DIRECTORIO DE APLICACIONES DEL ALGEBRA LINEAL (*)

Dr Dennis P Hurley (**)

INTRODUCCION.

La motivación del autor para escribir este Directorio de Aplicaciones del Algebra Lineal fue su experiencia personal de una falta casi completa de conocimientos sobre las aplicaciones del Algebra Lineal cuando el empezó a impartir cursos de esta materia, y esto en una materia conocida como una de las más aplicables Pláticas con sus colegas en distintos institutos de enseñanza superior del país, reveló que esta falta era casi universal y no tan trivial de superar debido a lo disperso de la literatura

Cabe la pregunta si esta falta es seria, esto es, si afecta a la apreciación, aprendizaje y retención del material por el alumno El autor opina rotundamente que si Para demostrarlo se propondrá un ejemplo: el caso de eigenvalores y eigenvectores (valores característicos y vectores

(*) Recibido en Octubre de 1974.

(**) Profesor de Carrera de la ESFM del IPN.

característicos) Considere el aumento en interés y entendimiento del alumnado si en vez de recibir únicamente la definición a secas de estos conceptos y la demostración de varios teoremas sobre ellos, el profesor los ejemplificará y los aplicará de las siguientes maneras; geométricamente: como las direcciones y las cantidades de estiramiento o de contracción de un operador en $\mathbf{R}^n$, en el estudio de cónicas: como los ejes principales y los inversos del cuadrado de la distancia al centro, en problemas de vibraciones: como los nodos y las frecuencias de vibración libre, en cadenas de Markov: como las distribuciones de población estables de una generación a otra; en el Cálculo de Varias Variables: como los determinadores de máximos y mínimos e indicando direcciones de máximo crecimiento, en Ecuaciones de Diferencias: como determinantes de la estabilidad del sistema (económico, mecánico, etc). Consultando a este directorio, el lector puede asegurarse que rige una situación similar para muchos otros conceptos del Algebra Lineal

Para el mejor entendimiento de lo que se pretende hacer en este artículo para mitigar dicha falta, ayudará una explicación más detallada de su título *Primero*, no es una lista de aplicaciones desglosadas, sino un directorio a la literatura dando referencias bibliográficas y comentarios *Segundo*, el término "Aplicación" no se usa en un sentido estricto, ya que algunas aplicaciones son más bien ejemplos de los conceptos teóricos *Tercero*, se entiende el término

"Algebra Lineal" de incluir desde polinomios, sistemas de ecuaciones y matrices hasta el estudio de las formas canónicas. Este material viene enseñado a diversos niveles educativos desde medio superior hasta cursos preparatorios para ciertas maestrías; el Directorio tiene utilidad en todo este rango. Empero fue diseñado particularmente para complementar los cursos de dos semestres de duración sobre Algebra Lineal que se suelen impartir en diversas escuelas de Física y Matemáticas y Facultades de Ciencias

La organización del Directorio es la siguiente: consiste de una lista de 19 temas teóricos en orden de creciente dificultad, cada uno seguido por una o más aplicaciones de él. Cada aplicación esta organizada como sigue: A) Campo en que se aplica, B) Nombre de la aplicación, C) Referencias bibliográficas, D) Extención relativa de la aplicación: C (corta), R(regular), ó P(proyecto), E) una indicación si se sigue el desarrollo de la misma aplicación bajo otro tema teórico, F)Comentario del autor que puede tocar cualquiera de los siguientes puntos: *i*) que conceptos teóricos se ilustra, *ii*) una descripción breve de la aplicación, *iii*) el valor del desarrollo teórico para la resolución de esta clase de aplicaciones, *iv*) un comentario para guiar al lector entre las varias referencias bibliográficas, *v*) los beneficios pedagógicos de la aplicación, *vi*) la relación con otras materias.

Una lista de los campos de aplicación es:

Análisis Númerico	Ingeniería
Biología	Matemáticas
Economía y Administración	Química
Física	Sociología
Geometría	Miscelánea

Como ejemplo del parrafo anterior:

3 MATRICES Y SUS OPERACIONES

3.13 Sociología: Un Análisis de las Decisiones de Jueces. p. 83-85 de [1], C, Sigue en 9 5 (Sencilla Ejemplifica la utilización de matrices para organizar datos, también la participación de matrices y matrices simétricas.)

Las referencias bibliográficas se denotaran por [ ] y se encuentran al final del artículo.

Finalmente el autor quisiera sugerir algunas maneras de utilizar este directorio en los cursos.

1) Lo puede leer el profesor para, al menos con conocimiento de causa, escoger y enfatizar los temas del curso

2) Lo puede citar a los alumnos para que los interesados en el lado aplicado de las matemáticas, lo pueden usar para guiar sus lecturas.

3) El profesor puede escoger ciertas aplicaciones según los intereses del grupo y presentárselas en momentos adecuados del curso.

4) El profesor puede pedir que los alumnos a lo largo del curso entregan aplicaciones del material teórico visto en la clase usando este directorio como una fuente de tales aplicaciones.

El autor ha usado una combinación de esto cuatro puntos exitósamente en varios cursos. El tiempo de clase requerido para la exposición de un número adecuado de aplicaciones, ha sido de aproximadamente 5 horas, repartidas a lo largo de cada semestre del curso.

DIRECTORIO

1 RAICES DE POLINOMIOS.

1.1 Física: La Cuerda Vibrante con Tres Masas. p. 274-278 de [21], R, Sigue en 2.4 y 14 3. (Con una clara y sencil explicación de la física y matemáticas involucradas llega a un polinomio de 3° grado cuyas raices resulten ser las tres frecuencias de vibración libre de la cuerda. Ejemplif las ideas de raices reales, número de raices de un polino de grado n, y la necesidad de poder calcular raices.)

2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

2.1 Economía y Administración: Modelos de Leontief de la Econ (Estáticos y Dinámicos). p. 21-22 de [1], p. 111-117 de [y Capítulo 13 de [7], P, Sigue en 3.3. (Una aplicación muy interesante de sistemas de ecuaciones para modelar la economía. Las referencias tienen varios modelos de difere grados de dificultad.)

2.2 Economía y Administración: Ejemplos Miscelaneos de Situac de Decisión que se puede resolver con Sistemas de Ecuacio Problemas 20,21,22,24 y 25 de p. 37-38 de [1], C. (Estos ejemplos aunque son sencillos, son más realistas que muchos ejemplos de sistemas de ecuaciones.)

2.3 <u>Física:</u> Análisis de un Círcuito Eléctrico Sencillo p. 124-218 de [20], p, Sigue 3.4, 10.3 y 18.1A. (Un ejemplo de un sistema con solución única. La unicidad de la solución es clara por razones físicas.)

2.4 <u>Física:</u> La Cuerda Vibrante con Tres Masas. p. 274-278 de [21], R, Sigue en 14.3. (El 1.1 desde el punto de vista de los sistemas de ecuaciones lineales que resulten, donde las soluciones representan los tres modos de vibración libre de la cuerda.)

2.5 <u>Ingeniería:</u> Diseño de Estructuras. p. 27-30 de [21], p, Sigue en 3.8. (Otro ejemplo de un sistema de ecuaciones con una solución única.)

2.6 <u>Ingeniería:</u> Análisis de Dimensión ("Buckingham π-Theorem"). p. 121-123 de [21], p. 234-237 de [20], R, Sigue en 7.2. (Un ejemplo de sistemas de ecuaciones lineales con un número infinito de soluciones.)

<u>MATRICES Y SUS OPERACIONES.</u>

3 1 <u>Biología:</u> Cambios en la Población de Ciertos Animales. p. 59 de [21], C. (Un ejemplo sencillo del uso de multiplicación de matrices.)

3.2 Economía y Administración: Una Aplicación a la Contaduría. p. 81-82 de [1], R, Sigue en 6.1 (Una utilización sencilla de matrices y sus operaciones aplicadas en un problema fundamental de la contaduría.)

3.3 Economía y Administración: Modelos de Leontief de la Economía (Estáticos y Dinámicos) p. 11-117 de [23] y Capítulo 13 de [7], P. (Usando matrices los sistemas de ecuaciones introducidas en 2.1 se pueden resolver y se pue dar criterios de unicidad y de existencia de soluciones

3.4 Física: Análisis de un Circuito Eléctrico Sencillo. p. 214-218 de [20], y p. 30-32 y p. 57-59 de [21], P, Sigue en 10 3 y 18.1A. (Un tratamiento matricial de 2.3 que simplifica bastante la notación llegando a lo que se conoce como " La fórmula fundamental de Kron ")

3.5 Física: Redes de Cuatro Terminales. p. 62-67 de [23] y p. 55-56 de [21], R. (Un ejemplo eléctrico para introducir la multiplicación de matrices de una manera natural.)

3.6 Física: Un Ejemplo de Mecánica Cúantica. p. 186-187 de [23], C. (Una perpectiva sobre un trabajo de Dirac en la Física usando matrices de orden 4.)

3.7 Ingeniería: Ingeniería de Comunicaciones.p 6-7 y de [1], C. (Sumas y potencias de matrices utilizadas para calcular el número de canales de información abiertos ent distintos lugares.)

3.8 Ingeniería: Diseño de Estructuras. p. 27-30 y p. 35-39 de [21], Capítulo 5 y 6 de [22], y [6], P. (La facilidad con que estudien el diseño de estructuras utilizando matrices se hace evidentemente en estas dos referencias. La tercera es muy amplia.)

3.9 Matemáticas: Cadenas de Markov. p. 134-149 de [23], p. 47-48 de [1] y p. 46-54 de [21], P, Sigue en 6.6 y 19.2. (Las primeras páginas de [23] dan muy buenas aplicaciones de representación matricial y de potencias de matrices.)

3.10 Matemáticas: La Derivación y la Solución del Problema de Ajuste de Curvas por medio del método de Mínimos Cuadrados. p. 39-46 de [21], R, Sigue en 15.3. (Una ilustración de la claridad obtenida, expresando en términos matriciales este problema importante.)

3.11 Matemáticas: Ecuaciones de Diferencias. p. 277-278 y p. 283-284 de [1], C, Sigue en 17.3. (Otra aplicación de potencias de matrices para el cálculo y el estudio de las soluciones de ecuaciones de diferencias. Se mencionan aplicaciones a la Biología y Econometría en las referencias.)

3.12 Química: Reacciones Químicas, Optimización y Cadenas de Markov [14], R. (Un ejemplo químico tratado con cadenas de Markov incluyendo una estimación en función del problema, de que potencia de la matriz de transición bastaría para que se estabilizara el proceso.)

3.13 <u>Sociología:</u> Un Analisis de las Decisiones de Jueces. p. 83-85 de [1], C, Sigue en 9.5. (Sencilla. Ejemplifica la utilización de matrices para organizar datos, también la partición de matrices y matrices simétricas.)

3.14 <u>Sociología:</u> Relaciones y " Corrillos ". p. 118-119 de [23], p. 7 de [1], R. (Otra aplicación de sumas y potencias de diferentes tipos de matrices definidas de una manera natural en base a la situación sociológica.)

4 ESPACIOS VECTORIALES.

4.1 <u>Matemáticas:</u> Diversos Ejemplos de Espacios Vectoriales. p. 459-463 de [21], C. (Una lista de bastantes ejemplos de espacios vectoriales dados en términos matemáticos. El problema de encontrar referencias bibliográficas con ejemplos específicos de espacios vectoriales en <u>otras</u> ciencias, es que tales referencias no existen ya que hay tantos ejemplos de n-adas que nadie los ha catalogado. Se supone que el profesor lo puede hacer. Sin embargo daré dos ejemplos especificos en los incisos siguientes para ilustrar lo que hay que hacer.)

4.2 Física: Coordenadas Generalizadas. p. 93-97 y p. 107-109 de [5], R, Sigue en 11.1. (Un ejemplo de un espacio vectorial de seis dimensiones que se utiliza bastante en la Física.)

4.3 Miscelánea: Ejemplos adicionales de Espacios Vectoriales. [10], C. (Incluye sistemas homogéneos de ecuaciones lineales, sistemas homogéneos de ecuaciones lineales diferenciales, coordenadas de velocidad generalizadas (para cálcular energía cinética por ejemplo), estratos de la población, etc.)

4.4 Geometría: Teoremas Básicos de la Geometría Plana demostrados por medio de Espacios Vectoriales. p. 11-14 y p. 15-16 de [18], R, Sigue en 9.1. (Puede interesar a los alumnos que han visto las demostraciones clásicas de estos resultados.)

BASES Y DIMENSION.

5.1 Matemáticas: Bases para Espacios Vectoriales de Dimensión Infinita. p. 464 de [21], C. (Vale aquí el mismo comentario que hicimos en 4.1, i.e. invente sus propias bases para los espacios vectoriales que inventó para el tema 4, ya que son demasiado sencillos en general para encontrarse en la literatura.)

5.2 Matemáticas: Bases en la Programación Lineal. p. 189-190 de [1], P, Sigue en 7.3 (Una buena ilustración a través de un problema de la Programación Lineal de la utilidad de utilizar distintas bases. También ilustra que el número de elementos de la base no varía.)

5.3 Matemáticas: Bases para el Espacio de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales. p. 190 de [1], C. (Un resultado básico en el estudio de las ecuaciones diferenciales las cuales a su vez tienen muchísimas aplicaciones.)

TRANSFORMACIONES LINEALES, TRANSFORMACIONES NO SINGULARES, Y MATRICES.

6.1 Economía y Administración: Una Aplicación a la Contaduría. p. 81-82 y p. 257-258 de [1], R. (Un ejemplo de una transformación lineal de V_6 en V_4 Es la continuación de 3.2.)

6 2 Física: La Matriz de Flexibilidad de Maxwell. p. 68-70 y p. 121 de [2], p. 134 de [22], y p. 39-42 de [6], R. (Un excelente ejemplo de un operador lineal (en un rango) de V_n en V_n, donde n lo puede escoger el lector. Queda patente aquí la relación entre matrices y transformaciones y los beneficios que se obtienen de esta relación. La matriz de flexibilidad resulta ser simétrica (ver [22]) y generalmente invertible.(Una demostración se hace usando

transformaciones no singulares.) Su inversa se conoce como la matriz de rigidez.)

6.3 Geometría: Las Transformaciones Lineales del Plano p. 470-471 de [21], R. (Ayuda a visualizar las transformaciones lineales y justifica su nombre (mandan lineas en lineas.)

6 4 Matemáticas: Diversos Ejemplos de Transformaciones Lineales en las Matemáticas. p. 467-468 de [21], C. (Los típicos, pero también ejemplifica el uso de operaciones en el conjunto de las transformaciones lineales.)

6.5 Química: Cristalografía y Matrices p. 245-248 y p. 266-268 de [1], R.

6.6 Sociología: Matrices de Markov y Transformaciones en la Composición de la Población de Inglaterra. p. 135 y p. 138 de [23], C. (Los números de personas en las clases sociales de Inglaterra forman las entradas de un vector y la matriz los transforma en los números correspondientes para la siguiente generación.)

6.7 Sociología: Transformaciones Lineales y el Estudio de Elecciones. p. 235-237 de [1], R. (Ilustra bien el paso de transformación a matriz.)

6.8 Miscelaneas: Criptografía y Transformaciones Lineales No singulares, p. 222-223 de [1], R.

7 RANGO E INVERSOS DE MATRICES.

7.1 <u>Análisis Númerico:</u> La Solución Numerica de Ecuaciones Lineales. p. 68-74 de [23] y Cap. 8 de [21], R. (Utilizando la notación matricial y la idea de rango, se introduce al lector a varios de los problemas numéricos fundamentales en la solución de sistemas de ecuaciones lineales por computadora.)

7.2 <u>Ingeniería:</u> Análisis de Dimensión. p. 234-237 de [20], p. 121-123 de [21], R. (Una aplicación interesante del rango de una matriz que se utiliza en diversos campos de la Ingeniería.)

7.3 <u>Matemáticas:</u> La Programación Lineal y el Método Simplex.

a) Referencias Generales: [13], Cap. 6 de [21] y [7]

b) Aplicaciones en otros campos: p. 11-18 de [4] y [7].

c) Relación con la Teoría de Juegos: p. 108-110 de [23], p. 411-428 de [7], P. (Una aplicación bellísima de el material visto hasta aquí en el curso. Utiliza manipulaciones de matrices, dependencia lineal, rango, y la teoria de sistemas de ecuaciones lineales. Hay muchas aplicaciones y relaciones con otras áreas de la matemática a traves de la geometría del problema y la Teoria de Juegos. Un intento del autor de este artículo a condensar y adecuar este material para utilizarlo en

7 RANGO E INVERSOS DE MATRICES.

7.1 Análisis Númerico: La Solución Numerica de Ecuaciones Lineales. p. 68-74 de [23] y Cap. 8 de [21], R. (Utilizando la notación matricial y la idea de rango, se introduce al lector a varios de los problemas numéricos fundamentales en la solución de sistemas de ecuaciones lineales por computadora.)

7.2 Ingeniería: Análisis de Dimensión. p. 234-237 de [20], p. 121-123 de [21], R. (Una aplicación interesante del rango de una matriz que se utiliza en diversos campos de la Ingeniería.)

7.3 Matemáticas: La Programación Lineal y el Método Simplex.

a) Referencias Generales: [13], Cap. 6 de [21] y [7].

b) Aplicaciones en otros campos: p. 11-18 de [4] y [7].

c) Relación con la Teoría de Juegos: p. 108-110 de [23], p. 411-428 de [7], P. (Una aplicación bellísima de el material visto hasta aquí en el curso. Utiliza manipulaciones de matrices, dependencia lineal, rango, y la teoria de sistemas de ecuaciones lineales. Hay muchas aplicaciones y relaciones con otras áreas de la matemática a traves de la geometría del problema y la Teoria de Juegos. Un intento del autor de este artículo a condensar y adecuar este material para utilizarlo en sus cursos se encuentra en [13]. Se puede verlo en tres horas de clase incluyendo varios ejemplos.)

7.4 Química: El Estudio de Reacciones Químicas. p. 239-245 de [20], R. (Obtiene varios resultados en stoichiometría usando la definición y los teoremas sobre el rango de matrices.)

7.5 Química: Operaciones Elementales Usadas para Simplificar Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. p. 245-250 de [20],R. (Modela reacciones químicas con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales se simplifican usando operaciones elementales.

DETERMINANTES.

8 1 Geometría: Formulas Geometrícas Expresadas con Determinantes. p. 224 de [21], y p. 186 de [18], C. (Expresiones sencillas para la ecuación de una recta, el área de un tríangulo, la ecuación de un círculo que atraviesa tres puntos dados, y el vólumen de un paralelepípedo (que se usa para justificar el empleo de Jacobianos en el Cálculo)).

8.2 Matemáticas: La Solución Práctica de Sistemas de Ecuaciones cuando los Coeficientes contienen Símbolos y Parámetros. p. 157 de [17] y p. 274-278 de [21], C. (Dos ejemplos de sistemas con D y λ en sus coeficientes.)

8.3 Matemáticas: Reformulación del Material Visto Anteriormente en el Curso de Algebra Lineal en Términos de Determinantes, [8], C. (Vale la pena ya que las nociones de independencia y dependencia lineal, transformaciones no singulares, rango y soluciones de sistemas de ecuaciones lineales pueden reformularse en terminos de Determinantes, con la consecuencia que se revisan y se aclaran estos conceptos importantes.

9 PRODUCTOS INTERNOS, NORMAS, DISTANCIAS, Y ANGULOS

9.1 Geometría: Teoremas Adicionales de la Geometría Plana probados por medio del Producto Interno. p. 182-184 y p. 186 de [18], R. (Difiere del 4.4 en que ahora tenemos la maquinaría suficiente para probar teoremas involucrando nociones de ángulo.)

9.2 Matemáticas: Ejemplos de varios Productos Internos. p. 484-485 de [21], C

9.3 Matemáticas: La Generalización de Resultados de una a n Variables usando la Norma. p. 75-82 de [23], R. (Incluye el método de iteración simple y el método de Newton para funciones de R^n en R .)

9.4 Matemáticas: Relaciones entre la Probabilidad y el Algebra Lineal. [9], R. (Ilustra las nociones de complemento ortogonal, proyección ortogonal, distancia, y ángulo generalizado.)

9.5 Sociología: Análisis de las Decisiones de Jueces. p. 202,203,206,207 y 208 de [1], R. (Una aplicación interesante de un producto interno en el espacio de las matrices m x h, y del ángulo generalizado definido en terminos de el. Es la continuación de 3.13.)

EXPANSIONES ORTOGONALES.

10.1 Análisis Númerico: Metodos Iterativos para el cálculo de Eigenvalores. p. 299-301 de [21], R. (Si no se tiene la definición de eigenvalor se debe posponer esta aplicación hasta llegar al tema 14)

10.2 Física: La Cuerda Vibrante con Tres Masas con Fuerzas Exteriores. p. 295-299 de [21], R. (El mismo problema atacado en 1.1 y 2.4 pero ahora con el factor adicional de fuerzas exteriores, que se logra tomar en cuenta usando expansiones ortogonales.)

10.3 Ingeniería: Análisis de la Respuesta de Circuitos Eléctricos a Señales Periódicas usando Series de Fourier. [16] ó Cap. 9 de [22] (especialmente la página 300), P, Sigue en 18.1A. (La utilidad de expresar señales periódicas en términos de su serie de Fourier se hace clara en que el análisis de circuitos generales se reduce a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.)

11 TRANSFORMACIONES ORTOGONALES.

11.1 Física: Los Angulos de Euler. p. 420-421 de [21],[15] p. 107-109 de [5], R. (El resultado básico es que si $A \in SO(3)$, A se puede expresar como la composición de tres rotaciones planas. Hay aplicaciones a la Física, y a la Química a través de las computadoras.)

12 FORMAS CUADRATICAS.

12.1 Geometría: Cónicas. p. 378-385 de [21], R, Sigue en 13.1. (El tratamiento de cónicas en R^2 y R^3 con álgebra sencillo comparado con el tratamiento con matrices. En 13.1 se logra la clasificación completa.)

12.2 Química: Ejes Opticos de Cristales. p. 312-313 de [1], C.

12.3 Miscelánea: Listas de Ejemplos de Formas Cuadráticas. p 93 de [23] y p. 386-387 de [21], C. (Una fuente de ejemplos de formas cuadráticas muchas de las cuales se desarrollarán en los temas 13,14,15 y 16.

13 CONGRUENCIA Y FORMAS CUADRATICAS DEFINIDAS.

13.1 Geometría: Cónicas. p. 378-385 y p. 419 de [21], R. (La clasificación general de cónicas en R^2 y R^3 mediante un criterio que se aplica fácilmente Sirve para ejemplif· la Ley de Inercia de Sylvester y para motivar el estudio de la diagonalización de matrices simétricas mediante matrices ortogonales (congruencia ortogonal).

13.2 <u>Matemáticas:</u> Puntos Críticos de Funciones de R^n en R. p. 329-331 de [1],[11], R. (La generalización del "criterio de la segunda derivada" a funciones de varias variables para el cálculo de máximos y mínimos, el cual encuentra aplicación en diversos campos. Ilustra el uso de formas canónicas bajo la relación de congruencia.)

<u>EIGENVALORES Y EIGENVECTORES.</u>

14.1 <u>Análisis Númerico:</u> El Cálculo de Eigenvalores usando el Principio de Rayleigh y el Método del Minmax. p. 404-416 de [21], p. (Una aplicación de formas cuadráticas al cálculo de eigenvalores a través de estos dos famosos métodos.)

14.2 <u>Biología:</u> Poblaciones Estables. p. 275-276 de [1] y p. 138-139 de [23], R. (El eigenvector representa una distribución de la población en ciertas categorías cuyas proporciones relativas quedan estables de una generación a otra.)

14.3 <u>Física:</u> La Cuerda Vibrante con Tres Masas. p. 274-278 de [21], R. (El mismo ejemplo que fue tratado en forma elemental anteriormente Ahora se reconocen los eigenvalores como las frecuencias de vibración libre y los eigenvectores como los modos de vibración libre.)

14.4 <u>Geometría:</u> Los Ejes Principales de las Cónicas. p. 378-385 de [21], R. (Aquí los eigenvectores de la matriz asociada a la cónica resulten ser los ejes principales y los eigenvalores representan el inverso del cuadrado de la distancia del centro de la cónica a la superficie de la cónica.)

14.5 <u>Ingeniería:</u> Las Direcciones Prinicipales de Carga en un Punto de un Cuerpo Elástico. p. 135-136 de [22], R. (Las direcciones principales son los eigenvectores y los eigenvalores se llaman las flexibilidades.)

15 <u>EL TEOREMA DE LOS EJES PRINCIPALES.</u>

15.1 <u>Ecuaciones Diferenciales:</u> (Debido a que se necesitará técnicas de los temas 15,16,17,18 y 19 para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes (según la complejidad de la matriz A, etc.) se introducirá un superinciso de Ecuaciones Diferenciales en estos temas y se indicará en cada inciso particular el campo y tipo de sistema que se resolverá. Esto debe pe al lector ver como la complejidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales va requiriendo más y más sofisticación del Algebra Lineal necesario para su resolución.)

<u>Ingeniería:</u> Vibraciones de Sistemas Mecánicos y Eléctricos resueltos con Sistemas de 2° Orden. p. 150-177 de [23], p 310 de [21], p. 234,239,246,251,265,271 de [22],[3], P. (Varios problemas de vibración resueltos con el Teorema de los Ejes Principales. La referencia [23] es sencilla y detallada; explica bien el paso del ejemplo físico a través de la ecuación de Lagrange al problema matricial. Los ejemplos de [21] y [22] son muy variados e involucran matrices de varios tamaños. [3] es un libro entero de problemas de vibraciones para Ingenieros repleto de ejemplos prácticos.)

B Química: Vibraciones de la Molécula de Ozono O_3. p. 374-377 de [21] y p. 284-317 de [19], P. (Este problema es similar a los de 15.1A excepto que la matriz es de orden 9 ó 6, según como se considera el problema. Resulta difícil calcular eigenvalores y eigenvectores para matrices de este tamaño o mayores y por lo tanto, las referencias desarrollan dos métodos alternativos al cálculo directo de los eigenvalores. Además estos métodos hacen que se entienda mejor el problema. Ambos métodos utilizan la simétria de la molécula para en el primero definir una matriz de permutación, y en el segundo (que presupone representación de grupos finitos) para definir una representación y encontrar subespacios invariantes irreducibles. Este problema interesa mucho por los métodos aparentemente tan alejados de resolverlo y que el último método abre el camino hacia el Algebra Moderna.)

15.2 Física: Los Ejes Principales de Inercia. [12], R. (El Teorema de los Ejes Principales se utiliza para demostrar que para cualquier cuerpo existen tres direcciones principales de inercia y que son ortogonales.)

15.3 Matemáticas: Regresión Lineal.p. 120-133 de [23], R. (Incluye la parte de Mínimos Cuadrados que realmente pertenece a la Inferencia Estadística. Se demuestran los resultados usando matrices y el resultado clave depende directamente del Teorema de los Ejes Principales.)

15.4 Química: Diagonalización y Optimización de Rendimientos en la Industria Química. p. 388-391 de [21], R.(Un ejemplo que ilustra la necesidad práctica de poder diagonalizar con matrices ortogonales y da una interpretación de las magnitudes y signos de los eigenvalores. Muy estimulante para los alumnos.)

15.5 Química: Un Estudio de la Estructura de Sistemas de Reacciones Químicas Lineales. p. 251-265 de [20], P.

(Ilustra bien la utilidad de matemáticas relativamente sofisticadas a la química experimental.)

6 DIAGONALIZACION SIMULTANEA.

16.1 Ecuaciones Diferenciales.

A Física: Oscilaciones del Péndulo Doble Analizado a través de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Acoplamiento Dinámico p. 285-291 de [19], R. (Se llega al sistema $A\ddot{X} + BX=0$ pero como ni A ni B son multiplos de I se necesita una técnica mas refinada que en el 15.1)

B Ingeniería: Oscilaciones de Sistemas Mecánicos ó Eléctricos Conservativos. p. 331-333 de [1] (Similar al ejemplo anterior)

7 SEMEJANZA Y MATRICES DIAGONALES.

17.1 Ecuaciones Diferenciales.

A Ingeniería: Un Círcuito L-C con Inductancia Mutua, Resuelto con un Sistema de 1° orden con la Matriz de Coeficientes No-Simétrica p. 311 de [21].

17.2 Física: Los Teoremas de Euler y Chasles sobre Desplazamientos de Cuerpos Rígidos. p. 118-124 de [5], R. (El resultado clave consiste en un buen entendimiento de los eigenvalores y eigenvectores de las matrices que pertenecen al grupo ortogonal especial, SO(3). Esta aplicación puede ser utilizada para ilustrar el Teorema Espectral.)

17.3 Matemáticas: Soluciones y Estabilidad de Ecuaciones de Diferencias Utilizando Semejanza de Matrices. p. 277-278 y 283-284 de [1], R. (Las ecuaciones de diferencias tienen aplicaciones muy variadas en biología, economía, finanzas, e ingeniería. La idea es que A^k es fácil de calcular si A es diagonalizable.)

BIORTOGONALIDAD.

18.1 Ecuaciones Diferenciales.

A Ingeniería: El Estudio de Corrientes Transitorios en un Circuito L-C-R con Emf. p. 102-110 de [20], R. (Ilustra el teorema de diagonalización bajo la condición de eigenvalores distintos. También ilustra el reemplazo para matrices no-simetricas del método de expansiones ortogonales por el método de biortogonalidad.)

LA FORMA CANONICA DE JORDAN.

19.1 Ecuaciones Diferenciales.

A Matemáticas: Soluciones de Sistemas de 1° y 2° orden con Coeficientes Constantes. p. 366-370 de [21] y p. 83-84 de [23] y p. 256-262 de [22], P. ([21] resulve el problema al grupo ortogonal especial, SO(3) Esta aplicación puede ser utilizada para ilustrar el Teorema Espectral.)

17.3 Matemáticas: Soluciones y Estabilidad de Ecuaciones de Diferencias Utilizando Semejanza de Matrices. p. 277-278 y 283-284 de [1], R. (Las ecuaciones de diferencias tienen aplicaciones muy variadas en biología, economía, finanzas, e ingeniería. La idea es que A^k es fácil de calcular si A es diagonalizable.)

BIORTOGONALIDAD.

18.1 Ecuaciones Diferenciales.

A Ingeniería: El Estudio de Corrientes Transitorios en un Circuito L-C-R con Emf. p. 102-110 de [20], R. (Ilustra el teorema de diagonalización bajo la condición de eigenvalor distintos También ilustra el reemplazo para matrices no-simetricas del método de expansiones ortogonales por el método de biortogonalidad.)

LA FORMA CANONICA DE JORDAN.

19.1 Ecuaciones Diferenciales.

A Matemáticas: Soluciones de Sistemas de 1° y 2° orden con Coeficientes Constantes. p. 366-370 de [21] y p. 83-84 de [23] y p. 256-262 de [22], P. ([21] resulve el problema para sistemas de 1° orden; [22] y [23] hacen lo mismo para los de 2° orden. Claras presentaciones de la dificultad cuando la matriz no es diagonalizable y como se utiliza la forma canónica de Jordan en tales casos.)

B <u>Ingeniería</u>: Un problema en la Teoría de Control
p. 253-254 de [1], R. (Un ejemplo específico de la necesidad de toda la generalidad de los métodos del inciso anterior)

19.2 <u>Matemáticas</u>: Cadenas de Markov y Distribuciones Estacionarias.
p. 134-149 de [23] y p. 457-458 de [21], P. ([23] trae una demostración bastante clara del Teorema de Regularidad (existencia de distribuciones estacionarias) utilizando la forma canónica de Jordan El teorema tiene varias aplicaciones interesantes.)

19.3 <u>Química</u>: Optimización y Cadenas de Markov. [14], R. (Una aplicación a la química del teorema probado en el inciso anterior.)

BIBLIOGRAFIA

[1]# Campbell, Hugh G. Linear Algebra with Applications including Linear Programming. New York, Appleton-Century-Crofts, 1971.

[2] Davis, P.J. The Mathematics of Matrices. Waltham, Massachusetts, Blaisdell Publishing Company, 1965.

[3] Den, J.P. Mecánica de las Vibraciones. México, D.F. CECSA, 1954.

[4] Gass, Saul I. Linear Programming. New York, McGraw-Hill Book Company, 1969.

[5] Goldstein, Herbert. Classical Mecanics, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1950.

\# Libros con Bibliografia amplia sobre el Algebra Lineal y sus aplicaciones.

* Apuntes hechos por el autor y sus alumnos que se puede pedir al autor.

5] Gradowczyk, Mario H. Cálculo Matricial de Estructuras. Buenos Aires, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1966.

7] Hadley, G. Linear Programming. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.

8]* Hurley, Dennis P. et al. Algebra Lineal y Determinantes. Apuntes, E.S.F.M. del I.P.N., 1974.

9]* Hurley, Dennis P. et al. Algebra Lineal y Probabilidad. Apuntes, E.S.F.M. del I.P.N., 1974.

0]* Hurley, Dennis P. et al. Ejemplos de Espacios Vectoriales. Apuntes, E.S.F.M. del I.P.N., 1974.

1]* Hurley, Dennis P. et al. El Criterio de la Segunda Derivada. Apuntes, E.S.F.M. del I.P.N., 1974.

2] Hurley, Dennis P. et al. Momentos de Inercia. Apuntes, E.S.F.M. del I.P.N., 1974.

3]* Hurley, Dennis P. et al. Programación Lineal. Apuntes, E.S.F.M. del I.P.N., 1974.

4]* Hurley, Dennis P. et al. Reacciones Químicas, Optimización y Cadenas de Markov. Apuntes, E.S.F.M. del I.P.N , 1974.

[15] Hurley Dennis P. et al. Teoria de Rotaciones con aplicaciones a la Estereoquimica, apuntes del I.P.N., 1974.

[16]* Hurley, Dennis P. et al. Círcuitos Eléctricos y Series de Fourier. Apuntes, E.S.F.M. del I.P.N., 1974.

[17] Kells, L.M. Elementary Differential Equations, 6a ed. New York, McGraw-Hill Book Company, 1965.

[18] Moore, John T. Elements of Linear Algebra and Matriz Theor New York, McGraw-Hill Book Company, 1968.

[19] Nering, E.D. Linear Algebra and Matriz Theory, 2a ed. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1970.

[20] Noble, B. Applications of Undergraduate Mathematics, in Engineering. New York, The Macmillan Company, 1967.

[21]# Noble, B. Applied Linear Algebra. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1969.

[22] Pipes, Louis A. Matrix Methods for Engineering. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc , 1950.

[23]# Summer Conference for College Teachers on Applied Mathematics University of Missouri-Rolla, 1971. Berkeley, California, CUPM, 1973.

DENNIS P. HURLEY
E.S.F.M. del I P.N.