MISCELÁNEA MATEMÁTICA 32 (2000) 39–50 SMM

Los sistemas dinámicos, ¿Qué son y para qué sirven?

Ernesto A. Lacomba
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Av. Michoacán y La Purísima
Col. Vicentina
Apdo. Postal 55-534
09340 México, D.F.
México

hs98@xanum.uam.mx

1 Introducción histórica.

Los problemas de la dinámica han fascinado a los científicos durante miles de años. Los más notables son los de la mecánica celeste, consistente en el estudio de movimientos de cuerpos dentro del sistema solar. Los intentos de Newton para comprender y modelar los movimientos observados de los planetas incorporaron las leyes de Kepler y dieron origen a su desarrollo del cálculo. Así surgió el planteamiento de modelos de problemas dinámicos como ecuaciones diferenciales ordinarias.

A pesar de que dichas ecuaciones parecen muy elegantes y simples, la solución de problemas específicos resultó notablemente difícil y ocupó las mentes de muchos de los más grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX. Mientras que para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales fue desarrollada una teoría relativamente completa, los sistemas no lineales permanecieron esencialmente inaccesibles, excepto por las aplicaciones exitosas de los métodos de perturbaciones a problemas muy cercanos de sistemas lineales o de otros sistemas cuyas soluciones se conocen explícitamente. Las aplicaciones más famosas e impresionantes fueron de nuevo en la mecánica celeste, donde se pudo determinar con mucha precisión las órbitas de los planetas. Como un ejemplo, las irregularidades en el movimiento del planeta Urano a mediados del siglo XIX condujeron al descubrimiento del planeta Neptuno. Primero se tuvo certeza de su existencia en forma teórica, y más tarde fue descubierto físicamente en el espacio. Algo parecido ocurrió después con Plutón. En los métodos de perturbaciones uno toma una solución conocida a un problema más simple pero análogo y la modifica para conseguir una mejor aproximación a la solución verdadera, que no se puede calcular en forma exacta. Para su aplicación se requiere de un pequeño parámetro, en términos del cual hacemos una expansión en serie de potencias.

El análisis era la herramienta favorita para el estudio de problemas dinámicos hasta que el trabajo de Poincaré a fines del siglo XIX [6] mostró que los métodos de perturbaciones podrían no darnos resultados correctos en todos los casos, porque las series usadas en tales cálculos divergían. Entonces Poincaré fusionó el análisis con la geometría al desarrollar un punto de vista cualitativo para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Así surgió lo que actualmente se conoce como Sistemas Dinámicos. Incidentalmente, también dió lugar a otras ramas de las Matemáticas, como la Topología Algebraica y la Topología Diferencial.

Los métodos de Poincaré se caracterizan sobre todo por el punto de vista geométrico global. El visualizaba un sistema dinámico como un campo de vectores en el espacio fase, así que una solución es una curva suave tangente en cada uno de sus puntos al vector basado en dicho punto. Su preocupación fundamental era la descripción global de todas las soluciones (o "retrato fase") y el efecto de pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales (estabilidad). En particular se interesaba mucho por la existencia de órbitas periódicas en el problema de tres cuerpos. El estudio de estabilidad de un sistema tuvo también su origen en cuestiones de mecánica celeste como la estabilidad del sistema solar, estudiadas originalmente por Newton, Lagrange y Laplace. En la época de Poincaré, el problema general de estabilidad fue simultáneamente estudiado por Liapunov, cuya tesis doctoral [4] fue el punto de partida de la teoría moderna de estabilidad.

Después de Poincaré, los sistemas dinámicos como métodos de análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales fueron desarrollados por los siguientes matemáticos. El primero fue Birkhoff [2], quien impulsó el trabajo iniciado por Poincaré al dar forma coherente a los sistemas dinámicos precisando las nociones básicas, a la vez que probó la existencia de una infinidad de soluciones periódicas en el problema de tres cuerpos. Después Andronov y Pontriagin [1] introdujeron el concepto de estabilidad estructural, donde uno se pregunta si pequeñas perturbaciones de un campo de vectores a otro ligeramente diferente nos dan un retrato fase de soluciones que cualitativamente esté cercano del correspondiente al campo vectorial original. Esto tiene gran importancia práctica porque los coeficientes de una ecuación diferencial se determinan experimentalmente y por lo tanto de manera aproximada. Finalmente, Kolmogorov, Arnold y Moser [5] probaron la estabilidad de ciertas soluciones periódicas en el problema de 3 cuerpos, exhibiendo una infinidad de soluciones periódicas y cuasi periódicas (superposición de soluciones periódicas de distintos periodos) vecinas. Así dieron origen a una teoría conocida con sus tres nombres y que podía pensarse como una solución parcial al problema de estabilidad del sistema solar.

Entonces Smale enriqueció substancialmente la teoría general al bosquejar el estudio sistemático de sistemas hiperbólicos [7]. Su idea básica era la búsqueda global de propiedades genéricas o estables. Propuso así cierto número de problemas muy relevantes, resolviendo algunos de ellos y estimulando mucho del trabajo posterior en el tema. Como un ejemplo, al construir la famosa "herradura" que ahora lleva su nombre, dió lugar a la aplicación sistemática de la llamada "dinámica simbólica" en sistemas dinámicos para describir el comportamiento caótico a largo plazo de las soluciones. De esta forma resulta que el comportamiento de ciertas órbitas puede plasmarse en la complejidad ya conocida de un conjunto de Cantor. La aparición de caos es más bien una regla general para sistemas no lineales. Tambien probó que generalmente no se tiene estabilidad estructural.

Desde el trabajo de Poincaré cuando se toman secciones transversales a ciertas soluciones (generalmente periódicas) de una ecuación diferencial ordinaria para entender el comportamiento de las órbitas vecinas, aparece otro tipo de sistemas dinámicos llamados discretos, que consisten en el estudio cualitativo de las ecuaciones en diferencias o iteración de aplicaciones o mapeos. Estas tienen diversas aplicaciones en muchas áreas: biología, economía, análisis numérico, etc. En una ecuación en diferencias podemos pensar que el cambio ocurre en intervalos discretos de tiempo. Simplemente al discretizar una ecuación diferencial ordinaria para resolverla por métodos numéricos aparecen ecuaciones en diferencias que hay que resolver recursivamente. Como otro ejemplo, al modelar poblaciones de animales que se reproducen en ciertas épocas del año, es preferible usar ecuaciones en diferencias en vez de ecuaciones diferenciales porque el tamaño de la siguiente generación está determinada en gran parte por el tamaño de la actual.

Muchos de los conceptos y tipos de soluciones mencionados antes para las ecuaciones diferenciales tienen su equivalente para las ecuaciones en diferencias.

2 Sistemas dinámicos a tiempo continuo.

De acuerdo con la descripción de la sección anterior podemos decir a grosso modo que para definir un sistema dinámico tenemos que partir de un campo vectorial en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, o bien de una función que va de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. Aquí consideramos con detalle el primer caso, que llamaremos Sistemas dinámicos a tiempo continuo o diferenciables, ver [3].

Consideremos un campo vectorial X definido en $\mathbb{R}^n$ o en un abierto de $\mathbb{R}^n$ suficientemente diferenciable, digamos C^∞. A este campo vectorial $X\cdot\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le podemos asociar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que podemos escribir vectorialmente en la forma

$$\dot{x} = X(x), \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y el punto significa derivada con respecto al tiempo. Recordemos que una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ determina una solución, o sea una curva diferenciable $x = \phi(t)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\phi(0) = 0$ y su derivada satisface

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = X(\phi(t)).$$

Esta curva está definida en un intervalo maximal $I \subset \mathbb{R}$ que contiene al 0. Podemos decir que este campo vectorial nos define un sistema dinámico a tiempo continuo, cuando estamos interesados en el estudio global cualitativo de sus soluciones.

Las soluciones más simples son las de equilibrio $\phi(t) = x_0$ constante, las cuales pueden encontrarse fácilmente mediante la condición de que el campo vectorial allí se anule, es decir $X(x_0) = 0$. Las siguientes en complejidad serían las soluciones periódicas, las cuales satisfacen para todo $t \in \mathbb{R}$ que $\phi(t+p) = \phi(t)$ para algún $p > 0$ que llamamos periodo. La imagen de estos dos tipos de soluciones son puntos o curvas cerradas, un caso particular de los llamados subconjuntos invariantes bajo el campo vectorial, por consistir de soluciones completas.

Ejemplo 1.– La ecuación diferencial escalar $\dot{x} = ax$ con $x \in \mathbb{R}$ y donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro, es la más simple posible. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\phi(t) = e^{at}x_0$ es la solución que satisface $\phi(0) = x_0$.

Ejemplo 2.– Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x,\\ \dot{y} &= -y,\end{aligned} \tag{2}$$

donde el origen es un punto de equilibrio, un punto silla. Aquí la función xy es constante a lo largo de las soluciones, así que sus curvas de nivel son las soluciones sin parametrización de tiempo.

Ejemplo 3.– Consideremos ahora el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x,\\ \dot{y} &= y,\end{aligned} \tag{3}$$

donde el origen como punto de equilibrio es una fuente (repulsor). Todas las otras soluciones describen semi-rectas que salen del origen.

Ejemplo 4.– Consideremos ahora el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= -\sin x.\end{aligned} \tag{4}$$

Se trata de un péndulo simple. Tiene un conjunto numerable de puntos de equilibrio sobre el eje x. Aquí la función $\frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$ es constante. Dibujando sus curvas de nivel que describen las soluciones, vemos que los puntos de equilibrio son alternadamente sillas y centros. Estos últimos se llaman así por estar rodeados de una región abierta que contiene sólo órbitas periódicas. Ver la Figura 1.

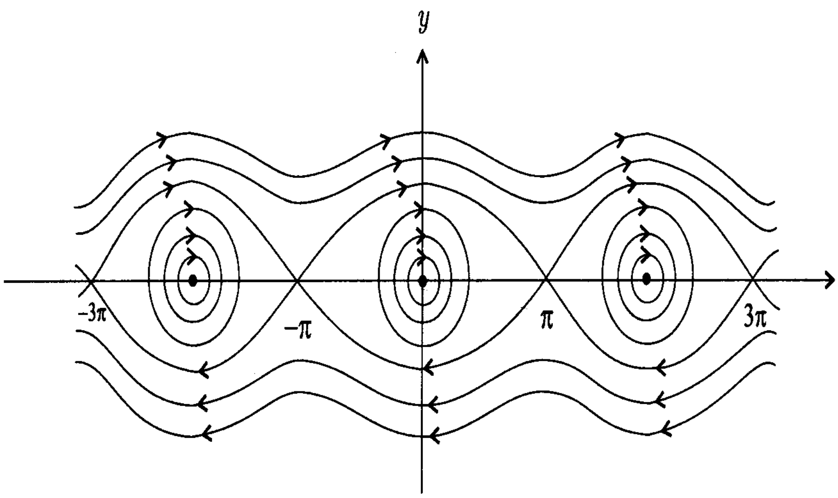

Figura 1: Retrato fase del péndulo

Ejemplo 5.- Ahora consideremos la ecuación $\dot{x} = x^2$, donde el origen es punto de equilibrio y por lo tanto la solución $\phi(t) = 0$ está definida para todo tiempo real. Cualquier otra solución es de la forma $\phi(t) = x_0/(1 - x_o t)$ y por lo tanto no está definida para todo t real.

Ejemplo 6.- Generalizando los ejemplos 1, 2 y 3, así como la solución general del ejemplo 1, si $x \in \mathbb{R}^n$ y A es una matriz real $n \times n$, la ecuación

$$\dot{x} = Ax \tag{5}$$

representa un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La solución general puede representarse por medio de la exponencial de matrices como

$$\phi(t) = e^{At}x_0,$$

donde e^{At} es una matriz no singular $n \times n$ y $\phi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial.

Si definimos $\Phi_t(x) = e^{At}x$, la aplicacion lineal

$$\Phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, puede pensarse como un operador que para cada t aplica la matriz e^{At} a los vectores de $\mathbb{R}^n$. Las Φ_t tienen las siguientes propiedades importantes.

i) $\Phi_0(x) = x$, pues e^0 es la matriz identidad.

ii) $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_t \circ \Phi_s(x)$, pues $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

Decimos que $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo a un parámetro de transformaciones lineales no singulares. Su importancia radica en que contienen simultáneamente la información global de todas las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

En el caso general no lineal, las Φ_t son siempre difeomorfismos, pero sus dominios pueden ser diferentes para cada t y no estar definidos para todo $t \in \mathbb{R}$. De la fórmula para las soluciones en el Ejemplo 5, vemos que en este caso el dominio tiene que describirse mediante tres fórmulas distintas como sigue

$$\operatorname{dom} \Phi_t = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/t\}, (t > 0),$$

$$\operatorname{dom} \Phi_0 = \mathbb{R},$$

$$\operatorname{dom} \Phi_t = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/t\}, (t < 0),$$

El siguiente concepto importante es el de estabilidad de una solución $x = \phi(t)$ de equilibrio o periódica. Intuitivamente podemos decir que $x = \phi(t)$ es estable cuando toda solución con valores iniciales próximos a los de $x = \phi(t)$ está definida para todo $t > 0$ y permanece próxima a $x = \phi(t)$ cuando $t \to \infty$. Si el sistema de ecuaciones describe la evolución de un proceso natural o un mecanismo, las soluciones estables tienen una importancia especial para el estudio del mismo. La solución $x = \phi(t)$ es asintóticamente estable si es estable y además toda solución con valores iniciales suficientemente próximos tiende a ella cuando $t \to \infty$. En el último caso la solución es un atractor (o un repulsor si este comportamiento ocurre cuando $t \to -\infty$).

En realidad, lo más común es una situación intermedia. En el Ejemplo 6 si los valores propios de la matriz A tienen parte real no nula, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es un atractor si todas las partes reales son negativas, es un repulsor si son negativas, o bien se generaliza el comportamiento del punto silla en el ejemplo 1. Existen dos subespacios vectoriales invariantes bajo el campo vectorial que se intersectan transversalmente en el origen. En el caso general de (1), un teorema debido a Hartman y a Grobman nos asegura que si x_0 es un punto de equilibrio del campo vectorial X y los valores propios de la matriz $DX(x_0)$ tienen parte real no nula, entonces x_0 es un atractor si todas las partes reales son negativas, es un repulsor si son negativas, o bien se generaliza el comportamiento del punto silla en el ejemplo 1. Existen dos variedades invariantes bajo el campo vectorial cuya intersección transversal es el punto de equilibrio. En una de ellas las soluciones tienden asintóticamente al punto de equilibrio cuando $t \to \infty$ y en la otra ocurre lo mismo cuando $t \to -\infty$. Fuera de ellas localmente se tiene un comportamiento combinado como en el caso de la silla. Dichos puntos de equilibrio son llamados hiperbólicos. En el caso de órbitas periódicas se puede definir hiperbolicidad en términos de puntos fijos de la aplicación de Poincaré (ver el final de la Sección 3) y se tiene un resultado análogo de Hartman–Grobman que permite construir subvariedades invariantes que se intersectan transversalmente en la órbita periódica.

3 Sistemas dinámicos a tiempo discreto.

Comencemos motivando con ejemplos simples de iteración de funciones. Si f es una función real de una variable real, la correspondiente ecuación en diferencias o sistema dinámico a tiempo discreto es

$$x_{k+1} = f(x_k), \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{6}$$

Dada una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, una solución consistirá generalmente de una sucesión de puntos $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$ que puede construirse iterando apartir de la ecuación (6).

Ejemplo 7.- Si $f(x) = 0.5x$ y $x_0 = 2$ obtenemos la sucesión de números

$$1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, \cdots$$

Así que a diferencia de los sistemas dinámicos a tiempo continuo tenemos en vez de curva un conjunto discreto de puntos que puede ser finito. El caso finito es equivalente al hecho de que en general las soluciones de una ecuación diferencial dada no tienen porque estar definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 8.- Un caso extremo de esta situación es por ejemplo la función $g(x) = -\sqrt{x}$, que está definida sólo para $x \geq 0$ y toma valores no positivos. Si partimos de un $x_0 > 0$ entonces $x_1 = -\sqrt{x_0} < 0$ y ya no podemos calcular el segundo iterado x_2. Si tomamos la condición inicial $x_0 = 0$, todos los iterados existen y son nulos.

Pero si la función por iterar tiene como dominio a todo $\mathbb{R}$, o si su dominio contiene a su imagen, entonces las órbitas serán sucesiones para cualquier condición inicial. La propiedad equivalente de que todas las soluciones estén definidas en todos los reales no es válida para ecuaciones diferenciales sin imponer condiciones extras sobre la función. De hecho, aquí ni siquiera es necesario que la función f sea continua para que estén definidos sus iterados. Sin embargo, generalmente se supone que f es por lo menos continua para poder hablar de estabilidad de soluciones bajo pequeños cambios en la condición inicial. Si queremos hablar de hiperbolicidad, también requerimos diferenciabilidad por lo menos de clase C^1.

Ejemplo 9.- Para modelar el crecimiento de las poblaciones se acostumbra usar la llamada ecuación logística

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k),$$

generada por la función $f(x) = ax(1 - x)$, definida sólo en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ para que tome siempre valores positivos. En este caso, la condición para que la órbita de cualquier punto sea siempre una sucesión, es que el parámetro a satisfaga $0 \leq a \leq 4$.

En general, si F es una función continua de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, o con dominio un abierto de $\mathbb{R}^n$, podemos definir el sistema dinámico a tiempo discreto

$$x_{k+1} = F(x_k), k = 0, 1, 2, 3, \cdots .$$

Una solución de este sistema queda determinada al fijar una condición inicial x_0 en el dominio de F. Como vimos para funciones de una variable, la función será siempre una sucesión de puntos si el dominio de F es todo $\mathbb{R}^n$. Si denotamos por $F^{(k)}$ a la composición de F consigo mismo k veces, podemos escribir explícitamente cualquier elemento de la órbita en términos de x_0 como sigue.

$$x_k = F^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, 3, \cdots .$$

El equivalente de puntos de equilibrio para los sistemas a tiempo discreto son los puntos fijos x_*, definidos mediante la ecuación

$$x_* = F(x_*),$$

o sea los puntos del dominio que bajo iteraciones generan una sucesión constante. Un ciclo de p puntos distintos

$$x_k = F^{(k)}(x_0), k = 0, 1, \cdots, p-1 \text{ con } F^{(p)}(x_0) = x_0$$

se llama una órbita periódica de periodo p. Se puede definir cuándo un punto fijo o una órbita periódica es estable o asintóticamente estable en forma análoga al caso de sistemas dinámicos a tiempo continuo.

Si la función F es diferenciable, digamos C^∞, tenemos un sistema dinámico diferenciable a tiempo discreto. Si además F es un difeomorfismo, es decir es invertible y su inversa también es diferenciable, podemos definir puntos fijos hiperbólicos y órbitas periódicas hiperbólicas con sus correspondientes subvariedades invariantes. De hecho, los mapeos de Poincaré que se obtienen tomando una sección transversal a una órbita periódica de un sistema dinámico a tiempo continuo tienen la propiedad de ser difeomorfismos.

Ejemplo 10.- En el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales (5) si fijamos el tiempo, digamos $t = 1$, entonces el valor de una solución al tiempo 1 se escribe como

$$\Phi_1(x) = e^A x,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial en $t = 0$. Entonces Φ_1 define un sistema dinámico lineal discreto, por ser una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con matriz e^A.

Si el origen como punto de equilibrio de (5) es hiperbólico, esto significa que los valores propios de A tienen parte real no nula. Los valores propios de e^A son simplemente las exponenciales de los valores propios de A, por lo que no pueden tener módulo igual a 1. Esta consideración motiva la siguiente definición.

En general, una aplicación lineal no singular $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama hiperbólica si ninguno de sus valores propios se encuentra en la circunferencia unitaria. De acuerdo con esta definición, si partimos de un campo vectorial lineal (5) donde el origen es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces la transformación lineal $\Phi_1 = e^A$ es hiperbólica. Una aplicación F no lineal se dice que tiene un punto fijo hiperbólico x_* si $DF(x_*)$ es una aplicación lineal no singular e hiperbólica. Los puntos fijos hiperbólicos son por lo tanto ya sea atractores (correspondiendo a que todos los valores propios se encuentren en el interior de la circunferencia unitaria), repulsores (correspondiendo a que todos los valores propios se encuentren en el exterior de la circunferencia unitaria), o de tipo silla (cuando algunos están el interior y otros en el exterior). Esto es una consecuencia del teorema de Hartman–Grobman para difeomorfismos. Si un mapeo de Poincaré de una órbita periódica de un campo vectorial es hiperbólico, todos los mapeos de Poincaré de la órbita son difeomorfos y como consecuencia obtenemos subvariedades invariantes para la órbita periódica como mencionamos en la sección anterior.

4 Los sistemas dinámicos en México.

Podemos decir que el origen de los sistemas dinámicos en México se remonta a 1945, año en que el distinguido matemático Solomon Lefschetz de la Universidad de Princeton, E.E.U.U. comenzó sus estancias frecuentes en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Dichas estancias se prolongaron hasta mediados de la década de los sesentas. En esa época Lefschetz trabajaba ya en ecuaciones diferenciales ordinarias, principalmente problemas de estabilidad y teoría del control. En los últimos años dirigía un seminario para alumnos que tuvo mucha influencia.

Alrededor de 1970 se sintió también en la influencia de tres matemáticos en E.E.U.U. que formaron alumnos en sistemas dinámicos que al terminar sus tesis doctorales regresaron a México. Estos fueron Jack Hale de la Universidad de Brown, Mauricio Peixoto de la misma universidad y del Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Brasil) y por último Stephen Smale de la Universidad de California, Berkeley.

Fue hasta 1985 aproximadamente que hubo la masa crítica para comenzar a consolidar varios grupos de investigación en sistemas dinámicos a partir de investigadores aislados. Dichos grupos trabajan principalmente en uno o varios de los siguientes aspectos de los sistemas dinámicos.

1) Sistemas dinámicos Hamiltonianos o conservativos.– Esto incluye problemas de mecánica celeste y en general de mecánica clásica o generalizaciones de los mismos, donde el campo vectorial se define en un espacio de dimensión par a través de una función Hamiltoniana H que generaliza la noción de energía en los sistemas mecánicos clásicos. Entonces H se mantiene constante a lo largo de las soluciones del sistema, así que los conjuntos no vacíos $\{H = h\}$ donde $h \in R$, son subvariedades invariantes en donde hay que estudiar cualitativamente el campo vectorial.

2) Teoría de foliaciones.– Las foliaciones de dimensión uno son una generalización del concepto de campo vectorial, en donde las curvas solución del campo vectorial se consideran sin ninguna orientación ni parametrización. En vez de asignar un vector en cada punto de nuestro espacio, le asignamos una recta o dirección que pasa por dicho punto. Una solución o curva integral de la foliación será la imagen de una curva (un subconjunto de dimension 1) cuyo vector velocidad en cada punto sea tangente a la dirección de la foliación en dicho punto. Si la dimensión del espacio es suficientemente grande, podemos tener también foliaciones de dimensión más alta, si cada punto tiene asignado un subespacio de dimension fija que puede ser 2, 3 o aún mayor. En este caso hay que agregar condiciones de integrabilidad de la foliación para asegurar la existencia de soluciones, que serán objetos con la misma dimensión que la foliación.

3) Dinámica discreta.– Iteración de funciones reales, principalmente funciones de los reales en los reales, de la circunferencia en sí misma o del plano en sí mismo en el caso real. También la llamada dinámica holomorfa, que se refiere a la iteración de funciones holomorfas $w = f(z)$, cuya descripción da lugar por ejemplo a conjuntos fractales en el plano.

4) Campos vectoriales holomorfos.– Esta es un generalización de los campos vectoriales a tiempo continuo, donde el campo vectorial es holomorfo, es decir una función holomorfa $X : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ y las soluciones $x = \phi(t)$ son funciones holomorfas de un tiempo complejo $t \in \mathbb{C}$. La imagen de las soluciones son objetos de dimensión real 2 en

$\mathbb{C}^n$, generalmente superficies de Riemann. Aquí se usan frecuentemente resultados de la geometría algebraica.

5) Otros modelos relacionados.- También se estudian modelos de sistemas dinámicos para epidemiología, para Biología, así como para el estudio de sociedades animales (hormigas, abejas, etc.). En el último caso se emplean solamente modelos discretos. En general se trata de familias de sistemas dinámicos, por aparecer uno o varios parámetros que se pueden variar.

Referencias

[1] A. A. Andronov, L. Pontriagin, *Systèmes grossiers*, Dokl. Akad. Nauk USSR Math. **14**, 247–251.

[2] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 1927.

[3] M. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.

[4] A. Liapunov, *Problème Général de la stabilité du mouvement*, vol. 9 Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 1907.

[5] J. Moser, *Stable and Random Dynamical Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1973.

[6] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mecanique célèste*, Gauthier–Villars, Paris, 1892.

[7] S. Smale, *Differentiable Dynamical Systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 747–817.