Miscelánea Matemática **28** (1999) 11–15 SMM

Una demostración inductiva directa de la desigualdad media geométrica-media aritmética

J. Cruz Sampedro
Departamento de Matemáticas
Universidad de las Américas-Puebla
Cholula, Pue.
sampedro@mail.udlap.mx

M. Tetlalmatzi Montiel
Departamento de Ingeniería y Tecnología
Av. Apizaquito S/N
Apizaco, Tlaxcala

Todos desde la primaria calculamos nuestro promedio dividiendo la suma de nuestras calificaciones entre el número de éstas y a todos nos parece que ésta es la manera más sencilla y natural de promediar pero, si llevamos n materias, ¿no sería mejor obtener el promedio sacando la raíz n-ésima del producto de las calificaciones? Esto último resulta bastante tentador ya que, si no nos han plantado un cero, el producto de las calificaciones es en general mayor que la suma. ¿Por qué entonces preferimos el método de promediar de la primaria? Muy probablemente es por tradición o porque es más fácil dividir entre n que sacar una raíz n-ésima; lo interesante sin embargo es que hay una razón matemática que nos muestra que la manera tradicional de promediar no solamente es más sencilla y natural sino más conveniente pues, si definimos la *media geométrica* y la *media aritmética* de n números no negativos dados $a_1, \cdots, a_n$ como $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ y $A_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, respectivamente, entonces

$$G_n \leq A_n. \tag{1}$$

Para $n = 2$ esta desigualdad es conocida desde tiempos de Euclides [Re] y hay mil y un maneras de establecerla en el caso general [Be, Co, Ku, Mi, Ni, Po, Ru, So, Sp], sin embargo nos parece que la manera natural de demostrarla es por inducción. Existen por supuesto muchas demostraciones de (1) por inducción [Ku, Ni, So, Sp] pero no hemos encontrado en la literatura una demostración inductiva directa, como la esperarán los estudiantes que por primera vez intentan demostrar esta desigualdad. Todas las pruebas por inducción de (1) que hemos encontrado en la literatura, incluyendo la bellísima prueba de Cauchy [Ni, So], utilizan un truco que reduce el problema original al problema de demostrar (1) por inducción en un subconjunto propio de los números naturales. Por ejemplo, las demostraciones presentadas en [So, Sp] reducen el problema a demostrar (1) por inducción para $n = 2^k$, $k = 1, 2, \cdots$. Para completar la demostración, la prueba de Cauchy recurre a un astuto argumento de inducción en reversa mientras que las otras lo hacen con argumentos no inductivos. Cabe mencionar que ninguna de las pruebas por inducción arriba mencionadas trata el caso de igualdad.

En esta nota presentamos una demostración breve de (1) que a nuestro juicio es una demostración genuinamente inductiva.

Demostración: Para $n = 2$, (1) se reduce a la bien conocida desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad a, b \geq 0. \tag{2}$$

Supongamos ahora que (1) es cierta para cualesquier n números reales no negativos $a_1, \cdots, a_n$, entonces aplicando dos veces la hipótesis de inducción y luego (2) tenemos

$$\begin{aligned} G_{n+1}^{n+1} A_{n+1}^{n-1} &= G_n^n \, a_{n+1} A_{n+1}^{n-1} \\ &\leq A_n^n \left(\frac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n} \right)^n \\ &= \left(A_n \frac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n} \right)^n \\ &\leq \left(\frac{A_n}{2} + \frac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{2n} \right)^{2n} \\ &= A_{n+1}^{2n} . \end{aligned} \tag{3}$$

Al dividir por A_{n+1}^{n-1} y sacar raíz $(n+1)$-ésima se obtiene $G_{n+1} \leq A_{n+1}$. Esto completa la inducción. $\square$

Nota. Como benefico adicional, esta prueba nos permite determinar, también por inducción, los casos de igualdad en (1). En efecto, hay igualdad en (2) si y sólo si $a = b$ y tomando como hipótesis de inducción que hay igualdad en (1) si y sólo si $a_1 = \cdots = a_n$, se sigue que hay igualdad en la primera desigualdad de (3) si y sólo si $a_1 = \cdots = a_n = A_n$ y $A_{n+1} = a_{n+1}$. Luego, la igualdad en la segunda desigualdad de (3) se da si y sólo si $A_n = A_{n+1}$ y por lo tanto $G_{n+1} = A_{n+1}$ si y sólo si $a_1 = \cdots = a_{n+1}$.

A continuación presentamos una terna de sencillos resultados, todos ellos bien conocidos, y aunque nuestra presentación de éstos no es en modo alguno novedosa, creemos que el lector encontrará interesante verlos como un corolario de (1), justificando al mismo tiempo la relevancia de esta desigualdad.

a) Primeramente demostramos que la sucesión $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

Si en (1) reemplazamos n por $n + 1$ y hacemos $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ y $a_{n+1} = 1$, entonces se tiene

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)} < \frac{n(1 + 1/n) + 1}{n + 1},$$

de donde se deduce que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Dejamos al lector la sencilla tarea de demostrar que esta sucesión es acotada por 3 y por lo tanto concluir que dicha sucesión es convergente. El límite de esta sucesión es igual al número e, la base de los logaritmos naturales.

b) Ahora demostramos que la *media armónica* $H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ de los números po-sitivos $a_1, \cdots, a_n$ es menor o igual que G_n. En efecto, si en (1) reemplazamos a_i por $\dfrac{1}{a_i}$ entonces

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

de donde obtenemos la desigualdad deseada, que al combinarla con (1) produce la bonita cadena de desigualdades

$$\text{mín}(a_1, \cdots, a_n) \leq H_n \leq G_n \leq A_n \leq \text{máx}(a_1, \cdots, a_n)\,.$$

Es un ejercicio sencillo verificar la veracidad de las desigualdades en los extremos así como el caso de igualdad, el cual ocurre en las cuatro desigualdades si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

c) Para concluir esta nota resolvemos un sencillo problema de optimización en geometría.

Problema: De todos los paralelogramos de perímetro p, ¿cuál es el de mayor área?

Note que el área de cualquiera de esos paralelogramos, de lados x, y, es menor o igual que xy. Además, como $p = 2(x+y)$, se sigue de (2) que $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = (p/4)^2$ y por lo tanto el paralelogramo buscado es el cuadrado de lado $p/4$.

Pero esto no es todo, ya que si definimos el perímetro de un paralelepípedo como la suma de las longitudes de sus aristas, el problema se puede plantear como sigue: De los paralelepípedos de perímetro p, ¿cuál es el de máximo volumen?

Es claro que el volumen de cualquiera de esos paralelepípedos, con aristas de longitud x_1, x_2 y x_3, es menor o igual que $x_1x_2x_3$ y, como $p = 4(x_1 + x_2 + x_3)$, usando (1) con $n = 3$ deducimos que

$$x_1x_2x_3 \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 = (p/12)^3\,.$$

Por lo tanto, el paralelepípedo deseado es el cubo de lado $p/12$.

Finalmente, para paralelepípedos de dimensión n es un sencillo y divertido ejercicio demostrar que su número de aristas es $n2^{n-1}$. Además, si sus aristas miden $x_1, \cdots, x_n$, entonces su volumen es menor o igual que $x_1 \cdots x_n$ y, ya que $p = 2^{n-1}(x_1 + \cdots + x_n)$, se sigue de (1) que $x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n = (p/n2^{n-1})^n$. Así, el paralelepípedo n-dimensional de perímetro p de máximo volumen es el cubo n-dimensional de lado $p/n2^{n-1}$.

Referencias

[Be] E. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, 1961.

[Co] R. Courant and F. John, *Introduction to Calculus and Analysis.* Vol. 2. Wiley Interscience Publication, 1971.

[Ku] K. Kuratowski, *Introducción al Cálculo.* Editorial Limusa, 1978.

[Mi] D. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Spriger-Verlag, 1970.

[Ni] I. Niven, *Maxima and Minima Without Calculus*, The Dolciani Mathematical Expositions, No. 6. The Mathematical Association of America, 1981.

[Po] G. Pólya, *Matemáticas y Razonamiento Plausible.* Editorial Tecnos, S. A. Madrid, 1966.

[Re] H. Redamecher and O. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, Dover, 1990.

[Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Second Edition, McGraw Hill Series in Higher Mathematics, 1974.

[So] I. S. Sominskii, *El Método de la Inducción Matemática*, Temas Matemáticos. Limusa 1972.

[Sp] M. Spivak, *Calculus*, Vol. 1. Editorial Reverté, S.A., 1974.