Miscelánea Matemática **40** (2004) 29–52 SMM

Una justificación de la definición de Momento Estático y de la correspondiente condición de equilibrio de un sólido

Ramón Enrique Duarte
Escuela de Ingeniería
Univ. Autónoma de Sinaloa
duarte@uas.uasnet.mx

Jesús Alfonso Riestra
Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav
riestra@mail.cinvestav.mx

El momento producido por una fuerza o momento estático, suele ser introducido en los textos y cursos a través de una expresión del álgebra vectorial, útil y poderosa sin duda, pero poco inteligible. El artículo se propone recobrar el significado del concepto de momento estático y la justificación matemática de su expresión. Esta búsqueda nos conduce a la vieja y conocida Ley de la Palanca, de la cual se ofrece una demostración moderna, pero inspirada en las clásicas de Galileo y Lagrange. De dicha ley surge, de manera natural, una primera definición "escalar"de momento estático. Generalizando la idea de palanca a la de un sólido "plano", obtenemos la definición general de momento estático en un plano, la cual se traduce, fácilmente, en un vector área en el espacio tridimensional. Se hace ver la consistencia de esta idea y de la recurrencia al equilibrio de una palanca: se demuestra que la suma, como vectores ordinarios, de dos momentos corresponde, como momento, al resultante de los momentos que se obtiene al "balancearlos" en una palanca.

0. Introducción

En los cursos de Estática de las escuelas de ingeniería o en el tema de Estática de los cursos de Física del Bachillerato y las escuelas de Ciencias, podemos encontrar que la definición del momento que produce una fuerza con respecto a un punto y las condiciones de equilibrio de un sólido, a saber: suma de fuerzas igual a cero y suma de momentos igual a cero, se dan prácticamente sin justificación alguna. Especialmente si los momentos y las condiciones se expresan en el lenguaje del Álgebra Vectorial (la cual permite una gran concisión) resultan poco inteligibles, como puede constatarse con las dificultades que tienen los estudiantes. Creemos que esto se debe a la pérdida de significados: Los vectores y sus propiedades representan la síntesis de todo un proceso, el cual parece haber caído en el olvido. Este es el caso, por ejemplo, de la ley del paralelogramo para la adición (geométrica) de vectores, la cual fue justificada para el caso de fuerzas, muy ingeniosamente por cierto, por Simon Stevin (1548–1620). Y también es el caso, aparentemente con mayor razón como veremos más adelante, para el momento con respecto a un punto (centro de giro) producido por una fuerza que tiende a hacer girar a un sólido respecto a un centro y el cual seguramente todos recordamos modelado con un producto vectorial, constituyendo la aplicación por excelencia (si no es que la única) de la multiplicación vectorial.

En su clásico libro, *The Science of Mechanics*, el distinguido hombre de ciencia Ernst Mach (1838–1916) analiza, en los cimientos mismos de la mecánica, algunos "descubrimientos matemáticos" de leyes físicas que no dejan de sorprendernos. Estas leyes, tienen en común el ser demostradas matemáticamente imaginando un experimento que no se puede realizar, estrictamente hablando, debido al alto grado de idealización que presupone, el cual no parece ser de este mundo sino más bien del *topos uranos* de Platón (volveremos a este punto). No podemos hacerle justicia a dicho análisis, así que nos conformaremos con algunas observaciones.

El primer principio de la Estática y con él prácticamente inicia el mencionado libro (Mach 1960) es la Ley de la Palanca, que fué establecida por vez primera por Arquímedes (Heath 1897, 189). Como segundo principio, Mach ha escogido a la Ley del Plano Inclinado, descubrimiento de Stevin, quien la establece de una manera sorprendentemente simple y convincente y de la que surge la Ley del Paralelogramo para la suma de fuerzas. Sin embargo, para el establecimiento del momento estático, aunque es evidente su parentezco con la Ley de la Palanca, Mach hace este comentario:

Ahora trataremos de obtener alguna idea de la manera en la cual la noción de momento estático, por el cual, como sabemos, es entendido el producto de una fuerza por la perpendicular bajada desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza, pudo haber sido concebida — aunque el camino que realmente condujo a esta idea no es cabalmente conocido. (Mach 1960, p. 29)

El objetivo de la cita es recalcar que, por una parte, lo del momento estático está aún más enterrado en el olvido en comparación con la suma (geométrica) de fuerzas y, por la otra, el reto mayor que constituye el rescatarlo y examinarlo a la luz. Aparte de su interés en el plano epistemológico y su repercusión educativa, están ciertas inquietudes filosóficas: uno se pregunta si es posible establecer la noción general de momento estático y la condición de equilibrio que lo acompaña siguiendo las líneas de Arquímedes, Stevin y Galileo, esto es, desde las matemáticas mismas, imaginando experimentos idealizados. Los matemáticos suelen ser acusados de platonismo, i.e. creer que los objetos matemáticos son parte de la realidad (o peor aún, en caso de platonismo agudo, que son la auténtica realidad, el mundo sensible siendo una pobre e imperfecta réplica). O desde el ángulo opuesto (pero que viene a resultar lo mismo), como lo expone un notable y controvertido matemático ruso en un artículo en internet:

Las matemáticas son parte de la Física. La Física es una ciencia experimental, una parte de la ciencia natural. Las matemáticas son aquella parte de la Física donde los experimentos resultan baratos (Arnold 1997).

Nuestro interés es realizar un ejercicio en platonismo[1] por una buena causa, la de intentar rescatar la noción de momento estático.

En este artículo ofrecemos una justificación de la definición de momento estático y la correspondiente condición de equilibrio de un sólido (suma de momentos igual a cero). Para ello, motivados por las versiones de Galileo (1564–1642) y Lagrange (1736–1813), deduciremos primero la ley de la palanca, la cual, como se sabe, establece que

En una palanca en equilibrio apoyada en un punto (fulcro) y sobre la que se suspenden dos cuerpos, uno de cada lado del fulcro, sus pesos son inversamente proporcionales a sus brazos de palanca,

[1] O si se prefiere, una serie de pertinentes experimentos mentales, con la esperanza de que resulten reveladores.

donde los *brazos de palanca* son las distancias del punto de apoyo a las posiciones sobre la palanca desde las que se suspenden los graves. En primer término, deduciremos esta ley partiendo de supuestos "mínimos". Posteriormente, justificaremos la definición de momento signado, como lo conocemos hoy en día, permitiéndonos obtener relaciones generales. Esto es, para que una barra apoyada sobre un punto (fulcro) y sometida a dos cargas en sus extremos no rote, se debe cumplir que la suma algebraica de los momentos debe anularse; lo que después se extenderá para n cargas. Con esto nos referimos a momentos que actúan en un mismo plano y en los casos en que las fuerzas (cargas) son perpendiculares a sus brazos de palanca.

El siguiente paso, todavía en un mismo plano, es incluir fuerzas gravitatorias no necesariamente perpendiculares a sus brazos de palanca. Para ello generalizamos las palancas introduciendo discos apoyados en su centro (que constituyen un modelo de *sólido plano*), en los que se suspenden pesos equilibrándolos. Reemplazamos los pesos por fuerzas en general y con ello tenemos el modelo general de momento estático signado (plano). En el último paso, consideraremos momentos en el espacio, reemplazando el momento signado por un vector área, mostrando la consistencia de tal representación, esto es, que efectivamente los momentos tienen un comportamiento vectorial y finalizamos con la condición de equilibrio rotacional: suma vectorial de momentos igual a cero (vector).

1. Ley de la Palanca y Momento Estático

Arquímedes de Siracusa (287–212 a.c.) sustenta la deducción de la Ley de la Palanca en varios postulados, el primero siendo enunciado y analizado por Mach, así como también las ideas claves en la deducción de Arquímedes (Mach 1960, pp. 13–17). Sus dos partes en la versión original[2] de Arquímedes son:

i *Pesos iguales [actuando] a distancias iguales [del punto de apoyo] están en equilibrio.*

ii *Pesos iguales [actuando] a distancias desiguales [del punto de apoyo] no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso de la distancia mayor.*

Pasa luego a exponer la demostración de dicha ley por Galileo (Mach 1960, p. 17), en la que la idea que constituye el recurso esencial y que es empleado reiteradamente en la deducción de Arquímedes ha sido

[2] Los incisos y los corchetes son nuestros, aunque sugeridos por la redacción de Mach.

grandemente sintetizado a una sola instancia, por lo que esta justificación de Galileo resulta mucho más breve.

Mach objeta la legitimidad de ambas demostraciones, por considerarlas en círculo vicioso (Mach 1960, pp. 19–20), afirmando que lo que se quiere demostrar es utilizado de algún modo implícitamente. Y justamente se refiere al aludido recurso. Éste consiste esencialmente en sustituir, en una palanca en equilibrio, un peso particular por una segunda palanca en equilibrio con dos pesos iguales a la mitad del peso original y suspendida de su punto medio en el lugar donde se suspendía el peso original (hasta aquí no ha pasado nada: el equilibrio se mantiene) y luego eliminar esta palanca interior suspendiendo directamente sus dos pesos de la palanca original, sin alterar el equilibrio (esta segunda parte es la objetada).

Pero no deseamos entrar en disputa con Mach, sino apuntar la necesidad de justificar el multicitado recurso. En la prueba de Galileo los pesos discretos son reemplazados por una barra continua de sección uniforme (un prisma). Nuestra versión de la justificación de la Ley de la Palanca, por cierto, simplifica la de Galileo al tomar como modelo la de Lagrange (ver la Sección 4).

Una palanca de peso despreciable debe equilibrar un objeto de peso A, del lado izquierdo y otro objeto de peso B, en el derecho. Para tal fin, se utilizarán cuerdas para colgar los objetos de la palanca en los puntos X e Y (ver figura 1). Nos proponemos determinar la posición del punto de apoyo, i.e. el punto donde debe apoyarse o colgarse la palanca, de tal manera que quede en equilibrio.

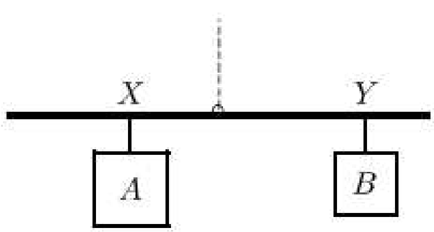


Figura 1.

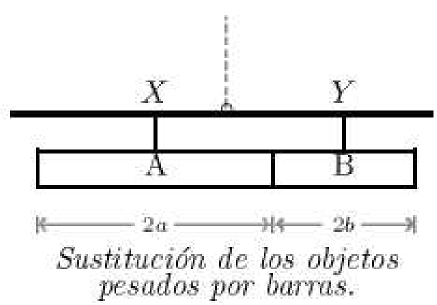


Figura 2.

Si los objetos A y B tuvieran el mismo peso, nuestra experiencia previa con palancas (balancines, balanzas, etc.) dicta que bastaría que los puntos X e Y equidistaran del fulcro (mismos brazos) para lograr el equilibrio; pero, si el objeto A es el de mayor peso, nuestra experiencia nos dice que debe estar más cerca del fulcro que B; es decir, que hay una relación inversa entre el peso y su brazo de palanca. Determinaremos y probaremos esta relación, en forma precisa.

La estrategia que utilizaremos consistirá en transformar el problema en otro más fácil de resolver aplicando el menor número posible de supuestos y (en la medida de lo posible) dictados por el sentido común.

Suponiendo que la palanca mostrada en la figura 1 estuviera en equilibrio, apoyada en el punto adecuado, esa condición no se alterará si sustituimos los dos objetos de pesos A y B por dos barras "planas", homogéneas de (la misma) sección uniforme y con el mismo peso que aquellos, colgadas directamente arriba de sus centros geométricos a los puntos X e Y, respectivamente (ver figura 2); las longitudes de estas barras serán tales que estén en la misma proporción que los pesos A y B, puesto que tienen la misma densidad lineal. Concretamente, si $2a$ y $2b$ son estas longitudes, se cumple la proporción $(2a)/(2b) = A/B$ (o equivalentemente $a/b = A/B$) y si adicionalmente escogemos que $a + b$ coincida con la longitud del segmento que une X con Y, i.e. $a+b = \overline{XY}$, entonces las longitudes a y b estarán unívocamente determinadas y las barras tendrán la configuración de la figura 2, en la que la segunda barra (de peso B) es la continuación de la primera y no queda ningún espacio entre ellas[3].

Para hallar la posición del fulcro, en el caso de una configuración de cargas como la figura 2 (que debe ser la misma posición que para el equilibrio de la configuración de la figura 1), pensemos primero en un caso más favorable. Si unimos las barras de manera que formen una barra continua de longitud $2a + 2b$ (y peso $A + B$) e imaginamos las barras fijadas en la palanca, por haber una distribución simétrica de las cargas con respecto a la sección media de la barra continua (i.e. la que equidista $(a + b)$ de los extremos derecho e izquiedo de la barra unión), debemos tener equilibrio con el fulcro directamente arriba de dicha sección media (ver figura 3) y *sólo en esa posición*; podemos convencernos de lo primero (i.e. el fulcro en la posición media asegura el equilibrio), de acuerdo a Mach, no apriorísticamente por el llamado *principio de la razón suficiente*, que en este caso se resumiría en que no hay razón para que la palanca se incline hacia un lado en preferencia sobre el otro, sino porque lo anterior condensa una serie de experiencias

[3]Valerse de una barra continua (un prisma) es una idea de Galileo (1954, 110–112).

en lo negativo y en lo positivo[4] acerca del fenómeno (Mach 1960, 14–15). Adoptaremos una generalización del primer postulado de Arquímedes extendiéndolo al caso continuo (véase al final de la demostración).

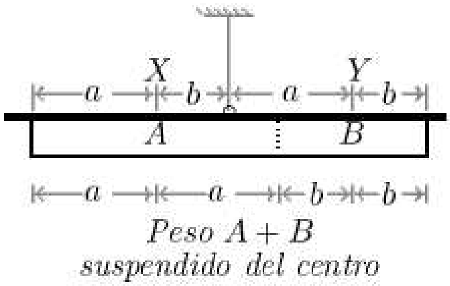


Figura 3.

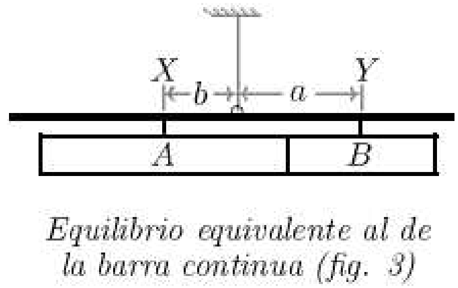


Figura 4.

Ahora, el equilibrio del sistema palanca-barra continuará, aunque la barra no sea de una sola pieza y empecemos a destensar las fuerzas internas del sistema que mantenían a las barras fijadas a la palanca. Apelamos aquí a una consecuencia de un principio físico que diría que dos sistemas (sujetos a fuerzas externas y con los mismos apoyos) son estáticamente equivalentes si se puede pasar de uno a otro, por el simple reacomodo de las fuerzas internas, pero sin que ocurra un cambio en la disposición de las fuerzas externas (i.e. cargas). Más precisamente:

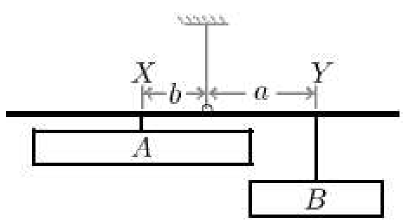


Figura 5.

> *Las* fuerzas externas . . . *son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Las fuerzas externas causarán que el cuerpo se mueva o asegurarán que éste permanezca en reposo (Beer & Johnston, 3.2 p. 72).*

[4]Entre las experiencias en lo negativo está la referente a que la posición del observador no ejerce influencia alguna; luego el observador debe ver lo mismo si se sitúa de uno o del otro lado del plano de rotación de la palanca dada la simetría.

Así, podemos llegar a la configuración equivalente de la figura 4, incluso continuar hasta la de la figura 5, puesto que cada una de las dos barras está en equilibrio por estar suspendida por su centro (de acuerdo al primer postulado modificado) y por lo mismo no habrá influencia de una barra sobre la otra. Así pues, arribamos a que la posición del fulcro en la figura 1 sólo puede darse como en el de la figura 4, esto es, el brazo del peso A debe ser b, mientras que el brazo del peso B debe ser a. Luego la razón entre los brazos, digamos $b : a$, que sabemos que coincide con $B : A$, es la inversa de la razón entre los correspondientes pesos, quedando establecida la Ley de la Palanca.

Si denotamos con r_A el brazo de palanca del peso A y con r_B el brazo del peso B, tenemos que $r_A = b$ y $r_B = a$, luego la ley de la palanca puede enunciarse

> *Una condición necesaria y suficiente para que dos pesos (A y B) estén en equilibrio es que sus brazos estén en razón inversa a sus pesos, esto es*

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{B}{A} = \frac{F_B}{F_A} \tag{1}$$

Donde hemos usado la letra F para referirnos a fuerzas en general y no solamente a pesos, pues estos últimos no son sino fuerzas gravitatorias. Es posible que F_A y A no coincidan numéricamente, dependiendo del sistema de unidades elegido, pero en cualquier caso sólo habrá de por medio una constante de proporcionalidad que será la misma para F_B y r_B, esto es, la razón de F_A a A será la misma que de F_B a B. En otras palabras, la relación (1) no depende del sistema de unidades elegido.

Para que la relación (1) sea también una condición necesaria, se requiere modificar la parte *ii* del primer postulado de Arquímedes para llevarla al caso continuo y no sólo la primera parte. Una posibilidad sería como sigue:

i Pesos actuando simétricamente con respecto al punto de apoyo están en equilibrio.

ii Y si desplazamos el punto de apoyo hacia uno de los lados, no estarán ya más en equilibrio, sino que la palanca se inclinará hacia el lado opuesto.

La relación (1) nos va a servir de base para definir el momento estático de una fuerza. Para ello, escribámosla equivalentemente como

$$r_A\, F_A = r_B\, F_B \tag{2}$$

Observando que en cada miembro de esta segunda igualdad aparecen peso y brazo de un mismo objeto, podemos fijar la fuerza y el brazo de palanca en el miembro izquierdo[5] en la ecuación (2) con lo que tendremos una infinidad de parejas (r_B, F_B) que la satisfacen, correspondiendo a diferentes pesos y brazos de palanca en el lado derecho que hacen posible el equilibrio de la palanca de la figura 1 en la que se han fijado brazo y peso del objeto de la izquierda, bastando con que los productos de brazos por pesos sean iguales al producto del brazo y el peso fijados; este conjunto de parejas forman una clase de equivalencia. Más precisamente, podemos definir una relación de equivalencia en el conjunto de parejas (r, F), donde (r_1, F_1) está relacionado con (r_2, F_2) siempre que $r_1\, F_1 = r_2\, F_2$[6], i.e. si la fuerza F_1 con brazo r_1 equilibra a la fuerza F_2 con brazo r_2. De esto, tenemos que el producto es un invariante de las parejas equivalentes; luego, resulta natural designarlo con un nombre propio, el cual se ha convenido en llamar *momento producido por una fuerza F con respecto a cierto punto*. Esta magnitud física expresa una medida de la tendencia de la fuerza F de girar la palanca alrededor del punto.

En términos de momentos, la ley de la palanca puede entonces expresarse como sigue:

Una palanca está en equilibrio si (y sólo si) el momento respecto al fulcro que produce la fuerza aplicada en un brazo es igual al momento producido por la fuerza que actúa en el otro brazo.

Equivalentemente, podríamos enunciarla en términos de que la diferencia de momentos sea cero, e.g. $r_1\, F_1 - r_2\, F_2 = 0$. Si retomamos lo del momento como la tendencia que tiene a hacer girar la palanca (respecto al fulcro) y nos imaginamos la fuerza F_1 del lado izquierdo del fulcro, luego tendiendo hacer girar la palanca en el sentido antihorario, mientras que la fuerza F_2 tiende hacer girar la palanca en el sentido horario, parecería razonable asignarle un signo positivo al primer momento M_1 (producido por F_1) y negativo al segundo, M_2; así $M_1 = r_1\, F_1$ y $M_2 = -r_2\, F_2$. Con esta convención algebraica de momentos, la ley de la palanca podría expresarse con la ecuación

$$M_1 + M_2 = 0\,, \qquad \text{(La suma algebraica de los dos momentos es cero)} \tag{3}$$

pero en realidad la ecuación (3) es la expresión de la *condición de equilibrio* para el caso de dos momentos. Hemos verificado, en el caso $n = 2$, la Condición de Equilibrio de momentos, a saber

[5] igualmente pudo haber sido elegido el miembro derecho.

[6] Resulta inmediato verificar que se trata de una relación reflexiva simétrica y transitiva, i.e. de equivalencia

Para que una palanca, sobre la que actúan n fuerzas esté en equilibrio, es necesario y suficiente que la suma algebraica de los momentos de las n fuerzas sea igual a cero.

A continuación demostraremos la Condición de Equilibrio de la palanca (cuando actúan dos fuerzas o más) procediendo por inducción matemática. El enunciado ya ha sido demostrado para $n = 2$. Suponemos que la Condición es válida para $n = k$ ($k \geq 2$) y consideremos una palanca sobre la que actúan $k + 1$ fuerzas F_i con brazo de palanca r_i. Reordenando los índices (y cambiando al observador al otro lado del plano de ser necesario), podemos suponer a F_3, con brazo r_3 aplicada en el lado izquierdo del fulcro y a las dos fuerzas F_1 y F_2 del lado derecho del mismo, cuyos brazos de palanca son r_1 y r_2, respectivamente (ver figura 6). Sustituiremos estas dos fuerzas por una sola fuerza (la resultante de ellas) de magnitud F_R, de manera que produzca el mismo efecto que aquéllas; primero supondremos la palanca en equilibrio y probaremos que la suma algebraica de momentos se anula.

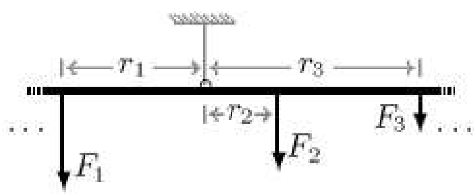


Figura 6.

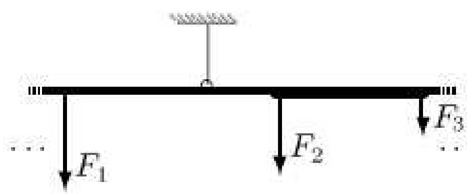


Figura 7.

En primer término notemos que el equilibrio de la figura 6 es equivalente al de la figura 7, en la que las fuerzas F_1 y F_2 se aplican ya no directamente sobre la palanca original, sino sobre una palanca más pequeña (también de peso despreciable) firmemente sujeta a la original, pero sin cambiar los brazos, ni las magnitudes de las fuerzas.[7]

Ahora destensando la fuerza interna, que por medio de una cuerda (sin peso) mantiene adherida la palanca pequeña, la cual al ser liberada pende de la posición apropiada para que las fuerzas F_1 y F_2, que actúan sobre la palanca pequeña, con brazos r'_1 y r'_2 respectivamente, estén en equilibrio. De acuerdo a la Ley de la Palanca: $r'_1 : r'_2 = F_2 : F_1$. Consiguientemente la segunda palanca descenderá en equilibrio y puesto

[7]Hay que tener en mente que las eventuales otras fuerzas no mostradas y sus respectivos brazos de palanca, no sufren cambio alguno a todo lo largo del proceso que describiremos.

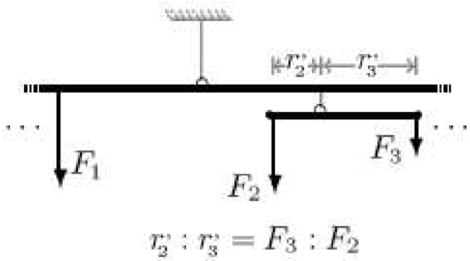


Figura 8.

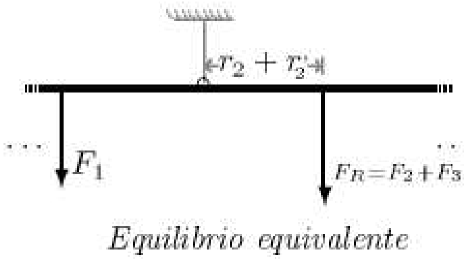


Figura 9.

que la disposición de las fuerzas externas no han sufrido cambio alguno (sólo acaso las internas), todo el sistema de $k+1$ fuerzas continuará en equilibrio (Fig. 8).

Puesto que este proceso es reversible, tenemos que la configuración de la figura 8 es equivalente a la de la figura anterior y ésta, a su vez, a la de la figura 6. Ahora bien, la configuración de la figura 8 es claramente equivalente a la de la figura 9 (véase) en la que las dos fuerzas, F_1 y F_2, han sido sustituidas por su resultante F_R, que es justamente su suma y que actúa donde actuaba la palanca pequeña, esto es un brazo de palanca igual a $r_1 + r_1'$. Denotando con M_R el momento producido por F_R tenemos, tomando en cuenta la convención de signos, que

$$\begin{aligned} F_R &= F_1 + F_2 \qquad r_1'F_1 = r_2'F_2 & (4{,}1)\\ -M_R &= (r_1 + r_1')F_R = (r_1 + r_1')F_1 + (r_1 + r_1')F_2 & \\ &= r_1F_1 + r_2'F_2 + (r_1 + r_1')F_2\,, \quad \text{pues } r_1'F_1 = r_2'F_2 & \\ &= r_1F_1 + r_2F_2\,, \text{ pues } r_1 + r_1' + r_2' = r_2\,. \text{ Luego} & \\ M_R &= M_1 + M_2\,. & (4{,}2) \end{aligned}$$

Ahora bien, el sistema de la figura 9 está en equilibrio y el número de fuerzas es k, luego, por hipótesis de inducción, debe tenerse que la suma de los k momentos es igual a cero. Esto es,

$$\begin{aligned} M_R + M_3 + \text{etc.} &= 0\,.\ \text{Y por (4), tenemos} \\ M_1 + M_2 + M_3 + \text{etc.} &= 0\,,\ \text{la suma de los } k{+}1 \text{ momentos} = 0 \end{aligned}$$

Recíprocamente, si la suma algebraica de los $k+1$ momentos se anula, entonces reemplazando la suma de los primeros dos por M_R de acuerdo a las fórmulas (4), lo que incluye que $F_1 + F_2$ se reemplace por F_R, tendremos una palanca sobre la que actúan k fuerzas, cuya suma de momentos se anula, luego por hipótesis de inducción estará en equilibrio y corresponderá a la ilustrada en la Fig. 9. Pero ya vimos que dicha palanca es equivalente a la de la Figura 6; por tanto, la palanca con las $k+1$ fuerzas originales estará en equilibrio, probando también la suficiencia para $n = k+1$ y completando la demostración, por inducción matemática, de la Condición de Equilibrio para cualquier número de momentos (mayor o igual que dos).

Para demostrar la Condición de Equilibrio para el caso $n \leq 1$, consideremos primero una palanca sobre la que actúa una única fuerza directamente sobre el fulcro, lo que nos da una distribución simétrica de cargas que (por *i* del postulado extendido) estará en equilibrio. Y de hecho, habiendo una sola fuerza la palanca sólo estará en equilibrio cuando la fuerza vertical se aplique sobre el centro de giro, pues de no ser así y aplicarse a un lado del fulcro, lo que equivale a desplazar al fulcro desde la posición de equilibrio hacia el lado opuesto, la palanca se inclinará hacia el lado de la fuerza (por *ii* del postulado extendido). Así para $n = 1$ tendremos equilibrio si y sólo si el momento (que en este caso coincide con la suma de momentos) se anula, pues el brazo de palanca debe ser cero en la posición del fulcro. Finalmente, para el caso $n = 0$, esto es ausencia de fuerzas, tendremos automáticamente equilibrio por una parte, ya sea por concebirla como una distribución simétrica de cargas (parte *i* del postulado), o bien, porque razonablemente suponemos que la palanca por sí sola está en equilibrio. Y por la otra, la suma de momentos es igual a cero, pues la suma vacía (no hay nada que sumar) se toma como cero por una convención general en matemáticas.

Hasta ahora sólo se han considerado fuerzas verticales dirigidas hacia abajo (i.e. pesos). Nos preguntamos, en primer término, cuál es el momento producido por una fuerza vertical de magnitud F dirigida hacia arriba y con un brazo r; véase la Fig. 10a, que hay que considerarla como una instantánea en la que se ha señalado la tendencia de hacer girar la palanca en el sentido positivo (antihorario).

Ahora bien, tal tendencia, cualquiera que sea, no se alterará si le superponemos dos fuerzas que se equilibran mutuamente, concretamente de magnitud F, dirigidas hacia abajo simétricamente dispuestas, respecto al fulcro, a una distancia r [Fig. 10b]. Ahora bien, las fuerzas verticales y opuestas del lado derecho se anulan, quedándonos (como resultante) sólo una fuerza vertical hacia abajo de magnitud F del lado izquierdo a una distancia r del fulcro [Fig. 10c], cuyo momento (positivo) está dado

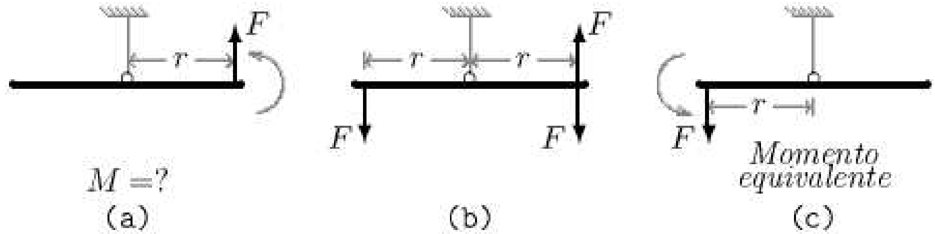


Figura 10.

por $M = r\,F$, esto es, el momento de las fuerzas verticales hacia arriba se calcula del mismo modo, con la convención de signos incluida.

Vemos entonces que la Condición de Equilibrio (suma algebraica de momentos igual a cero) se mantiene aún en el caso en que aparezcan cargas verticales dirigidas hacia arriba. Con esto concluimos esta etapa.

1. Palanca Generalizada. Momentos en un Sólido Plano

Pasamos a considerar momentos estáticos en las casos en los que las fuerzas ya no son necesariamente perpendiculares a sus brazos. Para ello generalizaremos la idea de palanca. Las palancas que hemos utilizado hasta este momento han sido horizontales, en las cuales cada brazo de la palanca es perpendicular al empuje del peso.

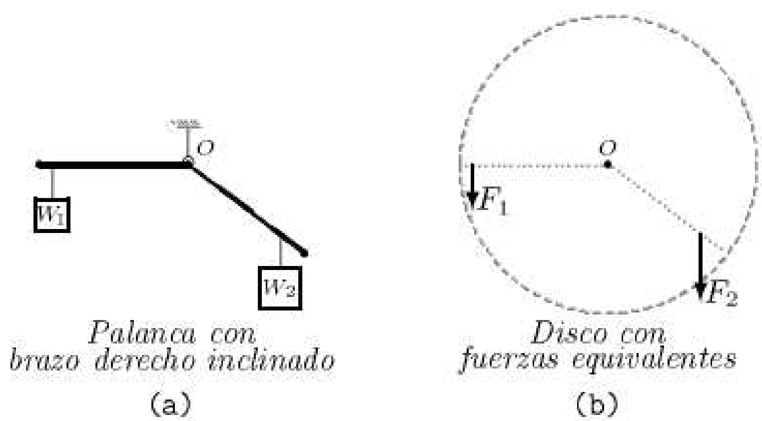
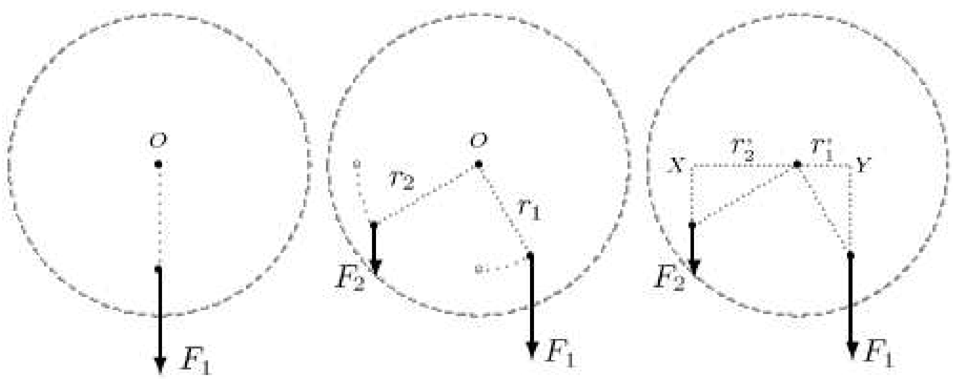


Figura 11.

Ahora bien, en vez de considerar palancas como la mostrada en la Fig. 11a, recurriremos, con ventaja, a discos articulados por el centro de tal manera que puedan girar libremente en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al disco. En la Fig. 11b se muestra una configuración de fuerzas en un tal disco equivalente al de la palanca del inciso (a). Resulta claro que podemos sustituir a cualquier configuración de palanca con una disposición adecuada en un tal disco. Más aún, en un disco siempre tendremos equilibrio, incluso en el caso de no tener (inicialmente) pesos balanceados. Lo que sigue es una descripción basada en nuestra experiencia sensible y el sentido común, cuyas conclusiones luego validaremos.



(a) (b) (c)

Figura 12.

Si de un punto que no sea el centro de giro O (fulcro), digamos a una distancia r_1 de O, suspendemos un peso dado por la fuerza F_1, el disco girará hasta llegar a una posición estable con el peso directamente abajo del centro O, como se muestra en la Fig. 12a (¡tenemos equilibrio aún cuando sólo tengamos una fuerza!). A continuación, del lado izquierdo y a una distancia r_2 del centro suspendemos gradualmente otro peso, iniciando sobre un radio horizontal y luego vamos aumentando gradualmente la carga, digamos hasta un valor F_2, mientras el disco ha estado girando en el sentido antihorario hasta un cierto ángulo, como se muestra en la Fig. 12b, en la que las fuerzas representan a los pesos.

De acuerdo al Principio de Transmisibilidad de las fuerzas,[8] podemos "trasladar" cada peso verticalmente hacia el diámetro horizontal, sin alterar los *efectos* de las fuerzas involucradas (i.e. la condición de equilibrio). El diámetro horizontal puede considerarse como una palanca con el punto de apoyo en el centro del mismo, con pesos representados por las fuerzas F_1 y F_2 y con brazos de palanca de magnitudes r'_1 y r'_2 perpendiculares a la dirección de las fuerzas, como se muestra en la Fig. 12c. En particular, la fuerza F_1 en la figura 12a puede suponerse actuando sobre el fulcro del diámetro horizontal, lo que corresponde simultáneamente, como vimos antes, a una palanca en equilibrio y un momento igual a cero. Por el contrario, cuando la línea de acción de la fuerza no pase por el centro del disco y corte al diámetro horizontal a un lado del fulcro, entonces, como antes vimos, el diámetro se inclinará hacia el lado de la fuerza. Siguiendo este orden de ideas podríamos explicar, al menos parcialmente, el comportamiento previsto por nuestra experiencia sensible que antes describimos.

Así, podríamos afirmar que para el caso en que el brazo no sea perpendicular al peso, como en la palanca de la figura 12c, el brazo de palanca se tomará como la perpendicular bajada desde el punto de equilibrio a la línea de acción de la fuerza. Pero de hecho este es el caso, como veremos, de cualquier fuerza (no necesariamente gravitatoria) e independientemente de lo que entendamos por "horizontal".

Para empezar, desliguémonos de la gravedad y pensemos en fuerzas cualesquiera. El momento de una fuerza, como la capacidad que tiene la misma de hacer girar a un cuerpo ("plano", en este caso) con respecto a un punto, no debe depender del sistema de referencia empleado para describirlo. Esto es lo que está detrás de la observación de Mach, acerca de que el fenómeno, relacionado con el equilibrio, ignora la presencia del observador.

Para convencernos de que no importa el sistema de referencia, v.gr. cuál escogemos como la "horizontal", en la figura 13a colocamos en distintas posiciones al observador, de manera que vea lo mismo para cada una de las fuerzas que están igualmente dispuestas, con respecto a su radio vector, i.e. al radio que une al centro con el punto de aplicación de la fuerza. El hecho de que, en este caso, los vectores de posición y las fuerzas (como vectores) sean ortogonales es irrelevante, podrían formar un ángulo cualquiera con tal de que sea el mismo para todas las fuerzas. Desde luego, es esencial que además las magnitudes de todos los

[8]Este principio establece que la acción de una fuerza puede ser transmitida a lo largo de su línea de acción (Beer & Johnston 1996, p. 73).

radios vectores sean iguales, lo mismo que las magnitudes de todas las fuerzas. Con este argumento se pudo haber demostrado, en particular que los momentos producidos por las fuerzas de las figuras 10a y 10c son los mismos, pero no pudimos resistir la tentación, en esa instancia, de mostrar alguno de los artificios comunes que se utilizan en los textos de Estática.

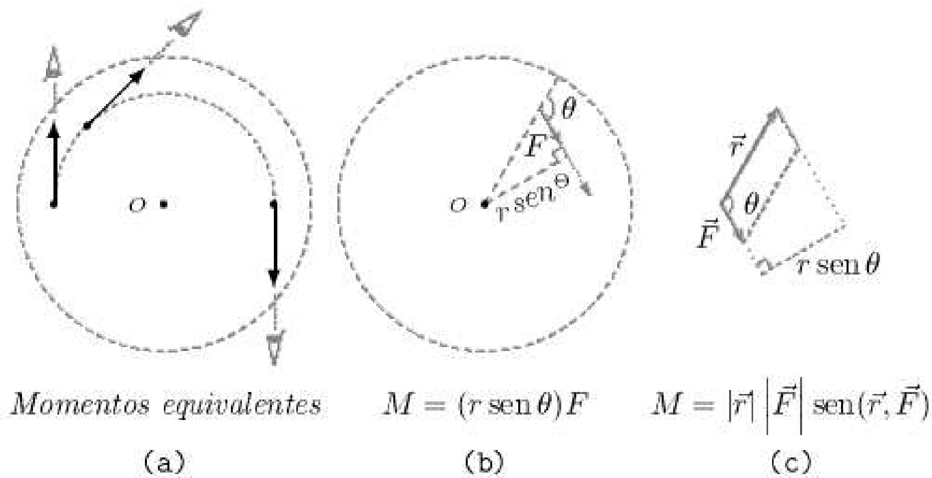


Figura 13.

Para encontrar la magnitud del momento que produce una fuerza $\vec{F}$, aplicada en un punto cuyo vector de posición es $\vec{r}$ y con respecto a un punto O (Fig. 13b), por el Principio de Transmisibilidad, "trasladamos" a la fuerza a lo largo de su línea de acción hasta que corte perpendicularmente a un diámetro. Tomando a ese diámetro como la "horizontal", la magnitud del momento está dado, como siempre, como el producto del brazo de palanca por la magnitud de la fuerza. En este caso el brazo está dado por $r\,\text{sen}\theta$, donde θ es el ángulo que hace el radio vector con el vector fuerza[9] y r es la magnitud del radio vector $\vec{r}$, de acuerdo a una notación sugestiva, usual en Física e ingeniería. Como se ilustra en la figura 13b, la magnitud del momento está dado por

$$M = (r\,\text{sen}\theta)F\,, \quad \text{donde } F = |\vec{F}|. \tag{5}$$

Aparte del signo, que de acuerdo a la figura sería negativo, la fórmula (5) puede interpretarse como traduciéndonos (en un plano) el momento de una fuerza cuyo el radio vector no es necesariamente ortogonal a la

[9]Cuando se trasladarn sin rotar, a un mismo origen. Ver Fig. 13c

misma, al momento de la misma fuerza (en magnitud) pero ortogonal a su radio vector, donde la dirección de éste la podemos escoger pero no así el tamaño que está determinado.

De hecho, escogiendo un diámetro "horizontal" y una dirección "hacia abajo" podemos traducir los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre un sólido "plano" (modelado por el disco de radio arbitrario) en otro sistema equivalente, de tal suerte que todas esas mismas fuerzas (en magnitud) actúen hacia abajo, luego perpendicularmente al diámetro, a uno u otro lado del centro según el signo, como si se tratara de fuerzas gravitatorias sobre una palanca que no es otra cosa que el diámetro y donde el fulcro es el centro (ver figura 14). Tendremos equilibrio si, y sólo si, la suma algebraica de momentos en la palanca se anula. Pero el momento de cada fuerza original ha sido en magnitud y signo llevado a la palanca, luego tendremos equilibrio rotacional en el sólido plano si, y sólo si, la suma algebraica de los momentos de las fuerzas, que actúan sobre el sólido, es igual a cero.

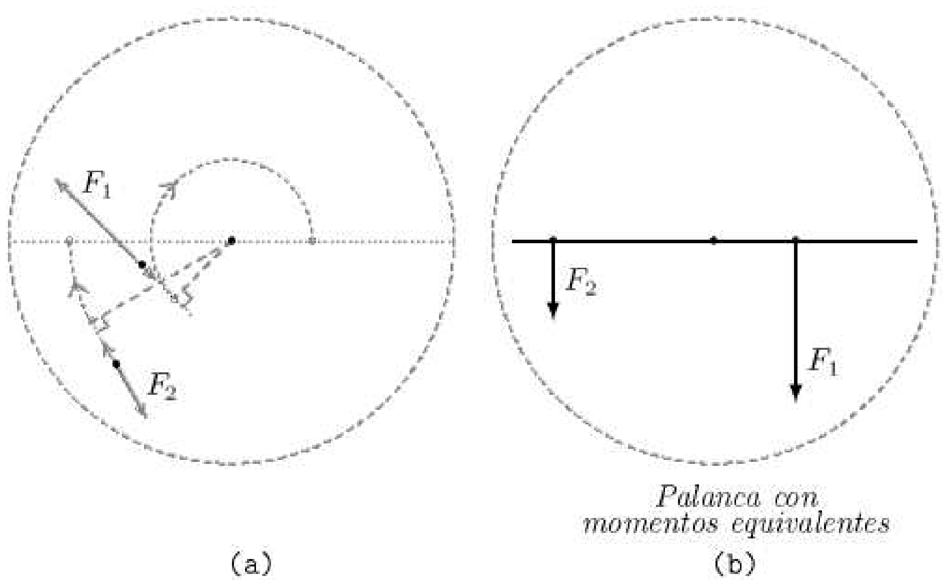


Figura 14.

3. Momentos en un Sólido Espacial y Palancas

Tomando en cuenta el signo y yendo aún más lejos, la fórmula (5) puede también interpretarse como describiendo la magnitud de un momento vectorial $\vec{M}$ cuya dirección es perpendicular al plano de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Más precisamente, el momento vectorial $\vec{M}$ es un vector cuya magnitud M, dada por (5), puede interpretarse como el área del paralelogramo formado con los vectores de posición y fuerza al trasladar (sin rotar) cualquiera de ellos hasta quede ambos tengan un origen común (figura 13c), cuya dirección es perpendicular al plano formado por los mencionados vectores y cuyo sentido es del movimiento del eje de un tornillo de rosca derecha cuando se rota en la dirección desde $\vec{r}$ hacia $\vec{F}$, como si (manteniendo fijo a $\vec{F}$) quisiésemos llevar a $\vec{r}$ hacia la dirección de $\vec{F}$, girando por el ángulo más corto (en la Fig. 13c sería en el sentido de las manecillas de un reloj). Puesto que tal ángulo, θ en la Fig. 13b y que más sugestivamente se ha representado por $(\vec{r}, \vec{F})$ en la 13c, siempre estará entre 0 y π radianes, consiguientemente la expresión del miembro derecho de (5) es siempre no negativa (como debe corresponder al módulo, norma o magnitud de un vector). Así, el momento (vectorial) $\vec{M}$ producido por una fuerza $\vec{F}$ respecto a un centro O, tomado como origen, y siendo $\vec{r}$ el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza, está dado por el *producto vectorial* $\vec{r} \times \vec{F}$, esto es

$$\vec{M} = |\vec{r}||\vec{F}| \operatorname{sen}(\vec{r}, \vec{F})\ \vec{n}; \ \ |\vec{n}| = 1 \text{ y } (\vec{r}, \vec{F}, \vec{n}) \text{ es terna derecha} \qquad (6)$$

Decimos que $(\vec{r}, \vec{F}, \vec{n})$ es una terna derecha si, con nuestra mano derecha, apuntamos con el dedo medio en la dirección de $\vec{r}$, con el pulgar en la dirección de $\vec{F}$ y si fuésemos capaces de orientar nuestro dedo índice perpendicularmente a los otros dos, entonces nuestro índice apuntaría en la dirección de $\vec{n}$. Por supuesto, esto es lo mismo que lo del tornillo de rosca derecha.

Estamos pues agregando una dimensión más aunada a las dos del plano. De hecho, tenemos también un observador que se mueve en el espacio, a diferencia del observador "plano" de la Fig. 13a. Con esto queremos decir que dicho plano sólo tenía una cara, como si se tratase de material impreso. Los signos, estaban supeditados a la cara escogida. Pero ahora, con libertad para cambiar de cara, los signos positivos se pueden volver negativos y viceversa. En cambio con esta notación vectorial, sabemos de qué cara estamos hablando: el vector $\vec{M}$ (cuando no es cero) nos dá la dirección del plano de rotación (i.e. el plano es ortogonal a la dirección que dicho vector define), lo que aunado al punto de aplicación de la fuerza determina dicho plano, el sentido en el que apunta $\vec{M}$ puede entenderse como dirigido hacia la cara del observador cuando éste mira al giro como positivo, de acuerdo a la vieja concepción (i.e., en el sentido antihorario) y finalmente la magnitud de $\vec{M}$, denotada M, es la intensidad del giro (lo que antes referíamos como la capacidad que tenía la fuerza de hacer girar a la palanca o al sólido).

Pero es fundamental darse cuenta de que podemos recobrar las propiedades de nuestros momentos en un sólido plano, a partir de los momentos vectoriales, cuando estos últimos son todos colineales y determinan, por tanto, el mismo plano de rotación. Concretamente, si nos dan los momentos vectoriales $\vec{M}_i$, $i = 1, \ldots, N$ todos ellos colineales (i.e., ortogonales a un mismo plano), eligiendo arbitrariamente una normal unitaria $\vec{n}$ al plano de rotación[10], común a todos los momentos, podemos expresar los momentos con

$\vec{M}_i = M_i\, s_i\, \vec{n}$, donde s_i es el signo (i.e. $s_i = \pm 1$) y, claro, $M_i \geq 0$.

Eligiendo la otra dirección normal unitaria, todos los momentos $\vec{M}_i$ positivos, esto es, aquéllos para los que $s_i = 1$, se volverán negativos y viceversa. Pero tal asignación de signos, aunque convencional, es consistente. Así, la Condición del Equilibrio sigue inalterada; la suma vectorial de momentos es igual a la suma algebraica de momentos (un escalar) por $\vec{n}$ o por $-\vec{n}$, luego tendremos equilibrio si, y sólo si, la suma vectorial de momentos es igual a cero (vector).

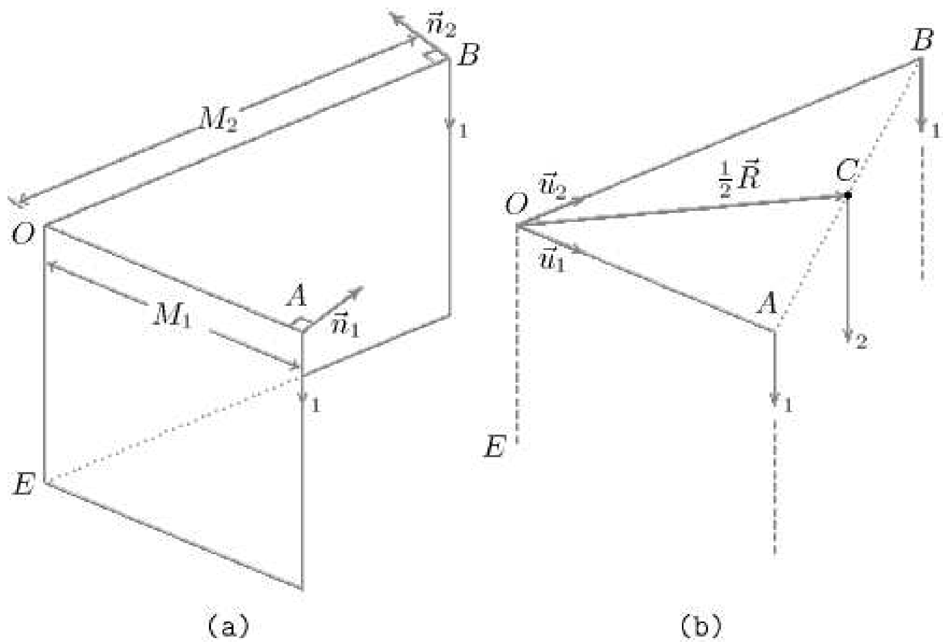
Casi para terminar, comprobamos que el efecto combinado de dos momentos vectoriales en el espacio tiene por resultante (i.e. es equivalente) al momento vectorial que resulta de simplemente sumar, como vectores, a los momentos dados. Esto, independientemente de la presencia de otras fuerzas que produzcan otros momentos. Por supuesto, la *suma vectorial* de que se habla, se realiza de acuerdo a la llamada Ley del Paralelogramo utilizada para sumar fuerzas[11] y no es otra que la regla geométrica que se utiliza para sumar vectores, representados por flechas.

Procederemos primero en el caso general con dos momentos vectoriales $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$ no colineales calculados con respecto a un centro O. Para cada uno de ellos, consideremos al único plano Π_i perpendicular a $\vec{M}_i$ que pasa por O, $i = 1, 2$. Digamos que $\vec{M}_i = M_i\, \vec{n}_i$, $i = 1, 2$; luego, $\vec{n}_i$ es la normal unitaria que orienta al plano Π_i, $i = 1, 2$.

El plano Π_i es pues el plano de rotación del momento $\vec{M}_i$. Ahora tales planos tienen un punto en común (a saber O) y no pueden ser el mismo, así que su intersección es una recta por O, representada por OE en la Figura 15a. Esta será nuestra vertical. El plano por O, perpendicular a

[10] La elección no es tan arbitraria: es una de dos. Si $\vec{n}$ es una, la otra es $-\vec{n}$.

[11] Una demostración de la Ley del paralelogramo para sumar fuerzas, utilizando la segunda ley de Newton, se ofrece en el libro de Nara (1964, p. 21)



Sumando los momentos $M_1\vec{n}_1$ y $M_2\vec{n}_2$

Figura 15.

OE, a saber AOB, será, por tanto, nuestro horizonte, donde OA y OB son las rectas horizontales de Π_1 y Π_2, respectivamente. Y estos planos son representados, respectivamente, con AOE y BOE en la Fig. 15a.

Ahora bien, el momento $\vec{M}_1$ en el plano AOE (i.e. Π_1), respecto al origen (y centro de giro) O, lo podemos representar como producido por una fuerza vertical unitaria "hacia abajo", permítasenos denotarla con $\overrightarrow{-1}$, que actúa en la posición A perpendicular a su brazo de palanca de magnitud M_1 y cuyo momento resulta positivo (en el sentido antihorario) para un observador que ve al plano AOE de frente a $\vec{n}_1$. Similarmente, tenemos la fuerza unitaria vertical $\overrightarrow{-1}$ posicionada a una distancia M_2 del origen, en B, como la que produce el momento $\vec{M}_2$ en el plano BOE y que se mira positivo viendo a dicho plano frente a $\vec{n}_2$.

El efecto combinado de las fuerzas unitarias verticales $\overrightarrow{-1}$ aplicadas simultáneamente en A y en B deberá tener por resultante balanceada una fuerza doble vertical, denotada por $\overrightarrow{-2}$, aplicada en el punto medio C del segmento que une A con B, como se representa en la figura 15b. Para convencernos de ello, recordemos el argumento empleado en la equivalencia entre la suma de los momentos M_1 y M_2 con M_R en la prueba, por inducción, de que suma algebraica de momentos igual a cero implica equilibrio (ver figuras 6–9) con la diferencia de que, ahora, las fuerzas son iguales.

Así pues el efecto combinado de los dos momentos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$ será entonces el momento que produce la fuerza vertical hacia abajo de dos unidades de magnitud ($\overrightarrow{-2}$) posicionada en el punto C del plano horizontal y cuyo vector de posición ha sido representado por $\frac{1}{2}\vec{R}$ (Fig. 15b; luego se trata de un momento vectorial $\vec{M}_R$ cuya magnitud esta dada por

$$M_R = |\frac{1}{2}\vec{R}||\overrightarrow{-2}| = R, \text{ donde } R = |\vec{R}|\,,$$

mientras que su dirección, dada por el vector unitario $\vec{n}$ perpendicular al plano COE, es en la que apunta una vez rotado $\frac{\pi}{2}$ radianes el vector $\frac{1}{2}\vec{R}$ en el plano AOB, viéndolo desde arriba (Fig. 16). Naturalmente, el vector $\frac{1}{2}\vec{R}$ no es otro que la semisuma de los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ (puesto que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio).

Considere ahora dos vectores unitarios $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ en la dirección, respectivamente, de los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, ver Fig. 15b. Tendremos entonces que

$$\vec{R} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = M_1\vec{u}_1 + M_2\vec{u}_2$$

En la figura 16 hemos representado esta suma, viendo desde arriba al plano AOB. En ella se aprecia que los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ se obtienen de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ rotándolos noventa grados ($\frac{\pi}{2}$ radianes) en el sentido positivo.

Rotando $+\frac{\pi}{2}$ radianes cada vector que aparece en la figura 16 (excepto $\vec{n}$, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$), $M_i\vec{u}_i$ pasa a ser $M_i\vec{n}_i$, $\vec{R}$ se convierte en $R\vec{n}$ y obtenemos una justificación de la relación

$$\vec{M}_R = R\,\vec{n} = M_1\vec{n}_1 + M_2\vec{n}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2\,,$$

demostrando que el momento resultante de combinar los momentos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$, está dado por la suma vectorial de los mismos.

Para finalizar, probemos la Condición del Equilibrio (rotacional) en el espacio, procediendo por inducción matemática. Cuando n, el número de momentos, es menor o igual que la unidad, la condición se cumple, pues la propiedad se reduce a la del sólido plano que ya vimos. Supongamos pues la validez de la condición para $n = k$ ($k \geq 1$) y probémosla para $n = k + 1$, donde $k + 1 \geq 2$. Tenemos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, … ($k + 1$ momentos). Ahora bien, por lo antes demostrado, su efecto es equivalente a

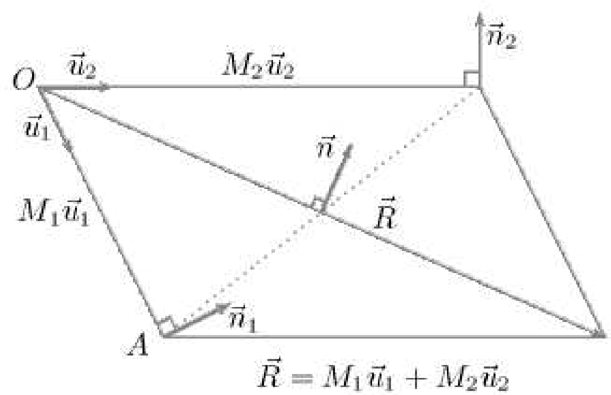


Figura 16.

la de los momentos $\vec{M}_R, \ldots$ (k momentos), donde $\vec{M}_R$ es el equivalente de $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$ combinados (y coincide con la suma vectorial de éstos). El sistema original de $k+1$ momentos estará en equilibrio si, y sólo si, el sistema (equivalente) de k momentos está en equilibrio. Pero, por hipótesis de inducción, esto último ocurre si, y sólo si

$$\vec{M}_R + \ldots = \vec{0}. \text{ O sea, si y sólo si } \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots = \vec{0},$$

lo cual completa la demostración por inducción.

Por último, utilizando la notación del producto vectorial, así como la propiedad distributiva del mismo, verificaremos que cuando hay equilibrio completo, i.e. tanto rotacional como traslacional, la condición sobre los momentos no depende del centro de giro.

Más precisamente, dadas n fuerzas en un sólido tendremos equilibrio si, y sólo si, se satisfacen simultáneamente

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}\,,$$

donde para la primera las fuerzas $\vec{F}_i$ son trasladadas (sin rotar) a un origen común y para la segunda los $\vec{r}_i$ denotan los vectores de posición (con respecto a un centro O) de los puntos de aplicación de las fuerzas $\vec{F}_i$, respectivamente. Sea Oún segundo centro de giro, con respecto al cual $\vec{d}$ es el vector de posición de O. Ahora bien, con respecto al nuevo centro los vectores de posición de las $\vec{F}_i$ serán $\vec{d} + \vec{r}_i$. Expresando la suma de momentos de las fuerzas con respecto a O'y aplicando la ley distributiva, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{d}+\vec{r}_i)\times\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{d}\times\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\vec{d}\times\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i+\vec{0}=\vec{0}\,,$$

pues $\vec{d}\times\vec{0}=\vec{0}$. Hemos probado que cuando hay equilibrio traslacional la condición de equilibrio rotacional es independiente del centro de giro elegido. En la práctica dicho centro es elegido a conveniencia.

4. Comentarios Finales

La prueba de la Ley de la Palanca que hemos ofrecido es una moderna que tomando elementos de la demostración de Galileo, la simplifica e intenta emular la prueba de Lagrange, la cual, de acuerdo a Mach, sería la más adecuada para el gusto de un físico moderno. La elegante prueba de Lagrange (Mach 1960, p. 18) tiene el inconveniente de presuponer el conocimiento de centros de gravedad (seguramente además la expresión del momento en el caso simple e integración). Entre sus ventajas está la concisión, el tomar una palanca-barra, etc. Creemos que al acercar entre sí ambas versiones nos hemos librado de la objeción de Mach a las pruebas originales de Arquímedes y Galileo, sin dejar de poner de manifiesto la esencia de la cuestión: la relación entre las fuerzas externas e internas.

Mach argumenta: *De hecho, la suposición que el efecto, disturbante del equilibrio, de un peso P a la distancia L del eje de rotación es medido por el producto $P{\cdot}L$ (el llamado momento estático), es más o menos tácitamente introducido por Arquímedes y todos sus sucesores* (Mach 1960, p. 19).

Se recordará que en ambas demostraciones clásicas el paso crucial consiste en sustituir, en una palanca en equilibrio, un peso particular por una segunda palanca en equilibrio con dos pesos (cuya suma iguala al peso original), con el propósito de luego deshacerse de la segunda palanca al suspender directamente los dos pesos de la palanca original. Mach precisa: *Si un peso situado a cierta distancia del fulcro es dividido en dos partes iguales y si estas partes se mueven en direcciones contrarias simétricamente respecto al punto de apoyo original; uno de los pesos iguales es llevado tan cerca del fulcro como el otro es apartado del fulcro. Si se asume que la acción permanece constante durante tal procedimiento, entonces la forma particular de dependencia del momento sobre L está implícitamente determinada por lo que ha sido hecho, puesto que el resultado sólo es posible cuando la forma sea PL, o sea, proporcional a L (Mach 1960, p. 20).*

Independientemente de si uno está o no de acuerdo con Mach, en nuestra prueba no hay tal corrimiento de pesos, gracias, en buena medida, a haber tomado un equivalente de un verdadero sistema palanca-barra (i.e. una segunda palanca fijada a la grande). Y gracias, desde luego, a haber insistido en distinguir entre fuerzas internas y externas, delegando en estas últimas el papel rector del equilibrio.

Bibliografía.

ARNOLD, V.I., 1997. *On Teaching Mathematics*

http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

http://www.ceremade.dauphine.fr/~msfr/articles/arnold/PRE_anglais.tex

http://www.ceremade.dauphine.fr/~msfr/articles/arnold/PRE_anglais.ps

(La segunda opción es de un archivo LaTeX y la tercera de un archivo Postscript)

BEER, FERDINAND P. & E. RUSSELL JOHNSTON, 1996. *Mecánica Vectorial para Ingenieros. "Estática"*. Sexta Edición. México:McGraw-Hill.

GALILEO, 1954. Dialogues Concerning Two New Sciences. New York: Dover Publications, Inc. (Reimpresión inalterada de la traducción de Henry Crew y Alfonso de Salvio, originalmente publicada por The Macmillan Company).

HEATH, (SIR) THOMAS, 1897. The works of Archimedes with the method of Archimedes. Cambridge: Cambridge University Press.

MACH, ERNST, 1960. The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of Its Development (Translated by Thomas J. McCormack) Sexta Edición (novena edición alemana). The Open Court Publishing Co. USA: LaSalle, Ill. [Desarrollo histórico-crítico de la Mecánica. Argentina: Espasa-Calpe Argentina, S.A. 1949.]

NARA, H., 1964. Mecánica Vectorial para Ingenieros, Parte I: Estática. México: Limusa Wiley, S. A.