Miscelánea Matemática **22**, *23–36 (1995)*

Un problema de dobleces

Carlos Bosch Giral
Instituto Tecnológico Autónomo de México
México, D.F.

Benjamín Itza*
Universidad Autónoma de Yucatán

1 Introducción.

Tome una hoja de papel dibuje una circunferencia y un punto F fuera de ella. Ahora, doble la hoja de modo que F coincida con algún punto de la circunferencia. Imagine que la hoja es un plano y el doblez que acaba de hacer una recta (Figura 1).

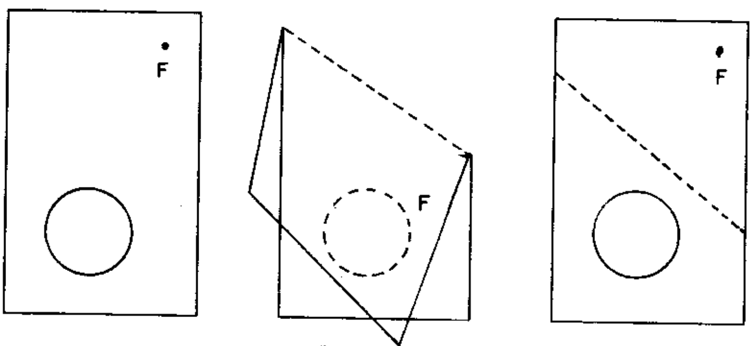
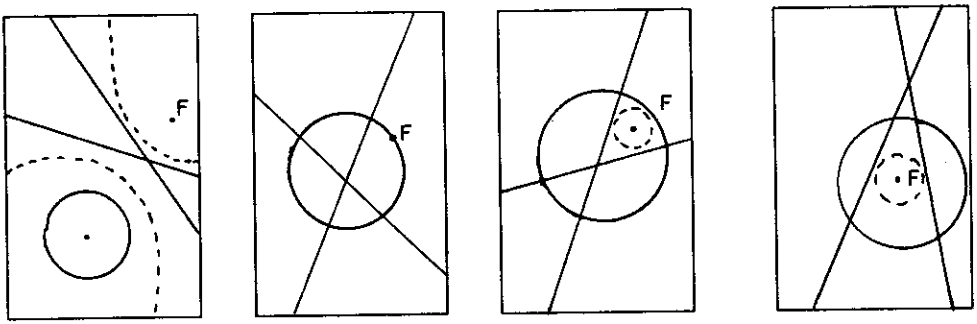


Figura 1

*Durante la elaboración de este trabajo, este autor recibió una beca del Programa: II Verano de la Investigación Científica de la A.I.C.

Haga tantos dobleces como pueda usando cada vez puntos distintos de la circunferencia. Si ya ha hecho suficientes dobleces, podrá observar que el cúmulo de rectas que hemos hecho ocupa cierta región del plano y el resto va formando una figura ¿la puede usted identificar? Si le es difícil reconocerla, tal vez se deba a que le hacen falta más dobleces, haga tantos más como necesite y ahora si, observe su hoja y reconozca la figura ¡En efecto! parece ser una hipérbola (Figura 2a) y las rectas que hicimos (dobleces) son tangentes a ella. Imagínese ahora que F está sobre la circunferencia ¿qué ocurre al hacer los dobleces? Sucede que todas las rectas van a pasar por el centro (Figura 2b). Bien, ahora, usando su intuición ¿qué pasaría si F está dentro de la circunferencia? Si pensó en una elipse está en lo correcto (Figura 2c). En particular, si se toma F en el centro de la circunferencia, obtendremos otra circunferencia cuyo radio será la mitad del radio de la circunferencia original, pero con el mismo centro (Figura 2d).



(a) (b) (c) (d)

Figura 2

2 Primera demostración.

Volvamos al asunto de la hipérbola. No sería raro que algún escéptico dijera que la figura de su hoja parece una de tales cónicas, pero ¿comó estar seguro?

Si usted es una de esas personas vamos a darle gusto. En matemáticas no es suficiente ver que nuestra figura parezca una hipérbola para afirmar que en efecto lo es, así que tenemos que demostrarlo. A continuación aclararemos esto.

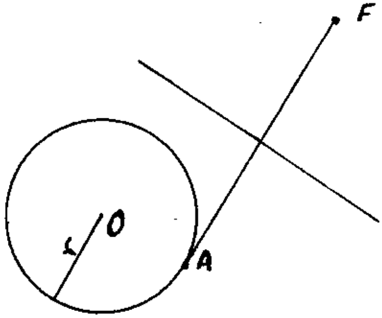


Figura 3

Iniciaremos por llamar O al centro de la circunferencia y r a su radio, para referirnos a la circunferencia usaremos la notación $C(O,r)$, al conjunto de rectas que creamos (dobleces) le llamaremos familias de rectas ℓ. Ahora bien, observe que para cualquier punto A que se tome de $C(O,r)$ la recta ℓ, correspondiente al doblez que obtenemos al unir los puntos A con F, es perpendicular al segmento AF y pasa por su punto medio (Figura 3), o sea, ℓ es mediatríz de AF.

Sea M la intersección de la prolongación de OA con la recta ℓ (Figura 4). Vamos a probar que M es un punto de una hipérbola.

Tenemos que $AM = AF$ por ser ℓ mediatríz de AF y como $MO = MA + AO$ entonces, al sustituir nos queda $MO = MF + AO$. De aquí $MO - MF = MF + AO - MF = AO = r$, que es una constante.

Por lo tanto, por definición, M es un punto de la hipérbola de focos O y F.

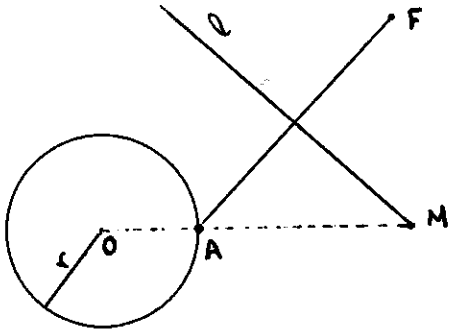


Figura 4

3 Segunda demostración.

Usando un poco de geometría analitíca, dispongamos nuestra problema en una gráfica como en la Figura 5, de modo que las coordenadas de F, O y A son $(0,a),(0,-a)$ e (i,j) respectivamente. Note que las coordenadas de A varían a medida que se mueve sobre $C(O,r)$.

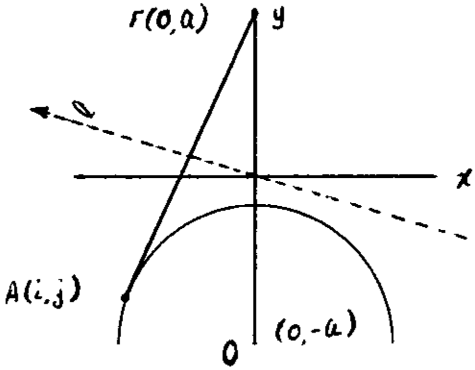


Figura 5

Vamos a proponer como focos a los puntos fijos O y F. Ahora bien, cuando en particular movamos A hasta que tenga las coordenadas $(0,-a-r)$ o $(0,-a+r)$ y al hacer los respectivos dobleces para ambos puntos, obtenemos las rectas ℓ_1 y ℓ_2; las intersecciones de éstas rectas con el eje y nos dan los

los vértices de la hipérbola, pues ℓ_1 y ℓ_2 son las únicas rectas de su familia paralelas al eje x (Figura 6).

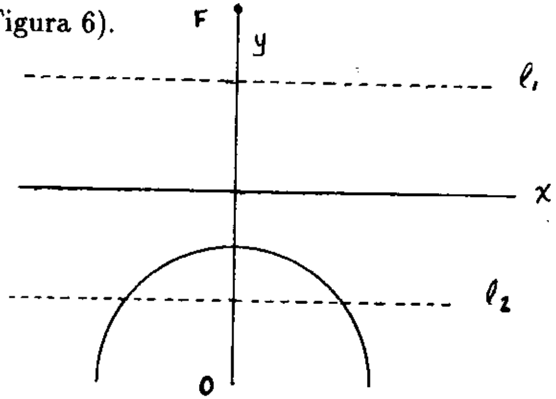


Figura 6

De aquí:

Las coordenadas de los focos son: $(0,a),(0,-a)$.

Las coordenadas de los vértices son: $(0,\frac{r}{2}),(0,\frac{-r}{2})$ (intersección de ℓ_1 y ℓ_2 con eje y),.

De donde:

Longitud eje focal $= 2a$ (Distancia entre los focos).

Longitud eje mayor o primario $= r$ (Distancia entre los vértices).

Longitud eje secundario $= \sqrt{a^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2-\frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2-r^2}{4}}$

Así, por tener su centro en el origen y sus focos sobre el eje y, vamos a sustituir los datos anteriores en la ecuación modelo de la hipérbola vertical con centro en el origen.

$$\frac{ay^2}{r^2} - \frac{4x^2}{4a^2-r^2} = 1 \tag{1}$$

Supongamos que A es un punto cualquiera de $C(O,r)$ cuyas coordenadas son (i,j). El doblez correspondiente a este punto sabemos que pasa por el punto medio de AF cuyas coordenas son $\left(\frac{i}{2},\frac{a+j}{2}\right)$. Además también sabemos que dicho doblez es perpendicular a AF, y como la pendiente de AF es $\frac{j-a}{i}$, entonces la pendiente del doblez será $\frac{i}{a-j}$, ya que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es -1. Luego, su ecuación es:

$$y = \frac{i}{a-j}x + \frac{a^2 - i^2 - j^2}{2(a-j)} \tag{2}$$

Además como (i,j) está sobre $C(O,r)$ cuya ecuación es $x^2 + (y+a)^2 = r^2$ entonces $i^2 + (j+a)^2 = r^2$, de donde $i = \pm\sqrt{r^2 - (j+a)^2}$. Tomemos la raíz positiva (esto por comodidad, aunque no importa cual tomar). Así, sustituyendo i en (2).

$$y = \sqrt{\frac{r^2 - (j+a)^2}{a-j}}x + \frac{2a^2 - r^2 + 2aj}{2(a-j)} \tag{3}$$

Si la ecuación (1) es efectivamente la ecuación de la envolvente, debemos obtener que la recta (3) es tangente a (1). En otras palabras, vamos a verificar que (1) y (3) se intersectan en un sólo punto.

Al substituir (3) en (1) se llega a la siguiente ecuación

$$x^2\left(\frac{r^2 - (a-j)^2}{(a-j)^2} - \frac{r^2}{4a^2 - r^2}\right) + x\left(\frac{(2a^2 - r^2 + 2aj)\sqrt{r^2 - (j+a)^2}}{a-j}\right) +$$
$$+\frac{(2a^2 - r^2 + 2aj)^2}{4(a-j)^2} - \frac{r^2}{4} = 0$$

La prueba se reduce a mostrar; que el discriminante de la ecuación anterior es cero, o sea, que tiene raíces reales e iguales. Un cálculo sencillo muestra que:

$$\left(\frac{(2a^2 - r^2 + 2aj)\sqrt{r^2 - (j+a)^2}}{(a-j)^2}\right)^2 - 4\left(\frac{r^2 - (j+a)^2}{(a-j)^2} - \frac{r^2}{4a^2 - r^2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{(2a^2 - r^2 + 2aj)^2}{4(a-j)^2} - \frac{r^2}{4}\right) = 0$$

Por tanto. las rectas que se obtiene al hacer los dobleces, son tangentes a la ecuación (1) que efectivamente es la ecuación de la envolvente.

4 Observaciones sobre las demostraciones anteriores.

Si después de estas dos demostraciones usted no se ha convencido que la figura que se formó en su hoja de papel es una hipérbola, tiene todavía justificación, ya que las dos anteriores están incompletas ¿Por qué? Volvamos a la primera demostración ¿Cómo sabemos que la recta ℓ es tangente a su envolvente exactamente en el punto M que dibujamos? (Ver Figura 4) es decir, es cierto que ℓ es tangente a su envolvente (en algún punto) pero no sabemos en donde. Así que ponerlo donde lo pusimos es como adivinarlo o forzar la prueba y eso no se vale.

Analicemos la segunda demostración. Lo que probamos es que, dada la hipérbola, cada recta de la familia ℓ es tangente a ella (también, note que dos rectas distintas de la familia ℓ tienen distintos puntos de tangencia) pero nuestro problema es al revés.

5 Una demostración con ecuaciones diferenciales.

Para salir de dudas, adentrémonos un poco a la rama de las matemáticas que se llama Ecuaciones Diferenciales.

Considere primeramente una ecuación de la forma

$$y = xp + f(p) \tag{4}$$

donde p es un parámetro y f una función que depende de p. A las ecuaciones de este tipo se les llama Ecuaciones de Clairaut.

La derivada de (4) con respecto a x es $y' = p$ que al sustituir en la misma (4) se obtiene

$$y = y'x + f(y') \tag{5}$$

que es una Ecuación Diferencial. Derivando (5) con respecto a x y sustituyendo $y' = p$ nos conduce a

$$\begin{aligned} p &= \left(p + \frac{dp}{dx}x\right) + f'(p)\frac{dp}{dx} \\ p &= p + (x + f'(p))\,\frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

$$(x + f'(p))\,\frac{dp}{dx} = 0$$

de donde obtenemos dos ecuaciones

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{6}$$

$$y = x + f'(p) = 0 \tag{7}$$

integrando (6) nos queda $p = c$ (donde c es una constante), que al sustituir en (4) da

$$y = cx + f(c) \tag{8}$$

que es la ecuación de una familia de rectas.

Por otro lado, al despejar p de (7) (si esto es posible) obtenemos $p = z(x)$, o sea una función que depende de x, al sustituirla en (4) nos conduce a

$$y = xz(x) + f(z(x)) \tag{9}$$

Vamos a usar el hecho de que (9) es la envolvente de la familia de rectas (8) (ver bibliografía).

En resumen, dada una Ecuación de Clairaut, en general, siempre es posible hallar dos soluciones para p, que al sustituirlas en (4) nos dan dos nuevas ecuaciones, una de las cuales es una familia de rectas y la otra la ecuación de su envolvente.

Iniciamos nuestra demostración considerando nuevamente la Figura 5.

Ya conocemos que la ecuación de la familia de rectas ℓ es (3); construyamos ahora la Ecuación de Clairaut.

Llamemos $p = \frac{i}{a-j}$ al parámetro.

En la sección 3 mostramos que $i = \sqrt{r^2 - (j+a)^2}$. Sustituyendo i en la igualdad anterior, nos conduce a que:

$$p = \frac{\sqrt{r^2 - (j+a)^2}}{a-j}$$

así $p(a-j) = \sqrt{r^2 - (j+a)^2}$ de donde $p^2(a-j)^2 = r^2 - (j+a)^2$ esto implica que

$$p^2(a^2 - 2aj + j^2) = r^2 - j^2 - 2aj - a^2$$

finalmente $(p^2+1)j^2 + (-2ap+2a)j + p^2a^2 - r^2 + a^2 = 0$.

Despejando j:

$$j = \frac{a(p^2-1) \pm \sqrt{p^2\left(r^2 - 4a^2\right) + r^2}}{p^2+1}$$

Por comodidad tomemos

$$j = \frac{a(p^2-1) + \sqrt{p^2(r^2 - 4a^2) + r^2}}{p^2+1}.$$

Por otro lado, también de la ecuación (3) se observa que la función que depende de p es:

$$f(p) = \frac{2a^2 - r^2 + 2aj}{2(a-j)}$$

sustituyendo j en la igualdad anterior

$$f(p) = \frac{4a^2p^2 - r^2p^2 - r^2 + 2a\sqrt{p^2(r^2 - 4a^2) + r^2}}{4a - 2\sqrt{p^2(r^2 - 4a^2) + r^2}}.$$

Hagamos $w = p^2(r^2 - 4a^2) + r^2$ de este modo

$$f(p) = \frac{-w + 2a\sqrt{w}}{4a - 2\sqrt{w}}\,.$$

Así, la ecuación (3) se ha transformado en una ecuación de la forma (4), con p un parámetro y $f(p)$ una función que depende de p. Note que en particular, al sustituir $p = \frac{i}{a-j}$ obtendremos la familia de rectas ℓ (o sea, una ecuación de la forma (8)). Vamos pues a despejar p de la ecuación de la forma (7).

Para facilitar derivar f llamemos $g_1(p) = \frac{-p+2a\sqrt{p}}{4a-2\sqrt{p}}$ y $g_2 = p^2(r^2-4a^2)+r^2$.

Así $f(p) = (g_1 \circ g_2)(p)$ de donde $f'(p) = g_1'(g_2(p)) \cdot g_2'(p)$, por la regla de la cadena.

Pero

$$g_1'(p) = \frac{-4a + \sqrt{p} + \frac{4a^2}{\sqrt{p}}}{(4a - 2\sqrt{p})^2}$$

y

$$g_2'(p) = 2p(r^2 - 4a^2)\,.$$

Luego

$$f'(p) = \frac{-4a + \sqrt{w} + \frac{4a^2}{\sqrt{w}}}{(4a - 2\sqrt{w})^2}\left(2p(r^2 - 4a)\right) = p\left(r^2 - 4a\right)\left(\frac{\sqrt{w} - 4a + \frac{4a^2}{\sqrt{w}}}{(4a - 2\sqrt{w})^2}\right)$$

Así, como $x + f'(p) = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
x &= -2p(r^2 - 4a^2)\left(\frac{\sqrt{w} - 4a + \frac{4a^2}{\sqrt{w}}}{(4a - 2\sqrt{w})^2}\right) \\
&= -2p(r^2 - 4a^2)\left(\frac{w - 4a\sqrt{w} + 4a^2}{\sqrt{w}(4a - 2\sqrt{w})^2}\right) \\
&= -2p(r^2 - 4a^2)\left(\frac{(2a - \sqrt{w})^2}{4\sqrt{w}(2a - \sqrt{w})^2}\right) \\
&= \frac{p(4a^2 - r^2)}{2\sqrt{w}}
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{w} &= p(4a^2-r^2)\\
2x\sqrt{p^2(r^2-4a^2)+r^2} &= p(4a^2-r^2)\\
4x^2\left(p^2(r^2-4a^2)+r^2\right) &= p^2(4a^2-r^2)^2\\
p^2\left(4x^2(r^2-4a^2)-(4a^2-r^2)^2\right) &= -4x^2r^2\\
p^2 &= \frac{4x^2r^2}{(4a^2-r^2)(4a^2-r^2+4x^2)}\\
p &= \pm\frac{2rx}{\sqrt{(4a^2-r^2)(4a^2-r^2+4x^2)}}
\end{aligned}$$

Por comodidad, tomemos la raíz positiva y hagamos

$$m = 4a^2 - r^2 + 4x^2 \qquad\qquad k = 4a^2 - r^2\,.$$

De aquí que

$$p = \frac{2rx}{\sqrt{km}}$$

Luego, sustituyendo p en (4) obtenemos

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2rx}{\sqrt{km}}x + \frac{-w+2a\sqrt{w}}{4a-2\sqrt{w}}, \quad w = r^2 + p^2\left(r^2-4a^2\right) = r^2 - p^2k\\
&= \frac{2rx^2}{\sqrt{km}} + \frac{p^2k - r^2 + 2a\sqrt{r^2-p^2k}}{4a-2\sqrt{r^2-p^2k}}\\
&= \frac{2rx^2}{\sqrt{km}} + \frac{\left(\frac{2rx}{\sqrt{km}}\right)^2k - r^2 + 2a\sqrt{r^2-\left(\frac{2rx}{\sqrt{km}}\right)^2k}}{4a-2\sqrt{r^2-\left(\frac{2rx}{\sqrt{km}}\right)^2k}}\\
&= \frac{2rx^2}{\sqrt{km}} + \frac{\frac{4r^2x^2}{km}k - r^2 + 2a\sqrt{r^2-\frac{4r^2x^2}{km}k}}{4a-2\sqrt{r^2-\frac{4r^2x^2}{km}k}}\\
&= \frac{2rx^2}{\sqrt{km}} + \frac{\frac{4r^2x^2}{m} - r^2 + 2a\sqrt{r^2-\frac{4r^2x^2}{m}}}{4a-2\sqrt{r^2-\frac{4r^2x^2}{m}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2rx^2}{\sqrt{km}} + \frac{4r^2x^2 - r^2m + 2a\sqrt{m}\sqrt{mr^2 - 4r^2x^2}}{4am - 2\sqrt{m}\sqrt{mr^2 - 4r^2x^2}}, \quad k = m - 4x^2 \\
&= \frac{2rx^2}{\sqrt{m}\sqrt{m-4x^2}} + \frac{4r^2x^2 - r^2m + 2a\sqrt{m}\sqrt{r^2}\sqrt{m-4x^2}}{4am - 2\sqrt{m}\sqrt{r^2}\sqrt{m-4x^2}} \\
&= \frac{2rx^2}{\sqrt{m}\sqrt{m-4x^2}} + \frac{(4x^2 - m)\,r^2 + 2ar\sqrt{m}\sqrt{m-4x^2}}{\sqrt{m}\left(4a\sqrt{m} - 2r\sqrt{m-4x^2}\right)} \\
&= \frac{2rx^2\left(4a\sqrt{m} - 2r\sqrt{m-4x^2}\right) + \left((4x^2-m)r^2 + 2ar\sqrt{m}\sqrt{m-4x^3}\right)\left(\sqrt{m}\right.}{\sqrt{m}\sqrt{m-4x^2}\left(4a\sqrt{m} - 2r\sqrt{m-4x^2}\right)} \\
&= \frac{4rx^2\left(4a\sqrt{m} - 2r\sqrt{m-4x^2}\right) + (m-4x^2)\left(2ar\sqrt{m} - r^2\sqrt{m-4x^2}\right)}{2\sqrt{m}\sqrt{m-4x^2}\left(2a\sqrt{m} - r\sqrt{m-4x^2}\right)} \\
&= \frac{\left[2a\sqrt{m} - r\sqrt{m-4x^2}\right]\left[4rx^2 + r(m-4x^2)\right]}{2\sqrt{m}\sqrt{m-4x^2}(2a\sqrt{m} - r\sqrt{m-4x^2})} \\
&= \frac{4rx^2 + rn - 4x^2r}{2\sqrt{m}\sqrt{m-4x^2}} \\
&= \frac{rm}{2\sqrt{m}\sqrt{m-4x^2}} \\
&= \frac{r\sqrt{m}}{2\sqrt{m-4x^2}}, \qquad m = 4a^2 - r^2 + 4x^2 \\
&= \frac{r\sqrt{4a^2 - r + 4x^2}}{2\sqrt{4a^2 - r^2 + 4x^2 - 4x^2}} \\
&= \frac{r\sqrt{4a^2 - r^2 + 4x^2}}{2\sqrt{4a^2 - r^2}}
\end{aligned}
$$

que es la ecuación de la forma (9), y es la envolvente de la familia de rectas (3). ¿Será una hipérbola? Arreglémosla

$$y = \frac{r\sqrt{4a^2 - r^2 + 4x^2}}{2\sqrt{4a^2 - r^2}}$$

de donde

$$4y^2\left(4a^2 - r^2\right) = r^2\left(4a^2 - r^2 + 4x^2\right)$$

$$4\left(4a^2 - r^2\right)y^2 - 4r^2x^2 = r^2\left(4a^2 - r^2\right)$$

$$\frac{4y^2}{r^2} - \frac{4x^2}{4a^2 - r^2} = 1 \tag{10}$$

Por lo tanto concluimos que la envolvente de la familia de rectas ℓ tiene como ecuación a (10), que es exactamente la misma ecuación (1) que ya conocíamos. Luego, la envolvente es una hipérbola con focos en los puntos O y F como efectivamente sospechábamos.

6 Conclusiones.

Observe que por estar F fuera de la circunferencia, se cumple que $2a > r$ (Ver Figura 5). Ahora bien, si F está dentro de la circunferencia tenemos que $0 < 2a < r$ de donde $4a^2 < r^2$, y de aquí que $4a^2 - r^2 < 0$ o bien $-(4a^2 - r^2) > 0$. Al ajustar este detalle en (10) obtenemos

$$\frac{4y^2}{r^2} - \frac{4x^2}{4a^2 - r^2} = 1$$

de donde

$$\frac{4y^2}{r^2} + \frac{4x^2}{-(4a^2 - r^2)} = 1 \tag{11}$$

Por lo tanto, en el caso en que F esté dentro de $C(O,r)$, la envolvente de la familia de rectas ℓ tiene como ecuación a (11) que evidentemente es una elipse con focos en los puntos O y F.

El caso en que $F = O$ significa que $2a = 0$, o sea $4a^2 = 0$ y al ajustarse ésto en (10) nos da que la envolvente de la familia de rectas ℓ tiene como ecuación:

$$\frac{4y^2}{r^2} - \frac{4x^2}{0 - r^2} = 1$$

de donde $\frac{4y^2}{r^2} + \frac{4x^2}{r^2} = 1$ y de aquí que $4y^2 + 4x^2 = r^2$.

Lo cual implica que

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \tag{12}$$

que efectivamente es una circunferencia con centro O y radio $\frac{r}{2}$.

Desde luego, en el caso en que F está sobre la circunferencia $C(O, r)$ hay que considerarlo aparte, pues se cumple que $2a = r$ o bien $4a^2 = r^2$ o bien $4a^2 - r^2 = 0$, por lo que hay peligro de división entre cero. Sin embargo, este caso es el más sencillo, pues, como ya mencionamos, cada recta de la familia ℓ es mediatríz a AF, y como A y F son puntos de $C(O, r)$, entonces AF es una cuerda. Por lo tanto cada recta de la familia ℓ pasa por el centro O y en conclusión, el punto O es la solución de nuestro problema para este caso.

Bibliografía

[1] Kreyder Donald L., Kuller Robert G. y Ostberg Donald R. *Ecuaciones Diferenciales.* Fondo Eduactivo Interamericano. 1973, pag. 353–355.

[2] Kaplan Wilfred. *Elements of Ordinary Differential Equations.* Addison-Wesley Publishing Co. Inc. 1964, pág. 208–209, 214–216.

[3] Rey Julio, Pi Pedro y Trejo César A. *Análisis Matemático.* Editorial Kapeluz. Vol. III 1959, pág. 150–152, 170–171.