Miscelánea Matemática **74** (2022) 39-50 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7405

El arte de descubrir el hilo negro

César L. García
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
clgarcia@itam.mx

1. Introducción

Este es uno de esos episodios en donde gracias a la curiosidad y a la naturaleza inquisitiva de los estudiantes repensamos ideas bien conocidas, casi vox populi en matemáticas, pero que, vaya usted a saber por qué, no hallan lugar en los libros. Permítame platicarle la historia. Hace ya algunos años, antes de la era covid y avanzando a todo vapor en un curso de análisis matemático, platicábamos sobre el célebre teorema de Bolzano-Weierstrass: en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ toda sucesión acotada tiene alguna subsucesión convergente (no recuerdo si era esta o bien la versión de que todo conjunto acotado e infinito tiene algún punto de acumulación). Lo miramos como consecuencia (y de hecho equivalente) al axioma del supremo en su disfraz del teorema de intervalos anidados (¿de Cantor?). La discusión avanzó y llegó el momento de decir que, bueno pues actuando en cada coordenada, había que extender este enunciado de Bolzano-Weierstrass al espacio vectorial normado $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$. Pasaron los días y de pronto, aparece una estudiante, que llamaremos Beatriz, blandiendo un libro y con una pregunta a flor de boca: oiga maestro aquí hay una demostración que dice que se puede usar el teorema de Bolzano-Weierstrass en el espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ porque es de dimensión finita. No pues sí, dije tratando de poner semblante que aparentara gran seguridad y que opacara la contrariedad del no pues sí. Pero, insistió Beatriz, ¿cómo sabría esto si solo sé la versión de Bolzano-Weierstrass en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$? Pues al ataque, gis en mano, abordamos el pizarrón y empezamos a trabajar la pregunta. El resultado de la discusión con Beatriz es lo que quiero narrar en las siguientes líneas. Para quien ya ha pisado estos terrenos quedará la impresión de que

Palabras clave: Palabras clave: Bolzano-Weierstrass, espacios normados, elipsoide de John.
El autor agradece el apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura, A.C. y los valiosos comentarios y sugerencias de los revisores de este artículo.

quien esto escribe está tratando de descubrir el hilo negro o inventar el agua tibia,[1] pero igual ahí le va.

2. Primeras definiciones

En este artículo trabajaremos con espacios vectoriales reales, es decir, que usan como campo de escalares a $\mathbb{R}$. Mucho de lo que diremos vale igual si el espacio vectorial es complejo (escalares en $\mathbb{C}$) pero poco de lo que diremos vale si el lector audaz considera campos no completos o finitos como $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}_p$ respectivamente (esto ya suena como primer ejercicio para el lector). Si X es un espacio vectorial real, lo equiparemos con alguna norma $\|\cdot\|$ y nos referiremos al espacio vectorial normado así: $(X, \|\cdot\|)$. En particular, $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico con $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Al espacio vectorial $\mathbb{R}^m$ lo equiparemos con alguna de las tres normas favoritas de todos: para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, tenemos

1. La norma taxista: $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$.
2. La norma euclideana: $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_m|^2\right)^{1/2}$.
3. La norma de Chebyshev: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\}$.

En un espacio normado, la topología (la familia de los conjuntos abiertos) se construye a partir de las bolas abiertas. Un *conjunto abierto* en X es simplemente alguna unión de bolas abiertas donde, la *bola abierta* de radio $r > 0$ y centro en $\mathbf{x} \in X$ es:

$$B_r^{\|\cdot\|}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in X : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

La *bola cerrada* de radio $r > 0$ y centro en $\mathbf{x} \in X$, $\{\mathbf{y} \in X : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$, la denotaremos por $\overline{B}_r^{\|\cdot\|}(\mathbf{x})$. Si no hay alguna confusión con la norma usada para definir la bola se omite el superíndice $\|\cdot\|$ en la notación. Observe que gracias a la estructura algebraica de X,

$$B_r(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + rB_1(\mathbf{0}).$$

Por lo que para no hacernos bolas con las bolas bastará considerar la bola de radio uno centrada en el origen (*la bola unitaria*).

En $\mathbb{R}^2$ las bolas unitarias cerradas, taxista, euclideana y de Chebyshev se ven en la figura 1.

Ir de bolas redondas a bolas cuadradas sugiere cómo el cambio de norma en un mismo espacio vectorial modifica radicalmente la geometría del espacio (veremos, en el corolario 4.3, que si la dimensión del espacio vectorial es finita, entonces la topología sí es invariante ante cambios de norma). Esta observación es de hecho algo que resulta en

[1] Estas expresiones coloquiales del español son para indicar que alguien presume haber encontrado algo que de hecho ya es bien conocido. En otras latitudes se usa también la frase: inventar la rueda.

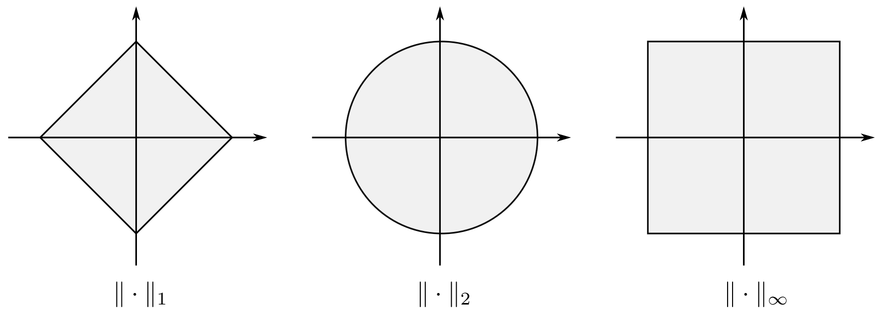

Figura 1. Bolas unitarias en $\mathbb{R}^2$.

gran diversión, pues en la experiencia de quien esto escribe, parece que los humanos traemos el chip euclideano activado por default y pensar problemas métricos con otras nociones de distancia puede ir de lo entretenido a lo retador. Ver por ejemplo en [4], donde se invita al lector a repetir parte de su curso de geometría analítica desde la perspectiva taxista o bien, ver en [9], donde se presenta con amplio detalle la geometría en espacios normados de dimensión finita (llamada geometría de Minkowski entre los eruditos).

Para cerrar la ronda de primeras definiciones recordemos que un subconjunto A de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ está *acotado* si existe $M > 0$ tal que $A \subseteq \overline{B}_M(\mathbf{0})$, y que un subconjunto K de X es *compacto* si toda sucesión en K tiene alguna subsucesión convergente con límite en K (conjuntos que emulan una propiedad ligeramente más estricta que la del enunciado de Bolzano-Weierstrass). Como referencia para los detalles de análisis real remitimos al lector a alguno de los tres textos de introducción al análisis que han sido libros de cabecera y compañeros de desvelos en la formación de muchos profesionales de las matemáticas en sus albores universitarios: [1], [2], [6].

3. Ahora sí, elucubremos sobre el hilo negro

3.1 Las coordenadas

La discusión con Beatriz empezó, por supuesto, con la parte algebraica. En este artículo esta parte tiene un doble propósito: recordar la noción de coordenadas del álgebra lineal y establecer la notación a usar en esta y secciones subsecuentes. Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita, digamos $m \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ una base de X. Si $\mathbf{x} \in X$ y escribimos $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{e}_i$, al vector en $\mathbb{R}^m$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ lo llamamos el *vector de coordenadas* de $\mathbf{x}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$ y lo denotamos por $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$. Note que el orden en que están listados los vectores de la base $\mathcal{B}$ y las correspondientes coordenadas es relevante en esta definición. Algo que sabemos bien del álgebra lineal es que el *mapeo coordenarizador* $T_{\text{coor}} : X \to \mathbb{R}^m$ dado por

$$T_{\text{coor}}(\mathbf{x}) = \overline{\alpha}$$

donde $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i$ y $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ es un isomorfismo (transformación lineal biyectiva) entre X y $\mathbb{R}^m$. La inversa de T_{coor}, el *mapeo descoordenarizador*, es $S_{\text{dcoor}} : \mathbb{R}^m \to X$,

$$S_{\text{dcoor}}(\overline{\alpha}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i.$$

De nuestra experiencia algebraica recordamos que estos mapeos coordenarizadores nos permiten transitar del mundo abstracto al mundo de los números y las cuentas y viceversa. La misma idea se reproduce al coordenarizar transformaciones lineales con matrices y ha sido grabada en los anales de la historia con la frase de Irving Kaplansky [10]:

> We [he and Paul Halmos] share a philosophy about linear algebra: we think basis-free, we write basis-free, but when the chips are down we close the office door and compute with matrices like fury.

En general, para $A \subseteq X$ definimos el conjunto de coordenadas de los elementos de A con respecto a la base $\mathcal{B}$ como:

$$\begin{aligned} A_{\text{coor}} &= \left\{ \overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \in A \right\} \\ &= \left\{ [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in A \right\}. \end{aligned}$$

3.2 La parte métrica

Como Beatriz quería entender por qué Bolzano-Weierstrass es cierto en espacios vectoriales normados de dimensión finita, habiendo hecho la equivalencia algebraica entre X y $\mathbb{R}^m$, el siguiente paso era mostrar alguna forma de relación métrica significativa entre estos espacios, por supuesto en las líneas del enunciado de Bolzano-Weierstrass. Después de algunos ensayos en el pizarrón, nuestra propuesta fue el siguiente teorema, que a falta de un buen nombre, será el

Teorema 3.1 (Teorema sin nombre)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita, digamos m. Entonces A está acotado en $(X, \|\cdot\|)$ si y solo si A_{coor} está acotado en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$.*

La norma taxista en $\mathbb{R}^m$ en el teorema 3.1 se usa, como observará pronto el lector, por mera conveniencia técnica. Podría usarse, sin problema, la norma euclidiana o la de Chebyshev como veremos en el teorema 4.2. Para mostrar que vamos por buen camino, he aquí el teorema de Bolzano-Weierstrass en $(X, \|\cdot\|)$. Recordamos al lector que $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ es un marco de referencia (base) fijo en X.

Corolario 3.2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial de dimensión* $m \in \mathbb{N}$*. Toda sucesión acotada en* X *tiene alguna subsucesión convergente en* X*.*

Demostración. 1. Sea $(\mathbf{x}_n)$ una sucesión acotada en X.

2. Entonces $([\mathbf{x}_n]_{\mathcal{B}})$ es una sucesión acotada en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ y tendrá alguna subsucesión convergente (aquí usamos la versión que sí sabemos de Bolzano-Weierstrass).
3. Si $[\mathbf{x}_{n_k}]_{\mathcal{B}} \to \overline{\beta}$ entonces para $\mathbf{x} \in X$ tal que $\overline{\beta} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{x}_{n_k} \to \mathbf{x}$, pues

$$\|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}\| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} \{\|\mathbf{e}_i\|\} \right) \|[\mathbf{x}_{n_k}]_{\mathcal{B}} - [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\|_1$$

y apelamos al bendito principio del sándwich. □

Hagamos entonces la demostración del teorema 3.1.

Demostración. La parte fácil es la suficiencia: si A_{coor} está acotado en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|\overline{\alpha}\|_1 \leq M$ para todo $\overline{\alpha} \in A_{\text{coor}}$ entonces para $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{e}_i \in A$,

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| \, \|\mathbf{e}_i\| \leq \|\overline{\beta}\|_1 \max_{1 \leq i \leq m} \{\|e_i\|\} \leq M \max_{1 \leq i \leq m} \{\|\mathbf{e}_i\|\}.$$

El esquema de prueba de la necesidad en el teorema 3.1 que damos a continuación, es de hecho un argumento que aparece en la literatura en resultados aparentemente ajenos al que nos trae aquí, pero, como veremos en el teorema 4.2 y, como se dice hoy en día, «pues es lo mismo».

Supongamos ahora que $A \subseteq X$ esta acotado. Digamos que para alguna $M > 0$, $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Consideramos la función $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$g(\overline{\alpha}) = \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{e}_i \right\| \text{ donde } \overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

1. g es continua.
2. Si $S^1 = \{\overline{\alpha} \in \mathbb{R}^m : \|\overline{\alpha}\|_1 = 1\}$ entonces S^1 es compacto. Aquí usamos el teorema de Heine-Borel[2] en $\mathbb{R}^m$, que es consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}^m$.
3. g tiene un mínimo en S^1 digamos $\overline{\alpha}_0$. Al valor mínimo lo denotamos por $E = g(\overline{\alpha}_0) > 0$.

[2]En la proposición 6.1, tendrá el lector la versión del enunciado correspondiente en un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$

4. Si $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ entonces $g(\overline{\alpha}) \geq E\|\overline{\alpha}\|_1$.
5. Finalmente si $\overline{\alpha} \in A_{\text{coor}}$ entonces
$$M \geq g(\overline{\alpha}) \geq E\|\overline{\alpha}\|_1.$$
Luego, $\|\overline{\alpha}\|_1 \leq DM$ con $D = \frac{1}{E}$ y A_{coor} está acotado. □

Observación 3.3. Como seguramente habrá notado el lector, en la prueba de la suficiencia del teorema 3.1 se obtiene que para toda $\mathbf{x} \in X$,

$$\|\mathbf{x}\| \leq C\|[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\|_1 \text{ con } C = \max_{1\leq i\leq m}\{\|\mathbf{e}_i\|\}. \tag{1}$$

Es decir, el mapeo S_{dcoor}, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \mapsto \mathbf{x}$, es de Lipschitz[3] (bajo la mirada de los expertos en análisis funcional, aquí ya se ve cómo vamos descubriendo más hebras del hilo negro).

Al igual que en la prueba de suficiencia, al probar la necesidad en el teorema 3.1, obtenemos que el mapeo T_{coor}, $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, es de Lipschitz[4], es decir, existe $D > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in X$

$$\|[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\|_1 \leq D\|\mathbf{x}\|. \tag{2}$$

Cerramos esta sección con la observación de que el teorema de Bolzano-Weierstrass es «nativo» de la dimensión finita. En espacios vectoriales normados de dimensión infinita puede no ser cierto. Por ejemplo, considere el espacio de sucesiones reales con soporte finito, es decir,

Definición 3.4. $c_{00} = \{(x_n) : x_n = 0 \;\text{ excepto para un número finito de índices n}\}$.

Considere los vectores canónicos en c_{00}, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, e_n es la sucesión cuyos términos son igual a 0 excepto el n-ésimo que es igual a $1 : e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots)$.

1. $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de c_{00} y por lo tanto c_{00} es de dimensión infinita, es decir, para toda $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{e_n : 1 \leq n \leq k\}$ es linealmente independiente o bien, si el lector es de la vena generadora, ningún subconjunto finito de $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ genera a c_{00}.
2. Si equipamos a c_{00} con la norma $\|(x_n)\|_\infty = \max\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$, la sucesión (e_n) es acotada pues $\|e_n\|_\infty = 1$ para toda n y no tiene alguna subsucesión convergente pues $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$ si $n \neq m$ y vectores separados una distancia fija entre sí no pueden acumularse en algún lugar del espacio.

[3] Una función $g : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ es de *Lipschitz* si existe una constante $L > 0$ tal que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\|_Y \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_X$.

[4] Como hebra del hilo negro, note que los mapeos coordenarizadores, al ser transformaciones lineales, son de hecho mapeos diferenciables. El agregado aquí es que la constante de Lipschitz da una cota para la derivada.

4. Variaciones sobre el mismo tema

Otro teorema muy de dimensión finita y que usa esencialmente las mismas ideas de la sección anterior es el enunciado sobre equivalencia de normas.

Definición 4.1. Sea X un espacio vectorial real. Decimos que dos normas en X, $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$, son equivalentes si existen constantes positvas a y b tales que para todo $\mathbf{x}$ en X,

$$a\|\mathbf{x}\| \leq |||\mathbf{x}||| \leq b\|\mathbf{x}\|.$$

Por ejemplo $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes en $\mathbb{R}^m$ ya que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$

Las sospechas que levanta la definición 4.1 son, en efecto, ciertas: si las normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes entonces las sucesiones $\|\cdot\|$-convergentes son $|||\cdot|||$-convergentes y viceversa. Las topologías correspondientes son iguales (ver el corolario 4.3). También sucesiones $\|\cdot\|$-Cauchy son $|||\cdot|||$-Cauchy y viceversa, con lo cual se preserva la completitud del espacio al cambiar a una norma equivalente. Esto no sucede en espacios métricos. Se pueden tener métricas equivalentes (en el sentido de que inducen la misma topología) con una de ellas completa y la otra no. Por ejemplo, equipemos a $\mathbb{R}$ con dos métricas: una, el valor absoluto usual $d_1(r,s) = |s-r|$ y otra $d_2(r,s) = |e^s - e^s|$. Estas métricas inducen la misma topología en $\mathbb{R}$ (son equivalentes), pero solo d_1 es completa. Para verificar que d_2 no es completa, basta considerar la sucesión real $(-n)_{n=1}^{\infty}$. De hecho, podríamos sugerir al amable lector un buen ejercicio: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva y definimos $d_3(r,s) = |f(s) - f(r)|$ entonces d_3 es una métrica en $\mathbb{R}$ y, en el contexto de nuestra discusión, habría además dos preguntas interesantes: se podrá decir en términos de alguna propiedad de f ¿cuándo es d_3 equivalente a d_1? y ¿cuándo es d_3 completa?

La equivalencia de normas se puede formular geométricamente: $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son dos normas equivalentes –vía las constantes a y b como en la definición– si y solo si

$$\overline{B}_a^{|||\cdot|||}(0) \subseteq \overline{B}_1^{\|\cdot\|}(\mathbf{0}) \subseteq \overline{B}_b^{|||\cdot|||}(\mathbf{0}).$$

Por ejemplo, aquí esta la prueba por figurita de la equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{R}^2$:

Teorema 4.2. *Sea X un espacio vectorial normado de dimensión finita. Entonces cualesquiera dos normas en X son equivalentes.*

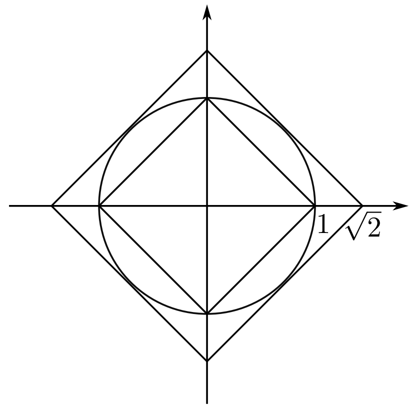

Figura 2. $\overline{B}_1^{\|\cdot\|_1}(\mathbf{0}) \subseteq \overline{B}_1^{\|\cdot\|_2}(\mathbf{0}) \subseteq \overline{B}_{\sqrt{2}}^{\|\cdot\|_1}(\mathbf{0})$.

Demostración. Supongamos que tenemos dos normas en X, digamos, $\|\cdot\|$ y $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$. De la propiedad de Lipschitz para los mapeos T_{coor} y S_{dcoor} (las desigualdades (2) y (1) respectivamente) sabemos que existen constantes positivas C, D, $\widetilde{C}$ y $\widetilde{D}$ tales que para toda $\mathbf{x} \in X$

$$\frac{1}{C}\|\mathbf{x}\| \le \|[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\|_1 \le D\|\mathbf{x}\| \quad \text{y} \quad \frac{1}{\widetilde{C}}|\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| \le \|[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\|_1 \le \widetilde{D}|\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!|.$$

De donde

$$\frac{1}{C\widetilde{D}}\|\mathbf{x}\| \le |\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| \le \widetilde{C}D\|\mathbf{x}\|. \qquad \square$$

Esta equivalencia de normas tiene como corolario la invarianza de la topología al renormar el espacio X:

Corolario 4.3. *Sea X un espacio vectorial normado de dimensión finita equipado con las normas $\|\cdot\|$ y $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ y $A \subseteq X$. Entonces A es $\|\cdot\|$-abierto si y solo si A es $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$-abierto. Equivalentemente, la función identidad, $I_X : (X, \|\cdot\|) \to (X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$, es un homeomorfismo, es decir, una función biyectiva, continua y con inversa continua.*

La equivalencia de normas en un espacio vectorial Y no tiene alguna esperanza de éxito si la dimensión de Y no es finita. Por ejemplo en c_{00} (definición 3.4) las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes aunque claramente se tiene la «semiequivalencia»: para todo $\mathbf{x} \in c_{00}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1$. En general, en un espacio vectorial normado de dimensión infinita, $(Y, \|\cdot\|)$, con ayuda del axioma de elección, se puede demostrar la existencia de una norma en el espacio que no es equivalente a la original: basta considerar $g : Y \to \mathbb{R}$ una funcional lineal no acotada (aquí es donde el axioma de elección nos sonríe desde la penumbra). Entonces $|\!|\!|\mathbf{y}|\!|\!| = \|\mathbf{y}\| + |g(\mathbf{y})|$ es una norma en Y que no es equivalente a $\|\cdot\|$.

5. El teorema de John

En el teorema 4.2 es de interés no solo producir las constantes que hacen a las normas equivalentes (a y b en la definición 4.1). Uno puede preguntarse por las mejores constantes posibles: la a más grande y la b más chica. Siempre alguna de las mejores constantes a o b estará en términos de la dimensión del espacio X. Geométricamente esto es equivalente a encontrar las bolas inscrita y circunscrita a la bola unitaria en la otra norma, como en la figura 2 o como en la figura 3 que, en particular sirve como punto de encuentro y nos da la excusa para presentar una de las piedras angulares de la geometría convexa: el teorema de John.

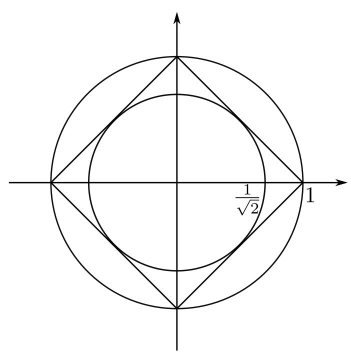

Figura 3. Ilustración del teorema de John.

Para tener todos los puntos sobre las íes en el enunciado del teorema de John, necesitamos un par de definiciones: un *cuerpo convexo* en $\mathbb{R}^m$ es un conjunto convexo, compacto y con interior no vacío. Un cuerpo convexo K es *simétrico* si $\mathbf{x} \in K$ implica $-\mathbf{x} \in K$, es decir, es simétrico con respecto al origen. Dentro de los cuerpos convexos, destacan los *elipsoides* que son la imagen de la bola euclidiana $\overline{B}_1^{\|\cdot\|_2}(\mathbf{0})$ bajo un mapeo lineal, $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, que supondremos invertible para que no se «aplane» el elipsoide.

Teorema 5.1 (Fritz John, 1948)**.** *Si $K \subset \mathbb{R}^m$ es un cuerpo convexo simétrico entonces existe un elipsoide $\mathcal{E}$ tal que*

$$\mathcal{E} \subseteq K \subseteq \sqrt{m}\mathcal{E}.$$

La constante $\sqrt{m}$ es óptima.

El impacto de este teorema ha sido impresionante a lo largo del siglo XX y del que nos acompaña. Basta un breve vistazo a la Wikipedia en [12] y a las referencias ahí citadas para justificar apenas la afirmación de su relevancia. La doble contención, $\mathcal{E} \subseteq K \subseteq \sqrt{m}\mathcal{E}$, como bien sospecha el lector a la luz de las figura 3, es un enunciado de equivalencia de normas, ya que si K es un cuerpo convexo y simétrico en $\mathbb{R}^m$ entonces la función, llamada *funcional subaditiva de Minkowski*, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_K$, donde

$$\|\mathbf{x}\|_K = \text{ínf}\left\{t > 0 : \frac{1}{t}\mathbf{x} \in K\right\}$$

es una norma en $\mathbb{R}^m$ ¡cuya bola unitaria cerrada es precisamente K! Detalles que justifican las propiedades que enunciamos de la funcional subaditiva de Minkowski son un buen ejercicio, pero también pueden consultarse en [7, teo. 1.35].

Estas ideas son solo una pequeña muestra en un mundo vasto y fascinante: la teoría local de espacios de Banach. Esta teoría es y ha sido amplia e intensamente estudiada. Nociones como la del elipsoide de John, la distancia de Banach-Mazur y el teorema de Dvoretzky (que habla sobre la presencia de secciones transversales casi euclidianas en las bolas de los espacios normados) son algunos referentes relativamente cercanos a nuestra discusión y que invitamos al lector a hojear y ojear por ejemplo en Wikipedia [11] para empezar y en [3] y [5, caps. 3 y 4] para continuar.

6. Más corolarios

¿Qué otros enunciados encontramos en la literatura que se afirman verdaderos por estar en el contexto de espacios vectoriales de dimensión finita? Veamos algunos de ellos.

En $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ una consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass es el teorema de Heine-Borel y por supuesto ahora podríamos reproducir la misma demostración para escribirlo en el contexto de $(X, \|\cdot\|)$:

Proposición 6.1 (Heine-Borel)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado de dimensión finita y $K \subseteq X$. Si K es un conjunto cerrado y acotado en X entonces K es compacto. El recíproco siempre es verdadero en* cualquier *espacio normado.*

La prueba es ahora sí, es la misma que la que se tiene para $\mathbb{R}^n$ gracias al teorema de Bolzano-Weierstrass (corolario 3.2): si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en K entonces tendrá alguna subsucesión convergente con límite en K.

Así, las bolas cerradas en el espacio finito dimensional $(X, \|\cdot\|)$ son conjuntos compactos y de hecho, se tiene el siguiente resultado que es sorprendente, puesto que empata una condición algebraica (la dimensión) con una condición topológica (la compacidad): $\overline{B}_1(\mathbf{0})$ es compacta si y solo si la dimensión de X es finita. La implicación que no es inmediata de nuestra discusión puede consultarse en el blog de Terence

Tao [8], donde incluye tanto la prueba clásica, vía el lema de Riesz, como la prueba topológica. Además tiene el hilo inicial para perseguir cuál pudo haber sido la primera vez que apareció este emparejamiento algebraico-topológico en la literatura.

Cerremos esta sección solo con un par de corolarios más, para también dejar al amable lector algunos enunciados por descubrir. Algo que es geométricamente evidente en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ es que los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^m$ son subconjuntos cerrados en $\mathbb{R}^m$ pues su complemento, como se ilustra en la figura 4, es un conjunto abierto. De aquí, gracias al teorema 4.2, los subespacios también serán subconjuntos cerrados en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$. Con esto podemos argumentar la siguiente proposición:

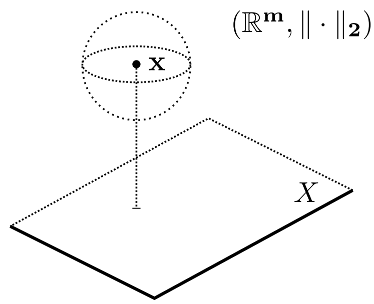

Figura 4. El complemento de un subespacio X en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ es abierto.

Proposición 6.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un subespacio de dimensión finita en un espacio vectorial normado $(Y, \|\cdot\|)$ entonces X es un conjunto cerrado en Y.*

Demostración. Sea $(\mathbf{x}_n)$ una sucesión en X tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}^* \in Y$. Suponga que probamos que $([\mathbf{x}_n]_{\mathcal{B}})$ converge, digamos a $\overline{\beta}$, en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$. Si $\mathbf{z} \in X$ es tal que $[\mathbf{z}]_{\mathcal{B}} = \overline{\beta}$ entonces $\mathbf{x}_n \to \mathbf{z}$ pues

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}\| \leq C\|[\mathbf{x}_n]_{\mathcal{B}} - \overline{\beta}\|_1 \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto $\mathbf{x}^* = \mathbf{z}$ y $\mathbf{x}^* \in X$.

Para ver que $([\mathbf{x}_n]_{\mathcal{B}})$ converge, recordemos que T_{coor} es de Lipschitz ($\|[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\|_1 \leq D\|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x}$). De aquí, como la sucesión $(\mathbf{x}_n)$ es convergente entonces es una sucesión de Cauchy. Luego, de la desigualdad (2), se sigue que la sucesión $([\mathbf{x}_n]_{\mathcal{B}})$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ y por lo tanto converge. □

Finalmente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 6.3. *Sea $(Z, \|\cdot\|_Z)$ un espacio vectorial normado real y $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectorial real de dimensión finita. Entonces cualquier transformación lineal $T : X \to Z$ es continua (de Lipschitz).*

Demostración. Supongamos que $m = \dim(X)$ y $p = \dim(T(X))$. Elegimos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^p$ respectivamente y llamamos $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ a la matriz asociada a la transformación lineal $T : X \to T(X)$, $\mathbf{x} \mapsto T\mathbf{x}$. Cada una de las siguientes es una función de Lipschitz y su composición también lo es

$$\mathbf{x} \longrightarrow [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \longrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} \longrightarrow T\mathbf{x}.$$

Que el mapeo $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \longrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es de Lipschitz puede obtenerse como corolario del siguiente enunciado, que a su vez solo requiere de la famosísima desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz: si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de $m \times n$ entonces para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_{\text{Fröb}}\|\mathbf{x}\|_2$$

donde $\|A\|_{\text{Fröb}} = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$ es la norma de Fröbenius de A. □

Palabras más, palabras menos, esto es lo que descubrimos con Beatriz. Queda por tejer un buen suéter con todo este hilo negro.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, 2.ª ed., Reverté, 2006.
[2] R. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático*, Limusa, 1987.
[3] A. A. Giannopoulos, «Banach-Mazur compactum», http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Banach-Mazur_compactum&oldid=42172.
[4] E. F. Krauze, *Taxicab Geometry, an adventure in non-euclidean geometry*, Dover Publications, New York, 1986.
[5] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Tracts in Math., núm. 94, Cambridge Univ. Press, 1989.
[6] W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, 3.ª ed., McGraw-Hill, 1980.
[7] ———, *Functional Analysis*, 2.ª ed., McGraw-Hill, 1991.
[8] T. Tao, «What's new, Blog de Terence Tao», https://terrytao.wordpress.com/2011/05/24/locally-compact-topological-vector-spaces.
[9] A. C. Thompson, *Minkoswski Geometry*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge Univ. Press, 1996.
[10] University of St Andrews, «The MacTutor History of Mathematics Archive», https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaplansky/quotations/.
[11] Wikipedia, «Dvoretzky's theorem», https://en.wikipedia.org/wiki/Dvoretzky%27s_theorem.
[12] ———, «John ellipsoid», https://en.wikipedia.org/wiki/John_ellipsoid.