en $x = 0$.

En §4 ejemplo 1 vimos que cada funcional lineal, de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, se caracteriza por medio de un elemento a de $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera, $f(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ de donde se puede probar que la funcional lineal es continua. Es decir que toda funcional lineal en $\mathbb{R}^n$ es continua. En realidad esto sucede para toda funcional definida en un espacio de dimension finita .

El espacio definido por las funcionales lineales es el dual algebraico y el espacio definido por las funcionales lineales continuas es el dual topológico. La propiedad anterior nos dice que el dual algebraico y el topológico coinciden cuando el espacio es de dimensión finita. Esto no sucede cuando el espacio es de dimensión infinita. Hay ejemplos de funcionales lineales en ℓ^2 que no son continuas lo cual muestra que el dual topológico y el dual algebraico de ℓ^2 son distintos.

En §4 ejemplo 3 vimos que si $X = \ell^2$, $a = (\alpha_n) \in \ell^2$ y si $f : X \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ con $X = (x_1, \ldots x_i, \ldots)$ entonces el espacio formado por esas funcionales es un subespacio del dual algebraico de ℓ^2. En realidad de manera similar al caso finito se puede probar que ese tipo de funcionales lineales, son continuas y que ese conjunto es exactamente igual al dual topológico de ℓ^2, es decir que todas las funcionales continuas son de ese tipo.

El que coincidan el dual topológico y el espacio es una propiedad muy fuerte que no se cumple en general.

7 La topología y el álgebra.

La relación existente entre la topología y el álgebra en espacios normados es extremadamente interesante ya que en realidad lo que hace es relacionar dos ramas diferentes de las matemáticas y propiedades de un tipo van a transformarse en propiedades del otro y viceversa.

Nuevamente empecemos por recordar algunas definiciones que serán necesarias en lo que sigue.

Una familia $\Im$ de conjuntos es una cubierta de un conjunto S si la unión de todos los conjuntos de $\Im$ contiene a S. En el caso en que cada miembro de $\Im$ sea un subconjunto de S entonces la unión de la que se habla es claramente igual a S. Una subcubierta es una subfamilia de $\Im$, tal que esta subfamilia sigue siendo una cubierta de S. Una cubierta abierta es una cubierta cuyos miembros son conjuntos abiertos en el espacio en el que estemos trabajando, aquí sólo trataremos el caso de espacios normados. Un conjunto S en un espacio normado es *compacto* si para cada cubierta abierta existe una subcubierta con un número finito de miembros tal que es cubierta de S.

La primera observación que haremos aqui es que si un espacio vectorial normado es compacto entonces es el espacio cuyo único elemento es 0.

También se tiene que si X es un espacio vectorial normado entonces todo subespacio de dimensión finita de X es cerrado. Si X es de dimensión finita y es un espacio vectorial normado todo subconjunto cerrado y acotado en X resulta ser compacto.

Tal vez una de las más impactantes caracterizaciones de un espacio vectorial normado de dimensión finita es que si X es un espacio vectorial normado y la bola unitaria cerrada es compacta entonces X es de dimensión finita. La importancia de este resultado es que relaciona una propiedad puramente topológica, como es la compacidad, con una propiedad puramente algebraica como es la dimensión.

8 Hace ochenta años.

Stefan Banach, en su tesis doctoral en 1920, dió los axiomas para definir un espacio vectorial normado completo, y desde 1932 cuando aparecieron esos resultados publicados, a este tipo de espacios se les llama espacios de Banach.

Nuevamente empecemos por recordar una noción: la completez. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio vectorial normado $(X, \|\ \ \|)$ es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que si $n, m > n_\varepsilon$ entonces se tiene $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, es decir, que a partir de cierto momento los elementos de la sucesión se acercan mucho entre ellos, están todos en una bola de radio ε. Un espacio vectorial normado es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir que existe un elemento en el espacio que es el límite de esa sucesión. Un espacio vectorial normado y completo es un espacio de Banach.

Veamos algunos ejemplos.

1. $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ con la norma usual son espacios de Banach.

2. ℓ^2 con la norma $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ es un espacio de Banach.

3. Hay espacios que no son de Banach, por ejemplo, consideremos $X \subset \ell^2$ donde X consiste de todas las sucesiones $x = (x_n)$ con un número finito de terminos distintos de cero. El espacio X no es completo, pues si $x = (x_n) \in \ell^2 - X$ y $y_n = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ es claro que $y_n \longrightarrow x$. Además como el límite de una sucesión convergente es único y $x \in X$ se tiene que y_n es de Cauchy en X pero no tiene límite en X.

Una caracterización importante de los espacios de Banach es que X es de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente en X es convergente.

9 Bases en espacios de Banach.

Una sucesión x_n en un espacio de Banach de dimensión infinita X es una base si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\alpha_n \subset \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ es decir, que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| = 0.$

Un espacio de Banach es separable si existe un conjunto numerable denso, es decir cuya cerradura sea todo el espacio.

A pesar de que el problema del que hablaremos a continuación no es un problema que tenga que ver directamente con la diferencia entre la dimensión finita o infinita de un espacio, sino más bien con la diferencia que existe entre los espacios de Banach y los de Hilbert (los cuales definiremos más adelante) este es uno de los problemas más interesantes del análisis funcional y vale la pena conocerlo.

El problema de las bases ha sido uno de los problemas más importantes en la teoría de espacios de Banach de dimensión infinita, la pregunta es la siguiente ¿En un espacio separable de Banach siempre hay una base? lo que se ha probado es equivalente a contestar la pregunta: ¿todo subespacio de $\mathbb{C}([0,1])$ tiene una base?

La respuesta negativa a este problema la dió el matemático sueco P. Enflo en 1972, después de que el problema quedó sin resolver durante 46 años, sin embargo todavía quedan problemas relacionados con este tema. Una versión simplificada del trabajo de Enflo esta en el artículo de Davie que se cita en la bibliografía. A pesar de esto el ejemplo es bastante complicado y requiere de conocimientos en el área para poder entenderlo .

10 Espacios con producto interior.

Un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) es un espacio con producto interior si a cada pareja de elementos $x, y \in X$ se le asocia un número real (o complejo), denotado (x, y), llamado producto interior de x e y, con las siguientes propiedades:

1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

2) $(x, y) = (\overline{y, x})$ (la barra denota el conjugado)

3) $(\alpha x, y) = \alpha\,(x, y)$ para todo α escalar

4) $(x, x) \geq 0$ y $(x, x) \neq 0$ si $x \neq 0$.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^2$ se define el producto interior como $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ si $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$.

2. En $\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{R}^n$ se define un producto interior generalizando el caso de la dimensión 2.

3. Si $x, y \in \ell^2$ se define un producto interno por medio de

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i \text{ donde } x = (x_1, x_2, \dots) \text{ y } y = (y_1, y_2, \dots)$$

Un producto interior define una norma de la siguiente manera : $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$. Un espacio vectorial con producto interior y completo, respecto a la norma inducida por el producto interior, es un espacio de Hilbert. Como ejemplos tenemos a $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ de dimensión finita y a ℓ^2 de dimensión infinita.

Uno de los problemas más importantes de los espacios de Hilbert es el problema de los subespacios invariantes en donde la dimensión juega un papel fundamental.

Sea $T : H \longrightarrow H$ donde H es un espacio de Hilbert y T es un operador lineal. Sea $M \subset H$, M un subespacio cerrado distinto de H y de $\{0\}$. Si $T(M) \subset M$ se dice que M es un subespacio invariante bajo T. La conjetura que hay a este respecto es:

Todo operador lineal $T : H \longrightarrow H$ tiene un subespacio invariante.

La situación de este problema es la siguiente. Sea $T : H \longrightarrow H$.

1. Si $\dim H$ es finita entonces tenemos un problema de álgebra lineal que sabemos como resolver.

2. Si $\dim H > \aleph_0$ sea $x \in H$, $x \neq 0$, consideremos la cerradura del espacio generado por $x, Tx, Tx^2, Tx^3, \ldots$ y denotemoslo por m. $\dim m \leq \aleph_0$ entonces M es distinto de H y de $\{0\}$ y claramente $T(M) \subset M$.

3. Si $\dim H = \aleph_0$ se han hecho avances pero no se tiene una solución completa, el problema general sigue abierto, es decir que no se tiene una solución general.

Una propiedad peculiar de los espacios de Hilbert de dimensión $\aleph_0$ es que en cierto sentido son *congruentes* a ℓ^2. De manera que la conjetura se puede enunciar como:

Para todo $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ existe $M \subset \ell^2$ $M \neq \{0\}, M \neq \ell^2$ y M cerrado tal que $T(M) \subset M$.

Como hemos visto el ingrediente de la dimensión infinita hace que tengamos situaciones totalmente distintas a las que suceden en el caso finito e incluso problemas que son bien conocidos en el caso de dimensión finita son problemas abiertos en dimensión infinta o al menos no totalmente resueltos.

Agradecimiento.

Agradezco a Juan José Rivaud y los revisores todas las atinadas sugerencias y recomendaciones que hicieron para mejorar la lectura y el contenido de este artículo.

Referencias

[1] A. M. Davie *The approximation problem for Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 261–266.

[2] B. Gamboa de Buen B. *Historia del Análisis Funcional*, Miscelánea Matemática, **28**, Julio 1999, 17–40.

[3] G. Jameson, *Topology and Normed Spaces*, Chapman and Hall, London, 1974.

[4] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Springer Verlag 1973.

[5] I. Singer, *Bases in Banach Spaces*, Springer Verlag 1970.

[6] A. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley Toppan 1958.