Miscelnea Matemtica **43** (2006) 53–73 SMM

Sobre el surgimiento del concepto de Valor Propio: una historia selecta sobre los orígenes de la Teoría Espectral

Carmen Martínez A.*

Depto. de Matemáticas

Fac. de Ciencias

U.N.A.M.

cmai@lya.fciencias.unam.mx

Abstract

La idea de espectro de un operador en la matemática contemporánea surge de diversos intentos de comprender problemas concretos de álgebra lineal que involucran la solución de ecuaciones lineales y sus generalizaciones a dimensiones infinitas. Sin embargo esta visión es el resultado de la evolución matemática de una serie de ideas a lo largo de casi trescientos años. El objetivo de este artículo es el presentar una historia selecta de este desarrollo desde el punto de vista de la matématica misma.

1 Introducción.

La teoría espectral es una rama fundamental de las matemáticas que ha tenido un fuerte impacto sobre el análisis matemático y, en particular, sobre el análisis funcional. Su desarrollo histórico se vincula con el desarrollo de la física y en sus orígenes se relaciona tanto con el estudio de sistemas discretos como con el de sistemas continuos.

*Investigación realizada en el marco del proyecto ECOS M04-H01 "El Desarrollo del análisis, 1736-1905: la reorganización del análisis real, la aparición de análisis complejo, el nacimiento de la mecánica analítica."

El problema de la determinación algebraica de valores propios surgió en el Siglo XVIII a partir del estudio de sistemas mécanicos discretos. Su aparición, sin embargo, no resulta sorprendente ya que el estudio de formas cuadráticas existía desde la segunda mitad del Siglo XVII; Leibniz había mostrado un gran interés en el estudio de sistemas de ecuaciones y sistemas de formas cuadráticas y estos temas son los que eventualmente darían lugar a una teoría de matrices. Desde mediados del Siglo XVIII, el surgimiento de esta teoría era ya claro, especialmente en los trabajos de D'Alembert y Lagrange dedicados a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias vinculadas al conocido problema de la cuerda vibrante.[1] Sin embargo, los métodos matemáticos relacionados con estos problemas permanecieron subordinados al aspecto mecánico de éstos durante algún tiempo. Fue hacia la segunda mitad del Siglo XVIII, que tanto Lagrange como Laplace se vieron obligados −siempre motivados por la teoría física− a profundizar en el estudio matemático de los valores propios. Estos trabajos tuvieron una gran influencia sobre el trabajo de Cauchy, como haremos ver en la Sección 4, y por lo tanto sobre el rumbo que tomó la teoría espectral.

A principios del Siglo XIX la teoría espectral estaba dividida en dos grandes vertientes, la primera de ellas estaba dedicada a la clasificación de matrices (simétricas, ortogonales, unitarias, etc.) y al estudio de la forma de los valores propios de los diferentes tipos de matrices, mientras que la segunda se centraba, tanto sobre el concepto de valor propio relacionado con el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales, como sobre las propiedades de sus soluciones cuando éstas no son obtenibles analíticamente. Esta segunda vertiente desembocó también en el estudio del comportamiento cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales y la expansión de funciones en términos de funciones propias o eigenfunciones.

Nuestra intención aquí es la de estudiar y comprender ambas vertientes tomando a Cauchy como representante de la primera y a Sturm como representante de la segunda. Creemos que es al trazar este hilo conductor, que nos lleva desde el trabajo hecho por D'Alembert hasta el trabajo hecho un siglo después por Sturm, que se puede comprender la historia del surgimiento de la teoría espectral, entre los años 1826 y 1876, como teoría matemática, es decir, como una teoría congruente

[1]Cf. [4, 5, 11]. Remitimos también al lector interesado en un tratamiento matemático de este problema (y de los que se tratarán en las secciones subsecuentes) a [16], aunque ciertamente esta referencia no es exhaustiva. La mayoría de los temas y problemas que presentaremos en este artículo se pueden consultar fácilmente tanto en libros de Análisis como de Ecuaciones Diferenciales.

que se ha dado un objeto de estudio propio.

2 D'Alembert y el problema de la cuerda vibrante.

El problema de la cuerda vibrante, como ya mencionamos, atrajo gran atención en el Siglo XVIII y mucho del desarrollo del análisis durante esa época se debe a él. En 1743 D'Alembert, en su *Tratado de Dinámica*,[2] se plantea el problema de encontrar las oscilaciones de una cuerda que se encuentra fijada a partir de uno de sus extremos −de manera que cuelga verticalmente− y que está cargada con dos masas.[3] El método seguido por D'Alembert lo lleva a considerar, para los casos $n = 2$ y $n = 3$, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik} y_k = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

donde $y_i = y_i(t)$ representa el desplazamiento horizontal de cada masa a partir de la posición vertical de reposo.[4] Para resolver este sistema, D'Alembert multiplica cada una de las ecuaciones por una constante v_i (con $v_1 = 1$) y considera la suma de las mismas para obtener así

$$\sum_{i}^{n} v_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum_{ik} v_i A_{ik} y_k = 0.$$

Luego, si las constantes v_i se escogen de tal manera que $\sum_{i=1}^{n} v_i A_{ik} + \lambda v_k = 0$ para $k = 1, 2 \ldots, n$, la sustitución $u = \sum_{i}^{n} v_i y_i$ reduce el problema original a una ecuación de la forma

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda u = 0. \tag{2}$$

D'Alembert no desarrolló esta idea plenamente en su *Tratado*, es decir, no propuso a partir de esta idea, un método de integración para las ecuaciones que se había planteado pues aparentemente desconocía la

[2]Cf. [4, Art. 98].

[3]Daniel Bernoulli había explorado ya este problema pero había considerado que el movimiento del sistema era demasiado irregular para ser tratado con métodos analíticos (cf. [19]). D'Alembert parece haber sido el primero en considerar la resolución de este problema por medio de ecuaciones diferenciales.

[4]Esta notación no corresponde a la utilizada por D'Alembert pero facilita tanto la exposición del problema como el análisis que de él queremos hacer aquí.

solución general de (2), aunque cabe señalar que en 1747 presentaría una memoria en la que se expone este método de integración.

El tema que nos interesa aquí es precisamente el que surge a partir de la forma misma de la ecuación (2), pues en términos modernos es claro que λ es un valor propio del operador definido por $\frac{d^2}{dt^2}$. Dicho esto, vale la pena aclarar que estos conceptos no existen como tales en D'Alembert, quien únicamente ve un método para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales y no reconce en él a un objeto matemático que pudiera tener interés por sí mismo.

En 1747 D'Alembert resuelve el problema de la cuerda vibrante homogénea en su memoria intitulada *Recherches sur la courbe que forme une corde tenuë mise en vibration*,[5] y en una carta enviada a Lagrange entre 1768 y 69,[6] poco después de que Euler publicara sus investigaciones sobre el problema no homogéneo, D'Alembert ataca este nuevo problema con un método que es sorprendentemente moderno en más de un sentido, como veremos a continuación.

D'Alembert plantea la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{3}$$

que está dada en términos de la amplitud transversal $y(x,t)$, para la cual se satisfacen las condiciones de frontera $y = 0$ si $x = 0$ y $y = 0$ si $x = a$, y donde X, que es función de x, es la distribución de masa a lo largo de la cuerda. D'Alembert busca soluciones de la forma $y = \zeta(x)\cos\lambda t$ y por lo tanto (3) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -X\lambda^2\zeta. \tag{4}$$

Después de esta separación de variables, al hacer $\zeta = e^{\int p dx}$, D'Alembert obtiene la ecuación

$$dx = -\frac{dp}{p^2 + X\lambda^2} \tag{5}$$

que es una ecuación de Ricatti y como el problema consta de dos condiciones en la frontera, D'Alembert se ve enfrentado a la siguiente cuestión:

> [...] la integración de esta ecuación se puede encontrar por los métodos conocidos; pero se necesita que el valor de ζ

[5]Cf. [5].
[6]Cf. [8].

> cumpla las dos condiciones de ser $= 0$ cuando $x = 0$ & $x = [a]$; y es necesario asegurar que, estando dado el valor de X, siempre sea posible satisfacer esta doble condición; me parece que este es un punto que aún nadie ha examinado en general.[7]

Es este enfoque el que da a la carta de D'Alembert su aspecto moderno, el cuestionar la existencia de soluciones cuando están dadas condiciones fijas de frontera. Es este tipo de análisis el que permite romper con la idea de un análisis matemático sujeto a disposición de la mecánica, y comenzar a llevar a esta teoría hacia el futuro.

Para mostrar que en efecto existe tal valor −digamos λ− que cumple con las condiciones dadas, D'Alembert considera las vibraciones de una cuerda de grosor constante m, donde m es el mínimo valor de $X(x)$. Se debe satisfacer entonces la ecuación $dx_1 = -\frac{dp_1}{p_1^2+m\lambda^2}$ correspondiente a (5), y el argumento de D'Alembert es el siguiente: si $\zeta_1 = e^{\int p_1 dx_1}$ es cero cuando $x_1 = 0$, entonces p_1 debe tener asíntotas verticales en 0 y en otro punto, digamos b_1, tal que $\zeta_1(b_1) = 0$. Si $\zeta(0) = 0$, entonces de la ecuación anterior y de (5) se sigue que en los puntos en los que $p = p_1$ se debe cumplir que $x < x_1$. Por lo tanto, p debe tener una asíntota vertical en un punto $b \leq b_1$ tal que $\zeta(b) = 0$.

A partir de esto, D'Alembert concluye que se debe poder escoger λ de tal manera que $b = a$ y así satisfacer las dos condiciones de frontera. D'Alembert no escribe ninguna justificación para esta afirmación, pero podemos imaginar que el argumento que tenía en mente es el siguiente: si λ tiende a infinito, entonces b_1 tiende a cero (y vice versa) y por tanto $b \to \infty$ si $\lambda \to 0$ y $b \to 0$ si $\lambda \to \infty$. De hecho, si tomamos el argumento de D'Alembert como aparece en su carta, es decir, partiendo del hecho de que $b \leq b_1$, entonces sólo se tiene la implicación $(b_1 \to 0 \text{ si } \lambda \to \infty) \Longrightarrow (b \to 0 \text{ si } \lambda \to \infty)$. Para obtener el otro sentido habría que considerar una cuerda de grosor uniforme M, con $M = \max_x\{X(x)\}$.

El argumento de D'Alembert lo lleva a mostrar la existencia de un valor propio λ, de la ecuación (3), con las condiciones de frontera dadas. De hecho, en términos modernos, como supone que ζ es positivo

[7]Cf. [8, p. 242]. "[...]l'intégration peut se trouver par les méthodes connues; mais il faut que la valeur de ζ ait les deux conditions d'être $= 0$ lorsque $x = 0$ & $x = [a]$; & il est nécessaire de s'assurer s'il est toujours possible de satisfaire à cette double condition, la valeur de X étant donnée; c'est un point que personne, ce me semble, n'a encore examiné en général."

sólo puede determinar el primer valor propio.[8] No obstante, este hecho no constituye una limitación de la carta de D'Alembert sino todo lo contrario, podemos considerar este trabajo de D'Alembert como un notable antecedente de la teoría que años más tarde desarrollarían Sturm y Liouville. D'Alembert no sólo enfrenta de manera directa el problema de la existencia de los valores propios de una ecuación, sino que su método de demostración por medio de la comparación con ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes parece también un antecedente inmediato de la teoría de Sturm-Liouville.

Sin embargo, como habíamos mencionado en la introducción, nuestra intención aquí no es la de hacer un recuento exhaustivo de todos los problemas mécanicos que condujeron a la determinación de valores propios, sino el de hacer una historia selecta a partir de la cual podamos esbozar el nacimiento de la teoría espectral como teoría matemática.

3 Lagrange y la resolución de sistemas de ecuaciones.

En el parágrafo 30 de su *Memoria sobre la Solución de Diferentes Problemas de Cálculo Integral*[9] Lagrange propone un método general para determinar el movimiento de un sistema cualquiera de cuerpos que actuan entre sí, si se supone que estos cuerpos tienen únicamente oscilaciones infinitamente pequeñas alrededor de sus puntos de equilibrio.[10] Lagrange propone el siguiente camino.

Sea n el número de cuerpos en el sistema y sean $y_1, y_2, y_3, \ldots$ los espacios infinitamente pequeños que estos cuerpos describen al oscilar en el tiempo t. Si se desprecian las cantidades infinitamente pequeñas de orden mayor o igual que 2 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik} y_k = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

donde A_{ik} son constantes dadas por la naturaleza del problema.[11]

[8]Notamos que para D'Alembert éste no hubiera sido el caso ya que él creía que $log(x) = log(-x)$. Las ideas tras esta posible igualdad son de gran interés pero lamentablemente caen fuera del ámbito de este texto, sin embargo podemos remitir al lector interesado a [8, p.250] y a [7].

[9]Cf. [11, p. 520].

[10][Ibid] "Méthode général pour déterminer le mouvement d'un système quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre."

[11]Al igual que en la sección precedente creemos que un cambio en la notación

Ahora, para integrar estas ecuaciónes Lagrange multiplicará la primera por $\lambda_1 e^{\rho t} dt$, la segunda por $\lambda_2 e^{\rho t} dt$ y así sucesivamente en donde $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots$ y ρ son constantes indeterminadas. Enseguida se sumarán estas ecuaciones y se tomará la integral haciendo desaparecer dentro del signo de la misma a las derivadas de las variables $y_1, y_2, y_3, \dots$ al hacer los coeficientes de las cantidades $\int y_1 e^{\rho t} dt, \dots$ iguales a cero; de este modo se obtendrá la siguiente ecuación

$$\lambda_1 e^{\rho t} \frac{dy_1}{dt} - \lambda_1 \rho y_1 e^{\rho t} + \cdots + \lambda_n e^{\rho t} \frac{dy_n}{dt} - \lambda_n \rho y_n e^{\rho t} + \cdots = cte \tag{7}$$

así como las ecuaciones

$$\rho^2 \lambda_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} \lambda_k \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{8}$$

que servirán para determinar las cantidades $\rho, \lambda_1, \lambda_2, \dots$.

Es decir, en términos modernos ρ^2 es un valor propio de la matriz A_{ki}. Sin embargo, para la resolución de este sistema, Lagrange no habla de determinantes sino de eliminación y la eliminación de las λ en el sistema lo lleva a una ecuación de orden n en ρ^2.

La eliminación se lleva a cabo al susituir en una de las ecuaciones, los valores de $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \dots,$ que están en función de ρ^2, encontrados a partir de las otras $n-1$ ecuaciones. Por ejemplo, en el caso particular en que $n = 2$ el sistema estará compuesto por

$$\begin{aligned} \rho^2 \lambda_1 - A_{11}\lambda_1 - A_{21}\lambda_2 &= 0 \\ \rho^2 \lambda_2 - A_{12}\lambda_1 - A_{22}\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto de la primera ecuación se tendrá que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\rho^2 - A_{11}}{A_{21}}$ y al susituir este valor en la segunda se obtendrá

$$\rho^4 - (A_{11} + A_{22})\rho^2 - A_{12}A_{21} + A_{11}A_{22} = 0. \tag{9}$$

A partir del sistema obtenido en el caso general, y mediante un análisis puramente algebraico, Lagrange llega al sistema

$$\rho^2 \nu^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \nu^{(k)} \qquad 1 \leq i \leq n \tag{10}$$

---

utilizada por Lagrange facilita la exposición de este problema y por lo tanto hemos escrito el sistema de ecuaciones presentado por Lagrange de esta manera. Observamos también que este cambio de notación nos permite ver que el sistema introducido aquí es el mismo que D'Alembert presenta en (1).

donde notamos que la matriz A_{ik}, que aparece en este sistema, es la matriz transpuesta de la que aparece en el sistema dado por (8). Sobre este punto Lagrange dice que es necesario observar que al eliminar las cantidades $\nu_1, \nu_2, \ldots$ de (10) se tendrá una ecuación final en ρ^2 que será necesariamente la misma que la que resulta de las ecuaciones anteriores [dadas en (8)].[12] Por tanto la resolución del problema original dado por (6) no depende sino de la resolución de los sistemas (8) y (10).

Es decir, Lagrange ha reducido la resolución del problema original a la consideración de dos sistemas de la forma

$$\begin{aligned} AX &= \rho^2 X \\ A^T Y &= \rho^2 Y, \end{aligned} \tag{11}$$

utilizando el hecho de que ambos sistemas tienen los mismos valores propios y demostrando además que los vectores propios son ortogonales[13] entre sí.

Este camino tomado por Lagrange nos parece brillante y reconocemos en él el método actual para la resolución de sistemas como (6). Observamos también que ésta no es la única riqueza que nos proporciona la memoria de Lagrange. Lagrange a lo largo de su memoria se ve obligado a estudiar lo que hoy podríamos llamar la forma de los valores propios, análisis sin el cual no puede presentar su solución. Sin embargo a lo largo de este análisis observamos un aspecto que ya habíamos mencionado en nuestra introducción, a saber, que el objetivo principal de la memoria de Lagrange es mecánico y no puramente matemático.

Lagrange necesita demostrar que la solución que propone para el problema es estable, pero su interés no es el de concluir esta estabilidad a partir de un razonamiento únicamente matemático, sobre todo porque la propiedad de estabilidad en este caso se puede inferir de la naturaleza propia del problema físico. A pesar de esto, el avance proporcionado por Lagrange a esta teoría es casi imposible de cuantificar, avance que fue producto tanto de sus propios textos como de la influencia que

[12] Cf. [11, p. 525]. "Et il est bon de remarquer qu'en éliminant de ces équations les quantités $\nu \ldots$ on aura une équation finale en ρ^2 qui sera nécessairement la même que celle qui résulte des équations [antérieures]; ce qui peut se voir aisément à priori."

[13] Lagrange demuestra que si U y V corresponden a raíces distintas, entonces $\sum_i u_i v_i = 0$. Pero cabe mencionar que en el texto de Lagrange no existe ninguna noción geométrica asociada a este hecho, a diferiencia de lo que ocurre en términos modernos cuando se habla de ortogonalidad en espacios de Hilbert. Cabe mencionar que esta útlima interpretación es muy posterior a Lagrange y data de principios del Siglo XX.

éstos tuvieron. Una muestra clara de esta influencia se puede ver en los trabajos de Cauchy,[14] a quien está dedicada la siguiente sección.

4 Cauchy y un resultado central de la Teoría de Matrices.

Las contribuciones hechas por Augustin Louis Cauchy a la Teoría Espectral son numerosas y muy valiosas y merecerían un estudio propio. Sus trabajos sobre el tema abarcan un periodo de más de 15 años y destacan entre sus textos la *Memoria sobre las funciones que sólo pueden obtener dos valores iguales y de signos contrarios por medio de transposiciones*, que es una memoria sobre la teoría de determinantes publicada en 1815 en la cual se establecen los fundamentos conceptuales de dicha teoría y sobre la cual se ha dicho que fue tan completa y avanzada que poco fue lo que la teoría de determinantes tuvo que evolucionar durante el resto del Siglo XIX.[15] También habría que señalar que en las *Lecciones sobre las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la geometría*, publicadas en 1826, el problema de la determinación de valores propios y la ecuación característica asociada juegan un papel central.[16] Finalmente nos interesa mencionar la memoria *Sobre la ecuación con la ayuda de la cual se determinan las desigualdades seculares del movimiento de los planetas* publicada en 1829 y en la que se demuestra por primera vez que los valores propios de una matriz simétrica son reales.

Nosotros aquí nos limitaremos a comentar esta última memoria pues la consideramos una pieza clave en el desarrollo de la teoría espectral. El título de la misma, como veremos más adelante, no refleja el interés central de Cauchy; interés que se localiza en la generalización de algunas ideas expuestas por Lagrange en su *Mecánica Analítica*.

En la Sección 6 de la Segunda Parte de la *Mecánica Analítica*, Lagrange aborda el problema del movimiento rotatorio de los cuerpos. Lagrange deduce, a partir de principios generales, un sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento rotatorio de un cuerpo y observa que se pueden integrar mediante un cambio de variables lineal. Es decir, si las coordenadas de un punto en el sistema están dadas

[14] Th. Hawkins ha mostrado detalladamente en [9] el vínculo que existe entre el trabajo de Lagrange y el de Cauchy.

[15] Cf. [15, p. 130].

[16] Cf. [1, 2].

por p, q, r entonces el cambio de variables dado por

$$\begin{aligned} p &= p_1x + p_2y + p_3z \\ q &= q_1x + q_2y + q_3z \\ r &= r_1x + r_2y + r_3z, \end{aligned} \tag{12}$$

donde p_i, q_i, r_i (para $i = 1, 2, 3$) representan valores particulares de p, q, r, es el cambio deseado y es tal que transforma a la función cuadrática

$$Q = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) - Fqr - Gpr - Hpq \tag{13}$$

en

$$Q = \frac{1}{2}\left(\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2\right) \tag{14}$$

de tal manera que $p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Lagrange demuestra también que esta transformación lineal es lo que hoy llamaríamos una transformación ortogonal.

Para demostrar la existencia de esta transformación, Lagrange considera el problema de la determinación algebraica de valores propios dado por

$$AX = \lambda X \tag{15}$$

donde A es la matriz de coeficientes determinados por la función cuadrática Q. Muestra que los valores propios del problema son precisamente α, β, γ y que por lo tanto la posibilidad de escribir a Q como en (14) depende de que estos valores propios sean reales. Para mostrar esto Lagrange no se basa en las propiedades físicas del problema sino que recurre a una deducción puramente algebraica.

La exposición langrangiana de este problema facilitó su generalización al permitir el planteamiento de la siguiente pregunta: dada una forma cuadrática Q en n variables ¿Existe una transformación ortogonal que permita expresar a Q como combinación lineal de cuadrados? Resulta claro, a partir del texto mismo, que éste era precisamente el interés de Cauchy al escribir la memoria del 29 y que este interés había surgido justamente al leer el trabajo hecho por Lagrange.

Con base en la teoría de determinantes que había desarrollado en 1815, Cauchy demuestra dos grandes teoremas en esta memoria,[17] teoremas que de hecho constituyen el núcleo de la misma, y que dan respuesta a la pregunta general que acabamos de plantear:

[17]Cf. [3, p. 187 & 194].

Teorema 1. *Dadas n variables $x, y, z\ldots$ y el arreglo*[18]

$$\begin{cases} A_{xx}-s, & A_{xy}, & A_{xz}, & \ldots, \\ A_{xy}, & A_{yy}-s, & A_{yz}, & \ldots, \\ A_{xz}, & A_{yz}, & A_{zz}-s, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{cases} \tag{16}$$

entonces todas las raíces de la función S son reales en donde S es una función obtenida a partir de las cantidades que aparecen en el arreglo anterior, a saber, aquella cuyos distintos términos son representados, excepto por su signo, a través de los productos que se obtienen al multiplicar estas cantidades n a n de todas las maneras posibles, teniendo cuidado de incluir en cada producto un factor tomado en cada una de las líneas horizontales del arreglo y uno tomado en cada una de las líneas verticales.[19]

Teorema 2. *Dada una función homogénea, de segundo grado y de varias variables $x, y, z\ldots$ siempre existen otras variables $\xi, \eta, \zeta\ldots$ relacionadas con $x, y, z\ldots$ mediante ecuaciones lineales tales que la suma de los cuadrados de $x, y, z\ldots$ es equivalente a la suma de los cuadrados de $\xi, \eta, \zeta\ldots$ y que la función dada de $x, y, z\ldots$ es transformada en una función homogénea, de segundo grado y de las variables $\xi, \eta, \zeta\ldots$ de tal manera que en ella sólo aparecen los cuadrados de $\xi, \eta, \zeta\ldots$.*

Tanto Lagrange como Laplace se habían enfrentado a serios problemas al tratar de demostrar el Teorema 1, es decir, al tratar de establecer que las raíces de la ecuación característica de grado n eran reales. Cabe destacar que, para Cauchy, el caso general de n variables no presentaba un problema más difícil que el de un caso concreto de 3 o 4 variables, puesto que contaba ya con el uso de determinantes.

No cabe duda que para Cauchy, desde el surgimiento de su interés por este problema, éste constituía un claro ejemplo de un problema que debía tratarse mediante su teoría de determinantes ya que reconocía

[18] *Tableau* en francés.

[19] Al operar de esta manera se tendrá por ejemplo

$$S = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s) - A_{xy}^2 \quad \text{y}$$

$$S = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)(A_{zz}-s) - A_{yz}^2(A_{xx}-s) - A_{xz}^2(A_{yy}-s) - A_{xy}^2(A_{zz}-s) + \\ +2A_{xy}A_{xz}A_{yz}$$

para $n = 2$ y $n = 3$ respectivamente. Es decir, en términos modernos, S es el determinante de la matriz dada por (16).

al polinomio característico precisamente como un determinante. Nos parece por tanto probable que la generalidad de su teoría de determinantes junto con su concocimiento del trabajo de Lagrange hayan sido los principales motores de su interés por escribir la memoria que hemos mencionado. Sin embargo este razonamiento inevitablemente nos conduce a la pregunta de cómo es entonces que Cauchy llegó al título de su memoria.

En 1826, cuando Cauchy presenta sus resultados ante la Academia de París, no hace ninguna referencia a la teoría de perturbaciones seculares y nos parece por tanto poco probable que Cauchy hubiera ya conocido la relevancia que sus resultados poseían para tal teoría. El trabajo que Cauchy presenta en 1828 carece tambíen de toda referencia astronómica. Sin embargo, es claro que en 1829 al escribir la memoria que analizamos aquí, Cauchy conocía ya el vínculo entre su trabajo y la astronomía y en el último párrafo de su memoria Cauchy parece revelar la fuente de su conocimiento:

> Observo al concluir este artículo que cuando yo no tenía sino una parte del escrito, el Sr. Sturm me dijo que él había podido demostrar los Teoremas 1 y 2 de una manera muy sencilla. El se propone publicar inmediatamente una Memoria que ha escrito sobre este tema, Memoria que fue presentada ante la Academia de las Ciencias el mismo día que el presente artículo.[20]

Este encuentro entre Cauchy y Charles Sturm ocurrió en julio de 1829 y creemos que fue aquí en donde Cauchy adquirió conocimiento de la relevancia que tenían sus teoremas para la teoría de perturbaciones seculares y seguramente ahí nació la idea del título de su memoria. Nos parece importante señalar que la motivación detrás de los trabajos de Cauchy y Sturm era completamente distinta, así como lo eran también los métodos de demostración. Hemos señalado que las demostraciones de Cauchy descansan sobre su teoría de determinantes, mientras que en las de Sturm su interés por las ecuaciones diferenciales es evidente. Es a este interés al que dedicamos la siguiente sección.

[20]Cf. [3, p. 195]. "J'observerai, en terminant cet article, que, au moment où je n'en avais encore écrit qu'une partie, M. Sturm m'a dit être parvenu à démontrer fort simplement les théorèmes 1 et 2. Il se propose de publier incessamment le Mémoire qu'il a composé à ce sujet, et qui a été offert à l'Academie des Sciences le même jour que le présent article."

5 Sturm y la Teoría de Sturm-Liouville.

En una serie de artículos publicados entre 1836 y 1837 Charles Sturm y Joseph Liouville crearon una rama completamente nueva dentro del análisis matemático. Esta teoría, que hoy lleva el nombre de sus creadores, tiene como objeto de estudio a la ecuación diferencial lineal de segundo orden dada por

$$(k(x)\, V'(x))' + (g(x)\, r - l(x))\, V(x) = 0 \tag{17}$$

con condiciones de frontera dadas por

$$\begin{aligned} k(a)\, V'(a) - hV(a) &= 0 && (18)\\ k(b)\, V'(b) + HV(b) &= 0 && (19) \end{aligned}$$

en donde k, g y l son funciones dadas, h, H son constantes positivas también dadas y r es un parámetro.[21]

Los problemas estudiados por Sturm y Liouville pueden ser divididos en tres tipos: 1) Las propiedades de los valores propios, 2) El comportamiento cualitativo de las funciones propias (o eigenfunciones) y 3) La expansión de funciones arbitrarias en términos de estas funciones propias.

De estas tres cuestiones, Sturm estudió las primeras dos y Liouville la tercera. Nosotros dedicaremos esta sección a dos memorias escritas por Sturm en 1836 referentes a esta investigación.

Hasta aproximadamente 1820, el único problema planteado en la teoría de ecuaciones diferenciales había sido el siguiente: dada una ecuación diferencial, encontrar su solución como expresión analítica. La ecuación (17) produce un cambio en esta teoría ya que, en general, no se logra encontrar una expresión analítica que la resuelva y por lo tanto, tanto Sturm como Liouville, proponen investigar las propiedades de la solución que pueden ser obtenidas directamente de la ecuación. Esto muestra una nueva concepción de la teoría de ecuaciones diferenciales caracterizada por una pregunta de naturaleza más general: dada una ecuación diferencial, investigar alguna propiedad de su solución.

[21]La notación contemporánea utilizada aquí nos parece la más apropiada para introducir la ecuación que será el tema central de esta sección puesto que permite presentar de manera clara y concisa los problemas analizados por Sturm y Liouville. Cabe mencionar que la notación utilizada por Sturm es la que presentaremos en la ecuación (20) y que el estudio puntual que realizaremos sobre el trabajo de Sturm partirá de esta ecuación. Nos parece importante señalar también que la ecuación (20) es de la misma forma que las ecuaciones que componen los sistemas analizados por D'Alembert y Lagrange y a los cuales dedicamos las Secciones 2 y 3.

En la primera de las dos memorias de Sturm que analizaremos aquí, *Memoria sobre las Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden*,[22] Sturm comienza por delinear sus objetivos y en ellos podemos reconocer los orígenes de esta nueva rama del análisis que hemos mencionado. Cabe señalar que el propio Sturm sabe que el método que propondrá es nuevo y dado esto surge la interesante pregunta de si él mismo tendría idea de la fuerza, brillantez y belleza de sus ideas así como de la trascendencia que éstas tendrían.

> La resolución de la mayoría de los problemas relativos a la distribución del calor y a pequeños movimientos oscilatorios [...] conducen a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden en términos de una función desconocida de una variable independiente y sus primera y segunda derivadas multiplicadas por funciones dadas de la variable. No sabemos integrar estas ecuaciones sino en un muy pequeño número de casos [...] y aún cuando se tiene la expresión de la función que satisface la ecuación es muy difícil reconocer en esta expresión las propiedades características de la función [...] Se puede alcanzar este objetivo mediante la sola consideración de las ecuaciones diferenciales en ellas mismas, sin necesidad de integrarlas. Tal es el objetivo de la presente Memoria. [...] El principio sobre el cual descansan los teoremas que yo he desarrollado no han sido nunca, si no me equivoco, utilizados en el análisis [...][23]

Sturm considera la ecuación

$$L\frac{d^2V}{dx^2} + M\frac{dV}{dx} + NV = 0 \tag{20}$$

donde V es una función de x que satisface esta ecuación para valores en un intervalo y L, M y N son funciones de x definidas en el mismo

[22] Cf. [17].

[23] Cf. [17, p. 106]. "La résolution de la plupart des problèmes relatifs à la distribution de la chaleur [...] et aux petits mouvements oscillatoires [...] conduit à des équations différentielles linéaires du second ordre qui renferment une fonction inconnue d'une variable indépendante et ses différentielles première et seconde multipliées par des fonctions données de la variable. On ne sait les intégrer que dans un très petit nombre de cas particuliers [...]; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation [...] il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. [...] On peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration. Tel est l'objet du présent Mémoire. [...] Le principe sur lequel reposent les théorèmes que je développe, n'a jamais, si je ne me trompe, été employé dans l'analyse [...]"

intervalo y la lleva a la forma

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=K\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx}+GV=0 \tag{21}$$

donde $K=e^{\int\frac{M}{L}dx}$ y $G=\frac{N}{L}e^{\int\frac{M}{L}dx}$.

Sturm muestra que la función V depende implícitamente de las funciones G y K y de valores arbitrarios A y B de V y $\frac{dV}{dx}$ para un valor particular de x y se propone examinar el cambio que sufre V si se alteran, en cantidades infinitamente pequeñas, las funciones G y K y las constantes A y B para cada valor de x. Una vez dicho esto, Sturm toma el siguiente paso magistral sobre el cual se fundamenta la grandeza de su obra:

> Para fijar ideas y abreviar el discurso consideraremos a las cantidades G, K, A, B como funciones de un parámetro indeterminado e independiente de x que denotaremos por m [...] Para expresar que las funciones G, K varían no solamente con x [...] las denotaremos por $G(x,m)$ y $K(x,m)$.[24]

De esta manera (21) se transforma en

$$K(x,m)\frac{d^2V_m(x)}{dx^2}+\frac{dK(x,m)}{dx}\frac{dV_m(x)}{dx}+G(x,m)V_m(x)=0. \tag{22}$$

Aquí cabe mencionar que Sturm sólo considera para esta ecuación una condición de frontera:

$$K(x,m)\frac{dV_m}{dx}-h(m)V_m(x)=0 \qquad \text{para } x=\alpha \tag{23}$$

donde incluso permite que la “constante” h varíe con m, y será hasta su segunda memoria donde considerará el problema con dos condiciones frontrera.

Sturm utiliza el hecho de que la integral de esta ecuación contiene dos constantes arbitrarias a partir de las cuales se pueden obtener los valores de V y $\frac{dV}{dx}$ correspondientes a un valor particular de x. Una vez fijos estos valores, la función V se encuentra enteramente definida por la ecuación diferencial y tiene un valor determinado y único para

[24] Cf. [17, p. 110]. “Pour fixer les idées et pour abréger le discours, nous regarderons les quantités G, K, A, B comme fonctions d'un paramètre indéterminé et indépendant de x que nous designerons par m [...] Pour exprimer que ces focntions G, K varient non-seulement par la variation de x [...] nous les désignerons par $G(x,m)$ et $K(x,m)$.”

cada valor de x. Dado este resultado, la ecuación diferencial (22) nos conduce a una familia continua de soluciones V_m, una para cada m.

Uno de los objetivos centrales de esta memoria de Sturm es precisamente el de estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones $V_m(x)$ y en particular estudiar cómo varían con m. Sturm estaba particularmente interesado en las propiedades oscilatorias de las V_m, sus ceros, sus cambios de signos y sus máximos y mínimos en el intervalo en el que están definidas. Obtuvo esta información, como ya lo había anticipado, considerando solamente las ecuaciones diferenciales en sí, sin necesidad de integrarlas.[25]

La exposición de Sturm en esta memoria difiere considerablemente de la presentación moderna de este tema. Las soluciones hoy se consideran como vectores en un espacio de Hilbert y por lo tanto su oscilación carece de interés. Por otro lado, si se introducen condiciones en la frontera, éstas siempre son 2, y por tanto sólo se estudia el comportamiento de las funciones propias mientras que la familia continua de soluciones V_m nunca tiene lugar. Tal es el caso de la segunda memoria de Sturm, frecuentemente conocida como su memoria sobre teoría espectral.

Esta segunda memoria se publica también en 1836 y lleva el título de *Memoria sobre una clase de ecuaciones en diferencias parciales.*[26] En ella Sturm presenta sus resultados a través de un problema concreto a manera de ejemplo.

> Yo escogí como ejemplo un problema que tiene toda la generalidad que se puede desear [...] Considero la distribución del calor en una barra plana o curva, hecha a partir de un material homogéneo o no homogéneo y de un espesor constante o variable, pero suficientemente pequeña para que todos los puntos de una sección plana perpendicular al eje de la barra tengan sensiblemente la misma temperatura en el mismo instante. Colocamos este cuerpo en un medio en el cual la temperatura es constante y se puede suponer igual a cero.[27]

[25]Existen antecedentes de este método tanto en Fourier como en Poisson, sin embargo éste es el primer caso en el que esta idea es utilizada explícitamente y sin necesidad de saber algo sobre la expresión analítica de las soluciones.

[26]Cf. [18, p. 373-444].

[27]Cf. [18, p. 376]. "J'ai chosi comme exemple un problème qui a toute la généralité qu'on peut désirer [...] Je considère la distribution de la chaleur dans une barre droite ou courbe d'une matière homogène ou non homogène et d'un épaisseur constante ou variable, mais assez petite pour que tous les points d'une section plane perpendiculaire à l'axe aient sensiblement la même température au même

El movimiento de la temperatura en esta barra no tiene lugar sino en el sentido del eje de la misma y está dado por la ecuación

$$g\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} - lu \tag{24}$$

donde $u(x,t)$ es la temperatura del punto x en el tiempo t y g, k, l son funciones positivas de x. La función u debe también satisfacer las siguientes condiciones de frontera

$$k\frac{\partial u}{\partial x} - hu = 0 \text{ si } x = \alpha \tag{25}$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x} + Hu = 0 \text{ si } x = \beta \tag{26}$$

donde h y H son constantes positivas y también se satisface que $u(x,0) = f(x)$, con f una función dada.

Para llegar a la expresión de u en términos de x y t, Sturm utiliza "los métodos conocidos" para encontrar valores de u que satisfagan las ecuaciones (24), (25) y (26) haciendo omisión en un primer momento de la cuarta condición. Estos métodos conocidos lo llevan a buscar una solución de la forma $u = V(x)e^{-rt}$ con r constante y V función de x, independiente de t.

Al sustituir este valor en (24), (25) y (26), los factores e^{-rt} se cancelan y se obtiene

$$\frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} - (gr - l) = 0 \tag{27}$$

con

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ si } x = \alpha \tag{28}$$

$$k\frac{dV}{dx} + HV = 0 \text{ si } x = \beta. \tag{29}$$

Una vez dadas estas ecuaciones Sturm muestra que la función V está enteramente determinada por la ecuación diferencial puesto que los valores de V y $\frac{dV}{dx}$ están determinados para $x = \alpha$. Es decir, que la función V existe y tiene para cada valor de x, un valor real único que depende de x y r.

Hasta aquí el valor de r había sido arbitrario, pero Sturm argumenta que habría que determinarlo de tal manera que se satisfaga la segunda

instant. Cette barre est placée dans un milieu d'une température constante qu'on peut supposer égale à zéro."

condición de frontera, es decir

$$k\frac{dV}{dx} + HV = 0 \text{ si } x = \beta. \tag{30}$$

De esta manera se tiene una ecuación en r que denotaremos por $F(r) = 0$ y es el análisis de esta función lo que constituye el tema central de la memoria de Sturm. Así mismo, es este análisis el que nos permite ver claramente por qué la memoria es conocida como "la memoria de Sturm sobre teoría espectral". Sturm mismo dice que lo que hay que hacer ahora es examinar las propiedades de las raíces de la ecuación $F(r) = 0$.[28]

Sturm demuestra que $F(r) = 0$ no puede tener raíces imaginarias, negativas o reales de multiplicidad mayor que 1, y que por tanto todas las raíces son reales, positivas y distintas. Demuestra también que $F(r) = 0$ tiene una infinidad de raíces $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$, que forman una sucesión (como lo sugiere la notación). Una vez establecido esto Sturm arregla esta sucesión de tal manera que sea una sucesión creciente (vale la pena mencionar que no argumenta por qué tal orden es posible pero es fácil deducir este resultado a partir de un teorema de Liouville) $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \ldots$ y enuncia (y demuestra) los siguientes resultados que constituyen, desde nuestra perspectiva, la parte central de la Memoria.

Teorema. Sean $\rho_1 < \rho_2 < \ldots$ las raíces de F, cada una asociada a las funciones $V_1, V_2, \ldots$ respectivamente. Entonces si, $n \neq m$,

$$\int_\alpha^\beta g(x)V_m(x)V_n(x)dx = 0.$$

También se cumple que V_n nunca toma valores infinitos y tiene $n-1$ raíces en (α, β) y entre dos raíces consecutivas de V_m siempre hay una raíz de V_{m-1}.

Teorema. Sea $m < n$ y sean $C_m, C_{m+1}, \ldots, C_n$ constantes que no son todas cero. Si se define

$$\psi(x) = C_mV_m(x) + C_{m+1}V_{m+1}(x) + \cdots + C_nV_n(x)$$

entonces $\psi(x)$ tiene al menos $m-1$ raíces y a lo más $n-1$ raíces si éstas se cuentan de acuerdo a su multiplicidad.

Para demostrar este último teorema Sturm estudia la solución del problema original, expresado por (24)-(26), dada por

$$C_mV_m(x)e^{-\rho_m t} + C_{m+1}V_{m+1}(x)e^{-\rho_{m+1}t} + \cdots + C_nV_n(x)e^{-\rho_n t} \tag{31}$$

[28]Cf. [18, p. 384]. "Il faut maintenant examiner les propriétés des racines de cette équation F(r)=0."

en donde $\rho_m < \rho_{m+1} < \cdots < \rho_n$ y demuestra que para valores positivos suficientemente grandes de t, (31) está dominada por el primer término que tiene $m-1$ raíces; para valores negativos también suficientemente grandes, está dominada por el último término que tiene $n-1$ raíces y para otros valores de t el número de raíces está entre estos dos valores.

Desde nuestro punto de vista los resultados que hemos presentado de las memorias de Sturm de 1836 hablan por sí mismos a la luz de la Teoría de Sturm-Liouville tal y como se estudia hoy en día. Con certeza podemos decir que son pocos los artículos, a lo largo de la historia de las matemáticas que, como éste, sobresalen tanto por la novedad del problema que tratan como por los métodos, ideas y técnicas utilizados en ellos para alcanzar los objetivos planteados. Los resultados presentados por Sturm en estas dos memorias marcaron el camino que seguiría la Teoría Espectral en el Siglo XIX ya que una gran parte del Análisis en sí se desarrolló en torno a la búsqueda de una generalización de esta teoría a ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales, desarrollo que sólo fue posible después de 1880, dada la desventaja en la que se encontraba la teoría de ecuaciones diferenciales parciales frente a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias en las primeras dos terceras partes del Siglo XIX.

6 Algunos Comentarios Finales.

El periodo entre 1740 y 1840 es un periodo particularmente importante en el establecimiento de la teoría espectral y por tanto nuestro interés aquí ha sido el de delinear el desarrollo de esta teoría en estos años siguiendo el hilo conductor que existe entre el trabajo de D'Alembert y el de Sturm. Sin embargo con esto no queremos afirmar que es imposible encontrar antecedentes de la teoría espectral antes de 1740, como tampoco que para 1840 esta teoría estaba ya constituida como tal.

Es posible, si se desea, considerar a los problemas de la teoría espectral como un punto de partida para el desarrollo de las matemáticas y rastrear sus orígenes a los Siglos V y VI antes de nuestra era con los trabajos hechos por los pitagóricos sobre la cuerda vibrante. Sin embargo, consideramos que aún cuando este problema está claramente vinculado con lo que hemos expuesto aquí, no forma parte de lo que podemos considerar los antecedentes de la teoría espectral en tanto que teoría matemática.

Notamos también que aún después del impresionante trabajo hecho por Sturm es indudable que quedaba mucho por hacer dentro de la teoría espectral. La teoría de Sturm y Liouville tardó mucho en ser aceptada ya que lo que constituía la genialidad de la misma, es decir, la naturaleza cualitativa de sus resultados, era también lo que la enfrentaba a un fuerte problema puesto que existía un desinterés generalizado a mediados del Siglo XIX por teoremas de existencia si éstos no conducían a los objetos mismos. Dado esto, no fue sino hasta finales del siglo que la teoría de Sturm-Liouville fue aceptada y continuada.

Por otro lado, entre 1836 y 1900 hubo grandes avances en otros ámbitos de esta teoría, avances que desde cierto punto de vista permitieron a la comunidad matemática madurar para finalmente poder apreciar la teoría creada por Liouville y Sturm. La memoria que hemos analizado de Cauchy de 1829 fue crucial en el desarrollo de la Teoría Espectral, no sólo por los resultados que en ella se encuentran sino porque ella misma proporcionó la motivación que dio lugar a los grandes avances que se dieron en la teoría espectral de matrices hacia 1870; esto claro está, con base en los trabajos desarrollados por Cayley, Hermite, Sylvester (quien fue el primero en utilizar la palabra *matriz* en 1850), Frobenius y Weierstrass a quienes debemos el establecimiento de la teoría de matrices en sí misma.

Finalmente, podemos decir que el establecimiento de la Teoría Espectral culmina a principios del Siglo XX cuando el objeto de estudio de la misma, el *espectro*, es finalmente definido por Hilbert.[29] No obstante el término *Teoría Espectral* no comienza a ser utilizado sino hacia 1930, aproximadamente un siglo después de la aparición de las memorias de Sturm, pero el desarrollo de esta teoría a lo largo de ese siglo es claramente el tema de un segundo ensayo.

References

[1] Cauchy A. L. *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions ...*, Oeuvres (2) 1, 91-169, 1815.

[2] Cauchy A. L. *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*, Oeuvres (2) 5, 1826.

[3] Cauchy A. L. *Sur l'équation à l'aide de laquelle on determine les inégalités séculaires des mouvements des planètes*, Oeuvres (2) 9, 174-195, 1829.

[29]Cf. [10]. Hilbert utiliza la palabara *Spektrum* en su gran memoria de 1906 al hablar sobre formas cuadráticas en una infinidad de variables.

[4] D'Alembert J. *Traité de Dynamique*, Paris, 1743.

[5] D'Alembert J. Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration, *Hist. Acad. Roy. Sci. et Belles Let. Berlin*, 214-219, Berlin, 1747.

[6] D'Alembert J. *Traité de Dynamique*, 2a edición, Paris, 1758.

[7] D'Alembert J. Sur les Logarithmes des quantités négatives. *Opuscules Mathématiques* 1, p. 180-230, 1761.

[8] D'Alembert J. Extrait de différentes lettres de M. d'Alembert à M. de La Grange, *Hist. Acad. Roy. Sci. et Belles Lettres Berlin*, 1763, publ. 1770.

[9] Hawkins T. Cauchy and the Spectral Theory of Matrices, *Historia Mathematica* 2, 1-29, 1975.

[10] Hilbert D. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*, 2^a edición, Teubner, Leipzig-Berlin, 1924.

[11] Lagrange J. L. Solution de différents problèmes de calcul intégral... *Miscellanea Taurinensia* 3, 1762-65 = Lagrange [1867-92, vol. 1, 471-668].

[12] Lagrange J. L. *Méchanique Analitique*, Paris, 1778.

[13] Lützen J. *Joseph Liouville (1809-1882). Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[14] Martínez Adame C. *Spectral Properties of Tridiagonal Operators*, PhD Dissertation, King's College London, 2005.

[15] Muir T. *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, London & New York. 1906.

[16] Simmons G. F. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw Hill, New York. 2^a edición, 1991.

[17] Sturm C. Mémoire sur les Équations différentielles linéares du second ordre, *Journal de Math. pures et appliquées* 1, 106-186, 1836.

[18] Sturm C. Mémoire sur une classe d'Équations à différences partielles, *Journal de Math. pures et appliquées* 1, 373-444, 1836.

[19] Truesdell C. The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788, en *Leonhardi Euleri Opera Omnia* (2) 11, Parte II, Zurich, 1960.