MISCELÁNEA MATEMÁTICA **28** (1999) 1–10 SMM

De una integral a otra ¿Cuál escoger?

(El dilema entre la integral medidora y la integral de Riemann)

Carlos Bosch*
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo#1
01000 México D.F.
México
Profesor Visitante en Washington State University

Jan Kucera
Department of Pure and Applied Mathematics
Washington State University
99163 Pullman, Wa.
USA

1 Introducción.

Empezaremos este artículo con una carta abierta firmada por R. Bartle, R. Henstock, J. Kurzweil, E. Schechter, S. Scwabik y R. Výborný cuyo asunto versa sobre el cambio de la integral de Riemann por la integral *medidora.*

> Ha sido solamente un accidente de la historia que sea la integral de Riemann la que se usa en todos los libros de cálculo. La integral medidora (también conocida como la integral generalizada de Reimann, la integral de Henstosck, la integral de Kurzweil, la integral completa de Reimann, etc...) fue descubierta más tarde pero es en todos o casi

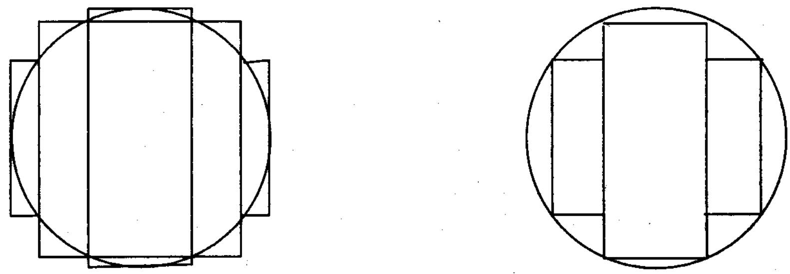
*Parcialmente apoyado por Fulbright# 22729

> todos los aspectos una mejor integral. Así que permitanos sugerirles que en las siguientes ediciones de sus libros de cálculo, presenten ustedes ambas, la integral de Riemann y la medidora y que se enuncien los teoremas esencialmente para la integral medidora. El cambio va a requerir solo una pequeña alteración en sus libros de cálculo. Cualquier libro elemental de cálculo dedica casi todo el libro a derivadas y antiderivadas —como calcularlas y como aplicarlas— ese material no cambiaría. Los únicos cambios vendrían en las secciones más teóricas del libro es decir en las definiciones y en los teoremas que sólo ocupan algunas páginas.
>
> La razón para hacer estos cambio son esencialmente dos:
>
> (1) Harían ciertas partes de sus libros más fáciles de leer. Algunos teoremas y definiciones se pueden enunciar de manera más sencilla (y fuerte) si se usa la integral medidora en vez de la integral de Reimann. Esto es particularmente cierto para el segundo teorema fundamental del cálculo.
>
> (2) Los estudiantes que van a llevar cursos de matemáticas más avanzados obtendrían una mejor preparación. La integral medidora es mucho más útil que la integral de Reimann y sirve como puente para el análisis más avanzado.

La carta sigue explicando un poco más en detalle algunas propiedades de la integral medidora. Pero ¿Quién es esa integral? ¿De dónde viene y qué características tiene? Si sigue usted leyendo las siguientes páginas tal vez sea usted el primero en escribir un libro de cálculo en el que aparezca la integral medidora.

2 Un poco de historia.

Hay indicios de que las ideas básicas de la integración ya las tenían los sabios de la época griega. El problema de integración lo veían como el problema de la cuadratura: Dada una figura plana, construir un cuadrado que tenga área igual a la figura. Tal vez el primero en obtener resultados en ese sentido fue Hipócrates en el siglo V a.n. En el siglo III a.n. Arquímedes encontró la cuadratura de un segmento de parábola. Tiene varios trabajos sobre integración y su trabajo contiene métodos ingeniosos para usar aproximaciones superiores e inferiores de áreas de figuras que contienen una suma de rectángulos o que están contenidos en una suma de rectángulos, como se indica en las dos figuras siguientes:



Arquímedes se apoyaba en el método de exhaución, evitando así el uso explícito del concepto de límite. Mucho después, usando técnicas distintas a las de los griegos, Cavalieri (1598-1647) logró calcular lo que actualmente denotamos por $\int_0^1 x^k dx$ para $k = 1, 2, \ldots$. Su mayor dificultad fué evaluar la suma $1^k + 2^k + \cdots + n^k$. Hacia 1650, Fermat, con un brillante y sencillo computo, calculó $\int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx$. Pascal a su vez interpretó las sumas hechas por Cavalieri (el equivalente al área bajo la curva) como una suma infinitesimal de rectángulos. Si combinamos los resultados de Fermat, Cavalieri y Pascal, a mediados del siglo XVII se podían evaluar integrales del tipo $\int_a^b P(x)dx$ donde $P(x)$ es un polinomio con exponentes racionales.

En 1647 Gregory St. Vincent hizo el descubrimiento que asociaba la función logaritmica de Napier con la hipérbola $xy = 1$, esta conexión la denotamos actualmente como $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

A Newton y Leibniz se les acredita el invento del cálculo hacia 1670, que es cuando desarrollan su teorema fundamental, es decir, que las áreas se calculan esencialmente usando antiderivadas. Posteriormente, Cauchy investigó las integrales de funciones continuas y da, en 1820, la primera definición rigurosa de la integral definida. Poco despUés Riemann refinó la definición de Cauchy e investigó integrales de funciones discontinuas. Sin embargo, la teoría de integración de Reimann no es totalmente satisfactoria pues muchas funciones importantes resultan no ser integrables, aún cuando se use la integral impropia de Riemann. Aún para esas funciones integrables es difícil probar *buenos* teoremas de convergencia. El límite puntual de una sucesión de funciones integrables, en el sentido de Riemann, y acotadas puntualmente no resulta ser necesariamente Riemann integrable. Por ejemplo como los racionables son numerables, la función característica de los racionales se puede ver como el límite puntual de una sucesión de funciones Riemann integrables pero la función límite no es una función Riemann integrable.

A principios del siglo XX, en 1902, Henri Lebesgue descubrió una nueva integral sin todos los inconvenientes de la integral de Riemann. Esto hace que se tenga una clase de funciones integrables más amplia. Sin embargo al comparar la integral de Lebesgue con la integral impropia de Riemann se ve que ninguna de las dos es más general que la otra.

En 1912 Armand Denjoy y en 1914 Oskar Perron independientemente nos dan una noción más general del concepto de integral, sus integrales resultan ser equivalentes.

Posteriormente, Ralph Henstok (1955) y Jaroslav Kurzweil (1957) por separado dieran una formulación mucho más simple de la integral de Denjoy-Perron. La integral de Henstock-Kurzweil o integral medidora es tan buena como la integral de Lebesgue y la definición es un poco más complicado que la de la integral de Riemann, pero sólo un poco.

Hemos llegado al momento de conocer un poco más de cerca esta integral medidora o integral de Henstock, Kurzweil, Denjoy y Perron.

3 La nueva integral.

Antes de definir la nueva integral en la forma dada por Henstok (1955) y Kurzweil, recordemos una vez más la definición de la integral de Riemann. Por el momento sólo vamos a considerar el caso de las integrales propias. Hay muchas y muy distintas formas de dar esta definición, pero la que hemos elegido aquí es la que nos va a permitir la generalización que estamos buscando.

Definición 1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea R un número real, R es la integral de Riemann de f, denotada por $R = \int_a^b f(t)dt$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ y $s_1, s_2, \dots, s_n$ números reales tales que

$$a = t_0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s_n \leq t_n = b \quad \text{y} \quad t_i - t_{i-1} < \delta$$

para toda i, entonces

$$\left| R - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon\,.$$

Una pequeña modificación a esta definición permite obtener la integral de Henstock y Kurzweil que denotaremos como la integral HK.

Definición 2. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea K un número real, K es la integral HK de f y la denotamos $K = HK \int_a^b f(t)dt$, si para cada ε existe una función $\delta\colon [a,b] \to (0,\infty)$, llamada *función medidora*, tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $s_1, s_2, \ldots, s_n$ números reales tales que $a = t_0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s_n \leq t_n = b$ y que $t_i - t_{i-1} < \delta(s_i)$ para toda i en $\mathbb{N}$, entonces

$$\left| K - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon\,.$$

El único cambio que se ha hecho está en δ, en el caso de Riemann δ es una constante que depende de ε, en el caso HK para cada ε se tiene una función cuyo dominio es $[a,b]$. Además, la condición $t_i - t_{i-1} < \delta$ ha sido sustituido por $t_i - t_{i-1} < \delta(s_i)$. Este pequeño cambio en la definición tiene enormes repercuciones.

La integral HK tiene una definición mucho más sencilla que la definición de la integral de Lebesgue que tiene que recurrir a las σ-álgebras y a las medidas.

Hay una relación interesante que liga la integral HK con la de Lebesgue y es el siguiente teorema.

Teorema 3. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces f es Lebesgue integrable si y solo si f y $|f|$ son HK integrables. Además, en tal caso, los valores de ambas integrales coinciden.*

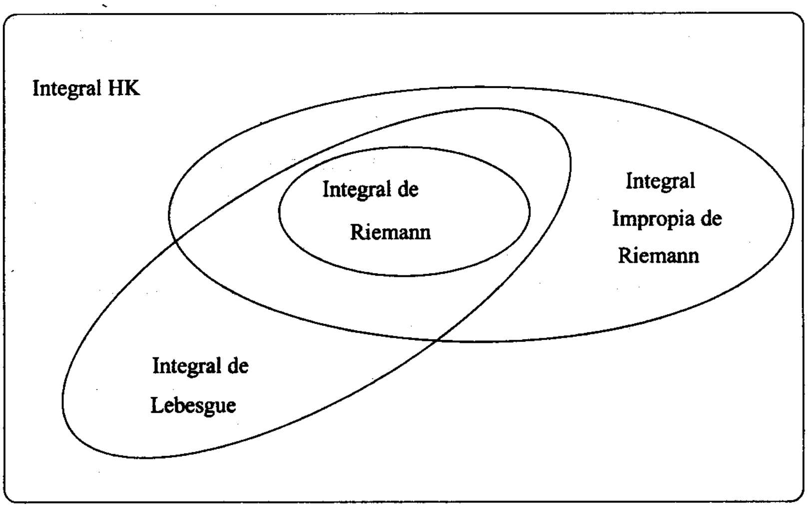
De modo que para funciones no negativas las integrales coinciden. La prueba de este teorema no tiene cabida en este panorama general. Sólo indicaremos que el camino más corto para probarlo es primero usando la definición dada por Perron para ver la equivalencia con la integral de Lebesgue y luego probando que la integral de Perron y la integral HK son equivalentes.

Este teorema nos dice que toda integral de Lebesgue es una integral HK, además es inmediato ver que la integral propia de Riemann es un caso particular de la integral HK. Así que ahora veremos qué sucede con la integral impropia de Riemann. El siguiente teorema nos da la respuesta:

Teorema 4. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *donde* a *puede tomar el valor* $-\infty$. *Supongamos que la integral HK,* $K(x) = \int_x^b f(t)dt$ *existe para cada* $x \in (a,b)$ *y que* $\lim_{x \to a^-} K(x) = L$. *Entonces la integral HK existe y* $HK \int_a^b f(t)dt = L$.

Este teorema se puede interpretar diciendo que el conjunto de funciones HK integrables no se puede extender añadiendo funciones con *integrales impropias* o bien que todas las *integrales impropias* son *propias*. Como las funciones Riemann integrables también son HK integrables, tenemos que si la integral impropia de Riemann existe, entonces la integral existe como una integral HK. Es interesante notar que la integral se puede evaluar como un límite.

El siguiente diagrama muestra como están relacionadas varias integrales.



4 Algunos ejemplos.

Como indica el diagrama anterior no toda integral impropia de Riemann es una integral de Lebesque, sin embargo siempre es una integral HK.

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{si } x \in (0,1] \end{cases}$

esta es una función diferenciable en cualquier punto de $[0,1]$. Consideremos su derivada y definamos

$$F(x)=\int_0^x f'(t)dt \qquad \text{(integral impropia de Riemann)}$$

para $x\in[0,1]$.

Como $\int_0^x |f'(t)|dt$ es infinito $(x\neq 0)$, tenemos que $F(x)$ no es la integral de Lebesgue de ninguna función. Sin embargo $F(x)=f(x)$ es la integral impropia de Riemann de $f'(x)$ y por lo tanto también es la integral medidora de $f'(x)$. En resumen, tenemos un ejemplo de una función que es HK integrable, pero no Lebesgue integrable. Veamos otro ejemplo en el que exhibimos claramente la función medidora.

Para esto consideremos $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } t=0\\ \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } t\in(0,1]\end{cases}$

y veamos que se tiene $HK\int f(t)dt=2$. Sea $\varepsilon>0$, tomaremos $\delta(0)=\frac{1}{16}\varepsilon^2$ y para cada $s>0$ sea $\delta(s)>0$ suficientemente pequeña de manera que: $[u,v]\subseteq(s-\delta(s),s+\delta(s))$ implique $\left|\frac{2}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}-\frac{1}{\sqrt{s}}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ de donde se sigue que $\left|2\sqrt{t_i}-2\sqrt{t_{i-1}}-f(s_i)(t_i-t_{i-1})\right|<\frac{1}{2}(t_i-t_{i-1})\varepsilon$ si $s_i\neq 0$ y esa cantidad es menor que $\frac{1}{2}\varepsilon$ si $s_i=0$.

De esto se deduce que $|2-\sum f(s_i)(t_i-t_{i-1})|<\varepsilon$.

El argumento anterior prueba la existencia de una función δ medidora, pero algunos escépticos querrán ver la fórmula explícita para δ, lo cual es un poco más complicado pero una posibilidad es $\delta(s)=\min\left(\frac{1}{2}s,\frac{1}{4}s^{\frac{3}{2}}\varepsilon\right)$ si $s>0$. Para ver que esta función sirve basta ver que si $|s-u|<\delta(s)$ entonces $u>\frac{1}{2}s$ de donde

$$\sqrt{su}\,(\sqrt{u}+\sqrt{s})>s^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+1\right)>\frac{1}{2}s^{\frac{3}{2}}$$

por lo tanto

$$\left|\frac{1}{\sqrt{s}}-\frac{1}{\sqrt{u}}\right|=\left|\frac{u-s}{\sqrt{su}\,(\sqrt{u}+\sqrt{s})}\right|<\frac{\delta(s)}{\frac{1}{2}s^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Así que $\frac{1}{\sqrt{u}}\in\left(\frac{1}{\sqrt{s}}-\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{\sqrt{s}}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, análogamente $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ también está en ese intervalo si $|s-u|<\delta(s)$. Finalmente $\frac{2}{\sqrt{u}+\sqrt{s}}$ se encuentra entre $\frac{1}{\sqrt{u}}$ y $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ ya que $\frac{\sqrt{u}+\sqrt{\nu}}{2}$ está entre $\sqrt{u}$ y $\sqrt{\nu}$.

Un último ejemplo es el de la función $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in Q \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } t \in (Q \cap [0,1])^c \end{cases}$$

Para ver que h es HK integrable consideremos los racionales en el $[0,1]$ y numerémoslos $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Sea $\varepsilon > 0$ y

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} & \text{si } x = r_i \\ 1 & \text{en los otros casos}\,. \end{cases}$$

Como $h(x) = 0$ para x irracional tendremos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1})\right| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon$$

si $t_i - t_{i-1} < \delta(s_i)$ ya que la única contribución posible de que alguna s_i sea racional y por lo tanto $f(s_i) = 1$, además s_i puede a lo más estar en dos intervalos (en caso de que sea uno de los t_i, en $[t_{i-1}, s_i]$ y en $[s_i, t_{i+1}]$ por eso aparece el 2 delante de la sumatoria). Con esto vemos directamente que f es HK integrable.

5 Que tan *buena* es cada una de las integrales.

Para esto vamos a probar el teorema fundamental del cálculo para las integrales de tipo HK de modo que entonces tendremos una propiedad que no cumple la integral de Lebesgue. Posteriormente veremos que la integral HK también cumple el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue de manera que la integral HK tendrá una propiedad que no cumple la integral de Riemann. En resumen, la integral HK resulta ser mejor que la integral de Riemann (propia e impropia) o la de Lebesgue.

Teorema 5. (Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral HK). *Si $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo punto del intervalo $[a,b]$, entonces $f = F'$ resulta HK integrable y HK $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Demostración: Si $s \in [a,b]$, como $f(t) = F'(t)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon(s) > 0$ tal que si $0 <\mid z - t \mid< \delta_\varepsilon(s)$, con $z \in [a,b]$, entonces

$\left|\frac{F(z)-F(s)}{z-s} - f(s)\right| \leq \varepsilon$. Así que tomaremos una función δ_ε definida en $[a,b]$. De la última desigualdad obtenemos

$$| F(z) - F(s) - f(s)(z-s) | \leq \varepsilon \mid z - s \mid .$$

De manera que si tenemos $a \leq u \leq s \leq v \leq b$ y $0 < v - u < \delta_\varepsilon(s)$, usando lo anterior, se tiene que $| F(v) - F(u) - f(s)(u-v) | \leq | F(v) - F(s) - f(s)(v-s) | + | F(s) - F(u) - f(s)(s-u) | \leq \varepsilon(v-s) + \varepsilon(s-u) = \varepsilon(v-u)$.

Ahora si tomamos los puntos $a = t_0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s_n \leq t_n = b$ para cada s_i se tiene

$$\left|F(a) - F(b) - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} F(t_i) - F(t_{i-1}) - f(s_i)(t_i - t_{i-1})\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |F(t_i) - F(t_{i-1}) - f(s_i)(t_i - t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario y esto prueba que f es HK integrable y que

$$HK \int_a^b f = F(b) - F(a) .$$

□

Una de las principales razones por los que la integral de Lebesgue es importante es por los teoremas de convergencia. Algo sorprendente es que estos también se cumplen para la integral HK. No es difícil probar que si la sucesión de funciones (f_n), HK integrables, converge uniformemente a f en $[a,b]$, entonces f también es HK integrable y $HK \int_a^b f = \lim\limits_{x\to\infty} HK \int\limits_a^b f_n$, pero las hipótesis impuestas son muy fuertes. Sin embargo, el teorema de la convergencia monótona también es cierto para las funciones HK integrales.

Teorema 6. (Teorema de la Convergencia Monótona para Integrales HK). *Sea (f_n) una sucesión de funciones HK integrables que es monótona creciente tal que para todo elemento x en $[a,b]$ se tiene $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \ldots$ y $f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ entonces f es HK integrable si y sólo si $\sup\limits_n HK \int\limits_a^b f_n < \infty$ en cuyo caso*

$$HK \int\limits_a^b f = \lim_{x\to\infty} HK \int\limits_a^b f_n .$$

Antes de terminar enunciaremos el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para integrales HK. La prueba de este teorema se hace usando el teorema anterior, pero para no hacer esta exposicion tecnica y pesada no haremos la prueba de estos teoremas.

Teorema 7. (Teorema de la Convergencia Dominada para integrales HK). *Sea (f_n) una sucesión de funciones HK integrables y sean g y h dos funciones HK integrables tales que, para cada x en $[a,b]$, se cumple que $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ y $f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, entonces*

f es HK integrable y $HK\int_a^b f = \lim_{x\to\infty} HK\int_a^b f_n.$

6 Conclusión.

Primero observemos que esta teoría se puede extender para funciones con valores complejos, o funciones con valores en $\mathbb{R}^m$ con $m > 1$. También es posible extender esta teoría a intervalos no compactos o dominios no compactos y, a pesar de que hay ciertas complicaciones, se llega a los resultados esperados. Nos parece que claramente esta teoría es más sencilla y general que la integral de Lebesgue.

Finalmente agradecemos a los revisores de este artículo sus atinadas sugerencias.

Referencias

[1] Bartle R., etal., *Carta en internet*, Vanderbilt University

[2] Bartle R., *Return to the Riemann Integral* Amer. Math. Monthly (1996), 625–632.

[3] J. Depree and C. Swartz, *Introduction to Real Analysis* (1988), John Wiley & Sons.

[4] E. Schechter, *An introduction to the gauge integral*, disponible en la red. (Vanderbilt University), 1998

[5] A. Shenitzer and J. Steprans, *Evolution of Integration* Amer. Math. Monthly (1994)