ESPACIOS DE FINSLER.

Por LILIA DEL CASTILLO*

Es a partir de la tesis de Riemann [6] en 1854 que nació la idea de un espacio de Finsler. Al hacer estudios de superficies en el espacio euclideano de dimensión tres, se dió cuenta de que algunas de las propiedades geométricas más importantes pertenecían a la superficie misma y no al espacio donde estaban sumergidas. Su idea era construir una teoría geométrica hecha solamente de invariantes isométricos, estudiando en particular métricas sobre una variedad definidas por la raíz cuadrada positiva de una 2-forma diferencial. Esta métrica define un producto interno en cada espacio tangente a la variedad, dándole una estructura de espacio vectorial euclideano.

De manera precisa, si M es una variedad diferenciable de clase C^{∞}, una estructura riemanniana sobre M es un campo de tensores g (de clase C^{∞}), covariante de orden 2, llamado tensor métrico, tal que:

1. g sea simétrico
2. para cada $p \in M$, g_p sea una forma bilineal degenerada sobre $T_p M \times T_p M$.
3. g_p esté definida positiva, es decir
$$g_p(V,V) > 0, \quad V \in T_p M .$$

* Profesora de tiempo completo de la Universidad Autónoma Metropolitana.

En una carta local arbitraria, estas condiciones se expresan como:

i) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$

ii) la matriz $(g_{\alpha\beta})$ es invertible

iii) para todo vector de coordenadas V^{α} no todas cero,

$$g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} > 0 \; .$$

Dado g, el tensor g_p induce en cada espacio vectorial T_pM una estructura de espacio vectorial euclideano: si V y W son dos vectores de T_pM, su producto escalar se define como

$$\langle V,W \rangle = g_p \; (V,W)$$

(Localmente, $\langle V,W \rangle = g_{\alpha\beta} \; V^{\alpha}V^{\beta}$)

Si la variedad M estuviera sumergida en algún espacio euclideano, un producto escalar podría ser el producto usual de vectores.

De la definición anterior se deduce que las $g_{\alpha\beta}$ son precisamente productos escalares de los vectores base.

Al invariante $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta} \; dx_{\alpha} \; dx_{\beta}}$ en un sistema de coordenadas naturales se le llama invariante métrico de la variedad.

Es de notarse que el invariante ds tiene tres propiedades: es positivo, homogéneo de primer grado en sus diferenciales y convexo en ellas.

Es curioso ver que no fue sino hasta aproximadamente 60 años después que Finsler hizo un estudio sistemático de espacios (llamados de Finsler) en donde el invariante ds de la variedad estuviera definido por una función L más general que satisfaciera las mismas condiciones que el invariante de Riemann. Dicha función L está definida en parejas $(x^i, \dot{x}^i)$, es decir localmente se puede pensar que los puntos de la variedad son elementos de algún espacio tangente (ver apéndice), donde (x^i) representa puntos de M.

Si M es una variedad diferenciable de dimensión dos, la función L definida por

$$L(x,\dot{x}) = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

hace que (M,L) sea una variedad finsleriana de dimensión dos.

Es de notarse que en su estudio, Finsler se guió principalmente por nociones de cálculo de variaciones, uno de cuyos problemas más simples consiste en encontrar extremales de una cierta función L. Las condiciones que se imponene a la función L usada para definir un espacio de Finsler están relacionadas con la existencia de extremales.

En 1925, Synge, Taylor y Berewald aplicaron independientemente métodos del cálculo tensorial a la teoría y encontraron que las segundas derivadas de la función $\frac{1}{2} L^2$ (llamada energía) con respecto a las diferenciales, servían como componentes de un tensor métrico, en analogía con la geometría de Riemann.

Sean entonces

$$g_{ij}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$

las componentes del tensor covariante de orden 2. Como L^2 es homogénea de grado 2 en las $\dot{x}^i$, aplicando el teorema de Euler, se tiene que

$$g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \cdot \dot{x}^i \dot{x}^j = L^2$$

es decir

$$L^2(x,\dot{x}) = g_{ij}(x,\dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j$$

El lector verificará fácilmente que $L^2 = (\dot{x}_1{}^3 + \dot{x}_2{}^3)^{2/3}$ pue_ de escribirse en esta forma, donde las g_{ij} dependen sólo de $\dot{x}$.

Ahora bien, si se expresa la distancia ds entre dos puntos de coordenadas (x^i), $(x^i + dx^i)$ en términos del tensor métrico tenemos que

$$ds^2 = g_{ij}(x, dx)\, dx^i dx^j$$

Un espacio de Riemann es por lo tanto un caso particular de espacios de Finsler y corresponde a una función L cuyo tensor mé_ trico sea independiente de la dirección (es decir, las funciones g_{ij} dependen sólo de x, y no de $\dot{x}$).

Los espacios de Finsler han sido generalizados de diferentes maneras, como la geometría de Cartan [1], basada en la noción de área, o los espacios de Kawaguchi [4] en los que la función métrica L depende de derivadas de más alto orden.

A P E N D I C E

En lo que sigue, M denotará una variedad diferenciable de clase C^∞, de dimensión n, paracompacta; J el tensor que define la estructura casi tangente natural de TM y C el campo canónico, es decir la transformación infinitesimal del campo global a un parámetro constituído por las homotecias de TM [3].

Si (U,ϕ) es una carta local de M, $(x^1,\ldots,x^n)$ las coordenadas de $\phi(x)$ en $\mathbb{R}^n$ denotaremos

$$x \underset{U}{=} (x^1,\ldots,x^n) \quad .$$

A esta carta (U,ϕ) corresponde una carta local en TM : si $Z \in TU$,

$$Z \underset{U}{=} (x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$$

A la forma tensorial J se le asocian las derivaciones i_J y d_J de *Frolicher-Nijenhuis* [2]. Localmente si f denota una función sobre TM,

$$d_J f = \frac{\partial f}{\partial y^i}\, d\, x^i$$

Ahora bien, al definir una estructura finsleriana, vamos a usar una función homogénea que no tenga el mismo grado de diferenciabilidad en la sección cero 0 de TM, que en el complemento.

No es un fenómeno extraño el que una función homogénea se comporte de esta manera, piense por ejemplo en la función

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ,$$

que es meramente contínua en el origen.

DEFINICION.

Decimos que tenemos una estructura *finsleriana* sobre M si se tiene una aplicación $E : TM \to \mathbb{R}^+$ (llamada energía) tal que

i) $E(0) = 0$, siendo 0 la sección cero de TM.

ii) E de clase C^∞ sobre $\tau M = TM - \{0\}$, y de clase C^1 sobre la sección cero.

iii) E homogénea de grado 2.

iv) $dd_J E$ de rango máximo.

Si sobre M variedad finsleriana se tiene definida una conexión (que generaliza el desplazamiento paralelo de vectores de Levi-Civita), se puede verificar que dado un tensor métrico sobre el fibrado vertical, éste puede ser considerado como un tensor métrico de la variedad misma que depende no sólo del punto, sino también de un vector no nulo tangente en este punto a la variedad. Es por lo que se piensa que los puntos de la variedad son localmente elementos de algún espacio tangente.

Para un análisis más detallado de este tema, reportamos al lector a [4] y [7] .

B I B L I O G R A F I A

1. CARTAN, E. -- " *Les espaces de Finsler*". Actualités 79, Paris 1934.

2. FRÖLICHER-NIJENHUIS -- "*Theory of vector-vahued differential forms*", *Part. I*, Proc. Kon. Ned. Akad. (1956). pp. 338-359.

3. GODBILLON, C. -- "*Geometric differentielle et Mecanique Analytique*" . Hermann, (1969).

4. GRIFONE, J. -- "*Structure presque tangente et connexion non homogenes*". These Sc. Math. Universite de Grenoble (1971). Ann. Inst. Fourier 22, 1 (1972) p. 287-334.

5. KAWAGUCHI, A. -- "*Generalised direction transformations and generalised homogeneus function*". Tensor (N.S.) 5, 68-70, (1955).

6. RIEMANN, B. -- "*Uber die Hypothesen welche der Geometrie sugrunde lieger*". Habilitationsvortrag 1854, Cresmath. Werke 272-287, Leipzig 1892. Reproduced by Dover Publications. 1953.

7. RUND, H. -- "*The differential Geometry of Finsler Spaces*". Springer-Verlag. (1959).