TEOREMAS ERGODICOS

Arturo Fregoso*

Notación

$\forall$ significa para todos excepto un conjunto de medida cero

$\doteq$ significa igual excepto en un conjunto de medida cero.

Sea X un conjunto no vacío, un semi-anillo en X es un conjunto Γ tal que:

i) $\Gamma \subset \mathfrak{P}(X) = \{ A \mid A \subset X \}$

ii) $\emptyset \in \Gamma$

iii) $A, B \in \Gamma \Rightarrow AB \in \Gamma$

iv) $A, B \in \Gamma \Rightarrow \{C_n \in \Gamma\}_{n=1}^{\infty} \cdot \ni \cdot C_n C_m = \emptyset$ y $A - B = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$.

Asímismo, un σ-anillo en X es un conjunto Λ tal que:

i) $\Lambda \subset \mathfrak{P}(X)$

ii) $\{ A_n \in \Lambda \}_{n=1} \Rightarrow \bigcup_{n=1} A_n \in \Lambda$

iii) $A, B \in \Lambda \Rightarrow A - B \in \Lambda$

Sea Γ un semi-anillo en X, una medida en X es una función $\mu : \Gamma \to R$ tal que:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

* Profesor de Tiempo Completo de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.

ii) μ es σ-aditiva

iii) μ es monótona

Sea μ una medida en el semianillo Γ entonces se define $\mu^*: \mathfrak{P}(X) \to R$ como $\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid \{A_n \in \Gamma\}_{n=1}^{\infty} \text{ y } A \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$

Si $A \not\subset \sum_{i=1}^{\infty} A_n$ para toda familia numerable $\{A_n\}_{n \in N} \subset \Gamma$, entonces se define $\mu^*(A) = \infty$.

__Def__: $A \subset X$ es μ-medible si

$$\mu^*(S) = \mu^*(SA) + \mu^*(SA^c) \; \forall \; S \subset X$$

LEMA: $\Lambda = \{A \subset X \mid A \text{ es } \mu\text{-medible}\}$ es un σ-anillo en X y $\mu^* \mid \Lambda$ es una medida en Λ. Claramente $\Gamma \subset \Lambda$ y $\mu^* \mid \Gamma = \mu$.

Ejemplo: Sea $X = R^n$ y sean

$$\Gamma = \{(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_i < x_i \leq b_i;\ a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}\} \cup \{\emptyset\} \text{ y}$$

$$\mu : \Gamma \to R \ni \mu(\emptyset) = 0 \text{ y } \mu((a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i);$$

entonces:

i) Γ es un semianillo en X

ii) μ es una medida en Γ

iii) El σ-anillo Λ de los conjuntos μ-medibles es el σ-anillo de los conjuntos Lebesgue-medibles en R^n y $\mu^* \mid \Lambda$ se llama la medida de Lebesgue en R^n la cual es σ-finita i.e.:

Un <u>conjunto medible</u> E <u>es</u> <u>de medida</u> <u>σ-finita</u> si

$\exists \; \{A_n \in \Gamma\}_{n=1}^{\infty} \cdot \ni \cdot \mu(A_n) < \infty$ y

$E = \sum_{n=1}^{\infty} E A_n$. Si X es de medida σ-finita entonces se dice que la medida μ es σ-finita

En este caso se tiene que:

a) $\mu^*(S) = \inf\{\, \mu(A) \mid S \subset A$ y A es abierto $\}$

b) $\Lambda = \{E \subset X \mid \epsilon > 0 \Rightarrow \exists\; A$ abierto y B cerrado en $X \cdot \ni \cdot B \subset E \subset A$ y $\mu(A-B) < \epsilon \}$

Sea (X, Γ, μ) un espacio de medida completo fijo i. e.

$A \in \Gamma \Rightarrow \exists\; A_1, A_2$ μ-medibles, $A_3 \subset A_2$ y $\mu(A_2) = 0 \cdot \ni \cdot A = A_1 \cup A_3$.

<u>Def.</u> 1 : Una <u>transformación</u> μ-<u>medible</u> <u>en</u> X es una función $T: X \to X \cdot \ni \cdot T^{-1}(A) \in \Gamma, \forall A \in \Gamma$.

LEMA 1 : Sea $T: X \to X$ medible y $f: X \to R$ medible, entonces $f \circ T$ es medible

$$\{x \mid f \circ T(x) > a\} = T^{-1}\{y \mid f(y) > a\} \;\forall\, a \in R .$$

LEMA 2 : Sean $S, T: X \to X$ medibles, entonces $S \circ T$ es medible.

<u>Def.</u> 2 : Sea $T: X \to X$, se dirá que T <u>preserva a la medida</u> μ si:

i) T es medible y

ii) $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A), \forall A \in \Gamma$.

LEMA 3 : Si $S, T : X \to X$ p.m. entonces $S \circ T$ también p.m.

LEMA 4 : Sean T_1 y $T_2 : X \to X \cdot \ni \cdot$

i) $T_1 \doteq T_2$

ii) T_1 p.m.

entonces T_2 p.m.

Sea $E \in \Gamma$ entonces :

i) $T_1(x) = T_2(x), \dot{\forall} x \in X \Rightarrow B \in \Gamma \cdot \ni \cdot$

$\mu(B) = 0$ y $T_2^{-1}(E) = T_1^{-1}(E) \cup B \in \Gamma \Rightarrow T_2$ es medible.

ii) $\mu(T_2^{-1}(E)) = \mu(T_1^{-1}(E) \cup B) = \mu(E) \Rightarrow T_2$ p.m.

LEMA 5 : Sean T_1 y $T_2 : X \to X \cdot \ni \cdot T_1 \doteq T_2$ y sea $f : X \to Y$, entonces

$f \circ T_1 \doteq f \circ T_2$. $\{x \mid f \circ T_1(x) \neq f \circ T_2(x)\} \subset \{x \mid T_1(x) \neq T_2(x)\}$.

LEMA 6 : Sean T_1, T_2 y $S : X \to X \cdot \ni \cdot$

i) $T_1 \doteq T_2$

ii) T_1 y S p.m.

entonces $S \circ T_1 \doteq S \circ T_2$ y $T_1 \circ S \doteq T_2 \circ S$ y p.m.

i) $S \circ T_1 \doteq S \circ T_2$ por el lema 5.

ii) $x \in \{x \mid T_1 \circ S(x) \neq T_2 \circ S(x)\} \Rightarrow$

$S(x) \in \{y \mid T_1(y) \neq T_2(y)\} \Rightarrow$

$x \in S^{-1}\{ y \mid T_1(y) \neq T_2(y) \} \Rightarrow$

$\mu \{ x \mid T_1 \circ S(x) \neq T_2 \circ S(x) \} = 0$ ya que S p.m.

$\doteq T_1 \circ S \doteq T_2 \circ S$.

LEMA 7: Sean S_1, S_2, T_1 y T_2 $X \to X \ni$

i) $S_1 = S_2$ y $T_1 = T_2$

ii) S_1 y T_1 p.m.

entonces $S_1 \circ T_1$ y $S_2 \circ T_2$ p.m. y además

i) $S_1 \circ T_1$ y $S_2 \circ T_2$ p.m. por el lema 4 y el lema 3

ii) $S_1 \circ T_1 \doteq S_1 \circ T_2$ por el lema 5 y

$S_1 \circ T_2 \doteq S_2 \circ T_2$ por el lema 6 $\Rightarrow$

$S_1 \circ T_1 \doteq S_2 \circ T_2$

<u>Coralorio:</u> Si en el espacio de medida (X, Γ, μ) se identifican a los conjuntos casi iguales se puede hacer lo mismo con las transformaciones que preservan la medida y son casi iguales en X

Def. 3 es <u>invertible</u> si $\exists$ $S: X \to X \ni T \circ S = S \circ T = I$

Evidentemente en este caso T y S son uno a uno y sobre y además S es única con esa propiedad.

Ejemplos:

1) Sea $X = R^n$ y sea μ la medida de Lebesgue entonces toda

transformación lineal de R^n en R^n cuyo determinante sea ± 1 p.m.

Sea $T: R^n \to R^n$ lineal y $\ni$ $det(T) = \pm 1$;

entonces:

a) Claramente T es medible e invertible ya que es continua y $det(T) \neq 0$.

b) Corolario al teorema de Fubini:

Sea $T: R^n \to R^n$ medible y no singular y sea f Lebesgue-sumable en R^n, entonces:

$$\int_{R^n} f \, d\mu = \int_{R^n} (f \circ T) \, |det(T)| \, d\mu .$$

Como T es medible y no singular y como $E \in \Gamma \Rightarrow$

$T^{-1}(E) \in \Gamma \Rightarrow \chi_{T^{-1}(E)}$ es Lebesgue sumable en R^n entonces

$$\mu(T^{-1}(E)) = \int_{R^n} \chi_{T^{-1}(E)} \, d\mu = \int_{R^n} (\chi_{T^{-1}(E)} \circ T) \, |det(T)| \, d\mu =$$

$$\mu(E) \Rightarrow T \text{ p.m.}$$

2 - Sea $X = [0,1)$ y μ la medida de Lebesgue;

sea $T: X \to X \ni T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$

entonces T p.m. aunque no sea invertible.

Sea $A = [a,b) \subset [0,1)$, entonces:

$$T^{-1}(A) = [\tfrac{a}{2}, \tfrac{b}{2}) \cup [\tfrac{a+1}{2}, \tfrac{b+1}{2}) \Rightarrow \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$$

de donde se sigue que la medida de la imagen inversa de cualquier unión de tales intervalos A , es la misma que la medida de la unión de esos intervalos y por lo tanto T p. m.

Def. 4: Sea $T: X \to X$ y $A \subset X$; un punto $\underline{x \in A}$ es recurrente (respecto a T y A) si $\exists\ n \in N \cdot \ni \cdot T^n(x) \in A$.

Asi mismo, se dirá que x es recurrente en el sentido fuerte si es recurrente para una infinidad de naturales.

Teorema de recurrencia: (Poincaré 1890, sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica, Acta Math. 13 1-270 y Caratheodory 1919).

Sea $\mu(X) < \infty$ y supóngase que $T: X \to X$ p. m., entonces $\forall\ x \in E$ es recurrente para una infinidad de naturales n y $E \in \Gamma$

a) Sea $E \in \Gamma$ y sea $F = \{x \in E \mid T^n(x) \notin E\ \forall n\}$

i) $x \in F \Leftrightarrow x \in E$ y $x \notin T^n(E)\ \forall n \Leftrightarrow$

$x \in E$ y $x \in T^{-n}(E^c)\ \forall\ n \Leftrightarrow$

$$F = E \cap \bigcap_{n=1} T^{-n}(E^c) \Rightarrow F \in \Gamma .$$

ii) $x \in F \cap T^{-n}(F) \Leftrightarrow x \in F$ y $T^n(x) \in F \Rightarrow$

$x \in E$ y $T^n(x) \in E \Rightarrow x \notin F \Rightarrow$

$F \cap T^{-n}(F) = \emptyset\ \forall n \in N$.

iii) $x \in T^{-n}(F) \cap T^{-(n+p)}(F) \Leftrightarrow$

$T^n(x) \in F$ y $T^n(T^p(x)) \in F \Leftrightarrow$

$$x \in T^{-n}(F \cap T^{-p}(F)) = \emptyset \Rightarrow$$

$$T^{-n}(F) \cap T^{-(n+p)}(F) = \emptyset \quad \forall n, p \in N .$$

iv) Supóngase que $\mu(F) = a > 0$, entonces

$\mu(T^{-n}(F)) = \mu(F) = a$ n ya que T^n p.m.

$n \in N$.

Sea $T^{0} = I$ entonces

$$\mu\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^{-n}(F)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(F)) = \sum_{n=0}^{\infty} a = \infty \leq$$

$\mu(X) < \infty$, por lo tanto $\mu(F) = 0 \Rightarrow$

$\dot{\forall}$ $x \in E$ es recurrente $\forall$ $E \in \Gamma$.

b)

i) Para cada natural n sea $F_n = \{ x \in E \mid T^{kn}(x) \notin E, \forall k \in N \}$

entonces de a) se tiene que $\mu(F_n) = 0 \ \forall n \Rightarrow$

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0 \Rightarrow E \doteq E - \sum_{n=1}^{\infty} F_n = E'$$

ii) 1) $x \in E' \Rightarrow x \notin F_1 = F \Rightarrow$ $k_1 \in N \ \cdot \ni \cdot \ T^{k_1}(x) \in E$.

2) $x \in E' \Rightarrow x \notin F_{2k_1} \Rightarrow$ $k_2 \in N \ \cdot \ni \cdot$

$T^{2k_1k_2}(x) \in E$ con $2k_1k_2 > k_1 \Rightarrow$ (por inducción)

$T^r(x) \in E$ para una infinidad de naturales r, para casi toda $x \in E$ y para cualquier $E \in \Gamma$.

Evidentemente el teorema no es válido si $\mu(X) = \infty$ ya que, por ejemplo si $X = R^n$, μ es la medida de Lebesgue y $T: X \to X \ni T(x) = x + a$ con $a \in R^n$ constante entonces T es invertible, p.m. y casi ningún punto de E es recurrente $\forall$ $E \in \Gamma$.

<u>Problemas</u>: 1.- Supóngase que $\mu(X) < \infty$, que T p.m. y que $E \in \Gamma$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \chi_E T^n(x)$ diverge $\dot{\forall}$ $x \in E$. De manera más general, si f es una función medible y no negativa en X entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(T^n(x))$ diverge $\dot{\forall}$ $x \in E = \{x \mid f(x) > 0\}$.

a) Evidentemente $\sum_{n=0}^{\infty} \chi_E T^n(x) = \infty$ $\dot{\forall}$ $x \in E$ ya que $E \in \Gamma \Rightarrow T^n(x) \in E$ para una infinidad de $n \in N \Rightarrow \chi_E T^n(x) = 1$ para una infinidad de $n \in N$.

b) Sea f medible y no negativa en X, sea $E = \{x \mid f(x) > 0\}$ y para cada natural k sea $E_k = \{x \mid f(x) > k^{-1}\}$ entonces:

i) $E = \sum_{k=1}^{\infty} E k$

ii) $T^n(x) \in E_k$ para una infinidad de $n \in N$

$\dot{\forall}$ $x \in E_k$, $\forall$ $k \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(T^n(x)) = \infty$

$x \in E$.

2.-Sea $X = R^n$, μ la medida de Lebesgue, sea $A \in \Gamma \ni$ $\mu(A) < \infty$ y sea

$T: X \to X \ni T$ p.m. entonces $\forall x \in A$ es un punto de acumulación de $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Considérese la colección numerable de esferas abiertas S_m de centro y radio racionales cuya intersección B_m con A no es vacia, entonces $A = \sum_{m=1}^{\infty} B_m$.

Casi todo punto de B_m es recurrente en el sentido fuerte y si B'_m es el subconjunto excepcional de B_m entonces $\mu(B'_m) = 0 \Rightarrow$

$$\mu(\sum_{m=1}^{\infty} B_m) = 0 \Rightarrow A \doteq A - \sum_{m=1}^{\infty} B'_m = A'.$$

Sea $x \in A'$ y sea 0 una vecindad abierta cualquiera de x entonces $\exists\ p \in N \ni x \in B_p \subset 0$ y como $x \in B_p - B'_p$ entonces x es f-recurrente con respecto a $B_p \Rightarrow T^n(x) \in 0$ para una infinidad de n.

Si $T: X \to X$ p.m. y $\mu(X) < \infty$ entonces el teorema de recurrencia establece que para cualquier conjunto medible sucede que casi todos sus puntos son recurrentes una infinidad de veces. Nos preguntamos ahora:

1) ¿Tales puntos tienen un "tiempo medio" de estancia para cada medible E? i.e.

$$¿\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_E\, T^n(x) \ ?$$

2) De manera más general, ¿para qué clase de funciones medibles

en X existe este tiempo medio en algún sentido ? i.e.

¿Cuál es la clase $\mathfrak{C}$ $\cdot \ni \cdot$

$$\mathfrak{C} = \{ f : X \to R \mid f \text{ es medible y } \exists \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{\infty} f(T^n(x)) \} ?$$

Sea $T : X \to X$ que p.m. y sean $\mathfrak{M} = \{ f : X \to C \mid f \text{ es medible} \}$

y $U_T : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ $\cdot \ni \cdot$ $U_T(f) = f \circ T$, entonces

i) U_T es lineal y $f \in \mathfrak{M} \Rightarrow U_T(f) \in \mathfrak{M}$

ii) $U_T : \mathfrak{M}^+ \to \mathfrak{M}^+$

iii) $| U_T(f) | (x) = | U_T(f)(x) | = | f(T(x)) | = | f | \circ T(x)$

$= U_T(| f |)(x), \forall x \in X \Rightarrow | U_T(f) | = U_T(| f |)$

iv) Sean $1 \leq p < \infty$ y $\| f \|_p = (\int_X | f |^p d\mu)^{1/p}$, entonces

$U_T : L_p(X, C) \to L_p(X, C)$ $\cdot \ni \cdot$ $\| U_T(f) \|_p = \| f \|_p$

$\forall f \in L_p(X, C)$.

a) Sea $E \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(E) < \infty$ entonces $\chi_E \circ T = \chi_{T^{-1}(E)}$

$$U_T(\chi_E) \Rightarrow \| U_T(\chi_E) \|_p = \mu(T^{-1}(E))^{1/p} = \mu(E)^{1/p} = \| \chi_E \|_p .$$

b) Sea $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ $\cdot \ni \cdot$ $x_i > 0$ y $E_i \in$ tal que $\mu(E_i) < \infty, i = 1, \ldots,$

n entonces

$$\| U_T(f) \|_p = \| \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i} \circ T \|_p = \| \sum_{i=1}^{n} x_i U_T(\chi_{E_i}) \|_p =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \| x_i U_T(\chi_{E_i}) \|_p = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \chi_{E_i} \|_p = \| f \|_p$$

por ser $x_i > 0$ y $U_T : \mathfrak{M}^+ \to \mathfrak{M}^+$

c) Sea $f \in (\mathfrak{M}^+, R) \Rightarrow f_n = \sum_{i=1}^{r_n} x_i^n \chi_{E_i^n} \ni$

$x_i > 0$, $E_i \in \mathfrak{B}$ $i=1,\ldots,r_n$, $\forall n$ y $f_n \uparrow f \Rightarrow$

$U_T(f_n) \uparrow U_T(f)$ y $U_T(f_n), U_T(f) \in \mathfrak{M}^+$ $\forall n \Rightarrow$

$\| U_T(f) \|_p = \lim \| U_T(f_n) \|_p = \lim \| f_n \|_p = \| f \|_p \Rightarrow$

$f : X \to R$ es medible entonces $\| U_T(f) \|_p = \| f \|_p$

y analogamente si $f : X \to C$ es medible ya que

$$\| f \|_p = \| \, |f| \, \|_p \quad \text{y} \quad | U_T(f) | = U_T(|f|)$$

LEMA: Sea $T : X \to X$ que p.m. entonces T induce una transformación lineal acotada e isométrica del espacio de Hilbert $L_2(X, C)$ en si mismo bajo la ley $U(f) = f \circ T$.

Así pues, al menos para funciones en $L_2(X,C)$ la pregunta de que para cuales funciones existe en algún sentido el límite $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ es equivalente a indagar para que funciones existe el límite uniforme $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f)$ en donde U es una transformación lineal isométrica de

$L_2(X, C, \mu)$ en si mismo lo cual, a su vez es contestado por el siguiente teorema de Von Neumann (1932).

<u>Teorema ergódico medio</u>: Sea $U: H \to H$ una transformación isométrica del espacio de Hilbert complejo H en si mismo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f = P(f), \forall f \in H$$ en donde P es la proyección octogonal del subespacio cerrado $I_U = \{ f \in H \mid U(f) = f \}$

Sea $(H, \| \ \|)$ un espacio complejo de Hilbert fijo.

<u>Teorema</u> 1 (F. Riesz) Si M es un subespacio cerrado de H y $x \in H$ entonces existe $x_1 \in M$ y $x_2 \in M^{\perp} = \{ y \in H \mid y \perp z \in M \}$ únicos $\cdot \ni \cdot$ $x = x_1 + x_2$.

<u>Teorema</u> 2 (F. Riesz) Si $F: H \to C$ es lineal y acotada entonces $\exists$ $y \in H$ único $\cdot \ni \cdot$ $F(x) = (x, y), \forall x \in H$ y además $\| F \| = \| y \|$.

<u>Def</u>: Una transformación lineal $U: H \to H$ es <u>isométrica</u> si $\| U(x) \| = \| x \|$ $x \in H$, en cuyo caso se tendrá que:

i) U es acotada

ii) $(U(x), U(y)) = (x, y)$

$$\| U(x+y) \|^2 = \| x+y \|^2 \Rightarrow (U(x)+U(y), U(x)+U(y)) =$$

$$(U(x), U(x)) + (U(x), U(y)) + (U(y), U(x)) + (U(y), U(y)) =$$

$$(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x+y, x+y) \Rightarrow$$

$$U(x, y) + U(y, x) = (x, y) + (y, x)$$ ya que $(U(x), U(x)) = (x, x), \forall x$

y como $\overline{(U(x), U(y))} = (U(y), U(x))$ y $\overline{(x,y)} = (y,x)$

entonces $\Re(U(x), U(y)) = \Re(x,y) \ \forall\, x,y \in H$

$\Rightarrow \Re(U(ix), U(y)) = \Re(i\,U(x), U(y)) = \Re(i(U(x),(U(y)))$

$= -\Im(U(x), U(y)) = -\Im(x,y) = \Re(i(x,y)) = \Re(ix,y)$

$\Rightarrow (U(x), U(y)) = (x,y) \ \forall x,y \in H.$

iii) $U(x) = 0 \Leftrightarrow (U(x), U(x)) = (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow U$ es uno a uno $\Leftrightarrow \exists\, U^{-1} : Im(U) \to H$

la cual también es una isometría ya que

$y = U(x) \Rightarrow \| U^{-1}(y) \| = \| U^{-1}U(x) \| = \|x\| = \|U(x)\| = \|y\|$

$\forall\ y \in Im(U)$.

Si además $Im(U) = H$ entonces se dirá que U es unitaria y si H es real entonces se suele decir que U es ortogonal.

Evidentemente, U unitaria $\Leftrightarrow U^{-1}$ unitaria.

LEMA: Sea $T: H \to H$ lineal y acotada, entonces $\exists\ T^*: H \to H$ lineal y acotada única $\ni (T(x), y) = (x, T^*(y)), \forall\, x,y \in H$ y además $\|T^*\| = \|T\|$. (T^* se llama la adjunta de T).

Sea $y \in H$ y $F_y: H \to C \ni F_y(x) = (T(x), y)$ entonces F_y es lineal y acotada ya que:

$$| F_y(x) | = | (T(x), y) | \le \| T(x) \| \, \|y\| \le (\|T\| \, \|y\|) \, \|x\| \Rightarrow$$

$\exists\ y^* \in H$ único $\ni$ $F_y(x) = (T(x), y) = (x, y^*)$

$\forall\ x \in H$ y además $\|F_y\| = \|y^*\|$

Sea $T^*: H \to H \ni T^*(y) = y^*$

a) Si además T es invertible entonces $T^{-1} = T^*$ y T es unitaria $\Leftrightarrow$ $T^*T = TT^* = I$

4) T unitaria $\Leftrightarrow TT^* = T^*T = I$

5) Una <u>proyección ortogonal</u> en H es una transformación lineal acotada $P: H \to H \ni P^2 = P$ y $\|P\| \leq 1$.

Sea P una p. o. en H entonces

i) $N(P) = \{ y \in H \mid P(y) = 0 \}$ es un subespacio lineal cerrado de H llamado el <u>espacio nulo de P.</u>

ii) Sea $z \in Im(P) \Leftrightarrow \exists\ z_1 \in H \ni P(z_1) = z \Rightarrow P(z) =$

$= P^2(z_1) = P(z_1) = z \Rightarrow$

$$\|P(z)\| = \begin{cases} \|z\| & \text{si } z \in Im(P) \\ \leq 1 & \text{si } z \notin Im(P) \end{cases}$$

$\|P\| = 1$ a menos que $P = 0$. Así pues una p. o. que no sea nula es isométrica.

iii) $Im(P)^{\perp} = N(P)$

iv) $P^* = P$

v) Si

entonces P es una p. o. en H.

vi) Sean P_1 y P_2 p.o. en H entonces

$I_m(P_1) \quad I_m(P_2) \Leftrightarrow$

$I_m(P_1) \subset I_m(P_2)^{\perp} = N(P_2)$ y

$I_m(P_2) \subset I_m(P_1)^{\perp} = N(P_1) \Leftrightarrow$

$P_1 P_2 = 0 \Rightarrow$

$P_2 P_1 = 0$ y $P_1 + P_2$ es una p.o. $\cdot \ni \cdot$

$I_m(P_1 + P_2) = \{ x_1 + x_2 \mid x_i \in I_m(P_i) \}$.

LEMA: Sea $T : H \to H$ lineal y continua, entonces

$I_T = \{ f \in H \mid T(f) = f \}$ es un subespacio lineal cerrado de H.

a) La linealidad de T $\Rightarrow$ linealidad de I_T.

b) Sea f adherente a $I_T \Leftrightarrow \exists\ f_n \in I_T \cdot \ni \cdot f_n \to f \Rightarrow T(f_n) =$

$= f_n \to T(f) \Rightarrow \| T(f) - f \| \leq \| T(f) - f_n \| + \| f - f_n \| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$f \in I_T$.

LEMA: Sea M un subespacio cerrado de H entonces existe una y solo una p.o. $P : H \to H \cdot \ni \cdot P(f = f_1 + f_2) = f_1$ con $f_1 \in M$ y $f_2 \in M^{\perp}$ únicos $\cdot \ni \cdot f = f_1 + f_2$.

i) P es lineal.

ii) $P^2 = P$

iii) $\| P(f) \| = \| f_1 \| \leq \| f_1 + f_2 \| = \| f \| \quad f \in H \Rightarrow$

P es acotado y $\|P\| \leq 1 \Rightarrow P$ es una p.o.

En este caso se dice que P es la proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado M.

Claramente $I_m(P) = M$.

Teorema Ergódico medio:

Sea $U: H \to H$ isométrica y sea P la p.o. sobre el subespacio cerrado I_U. entonces $\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f = P(f) \; \forall f \in H$.

i) $I_U = I_{U^*}$

Como U es isométrica entonces

$$(U(f), U(g)) = (f, g) \; \forall f, g \in H \Rightarrow U^* U = I$$

Así pues $f \in I_U \Rightarrow U^*(f) = U^* U f = f \Rightarrow f \in I_{U^*}$.

Sea $f \in I_{U^*}$ entonces

$$\| U(f) - f \|^2 = (U(f) - f, U(f) - f) =$$

$$\| U(f) \|^2 - (f, U(f)) - (U(f), f) + \| f \|^2 ;$$

$$\| U(f) \|^2 = (U(f), U(f)) = (f, f) = \| f \|^2 ,$$

$$(f, U(f)) = (U^*(f), U^* U(f)) = (f, f) = \| f \|^2 \quad y$$

$$(U(f), f) = (f, U^*(f)) = (f, f) = \| f \|^2 \Rightarrow$$

$$\| U(f) - f \|^2 = 0 \Rightarrow U(f) = f \Rightarrow f \in I_U .$$

ii) Sea P la p.o. sobre I_U; entonces

$$f \in I_U \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f) = f = P(f)$$

iii) $f = g - U(g)$ para alguna $g \in H \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f) = \sum_{k=0}^{n-1} U^k(g - U(g) = \sum_{k=0}^{n-1} U^k(g) -$$

$$\sum_{k=1}^{n} U^k(g) = g - U^n(g) \Rightarrow$$

$$\left\| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f) \right\| = \left\| \frac{g - U^n(g)}{n} \right\| \leq \frac{2}{n} \|g\| \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f) = 0$$

Evidentemente $K = \{ g - U(g) \mid g \in H \}$ es un subespacio lineal de H por ser U lineal pero K no es necesariamente cerrado

iii) Sea $f \in \overline{K} \Leftrightarrow \exists\, g_p \in H \cdot \ni \cdot\ g_p - U(g_p) = f_p \in K$ y $f_p \to f$.

Sea $A_n = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U^k$ entonces

$$\|A_n\| \leq n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \|U^k\| \leq 1 \quad n \Rightarrow$$

$$\|A_n(f)\| \leq \|A_n(f - f_p)\| + \|A_n(f_p)\| \leq$$

$$\|f - f_p\| + \|A_n(f_p)\|$$

Así pues, $\epsilon \geq 0 \Rightarrow p \in N \ni \| f-f_p \| < \varepsilon/2$

y $\exists \; n \in N \ni \| A_n(f_p) \| = n^{-1} \| \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f_p) \| < \varepsilon/2$

los cuales existen por ser $f_p \to f$ y $f_p \in K$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f) = 0 \;\forall f \in \overline{K}$$

iv) $\overline{K}^{\perp} = I_U$

$$f \in \overline{K}^{\perp} \Leftrightarrow (f, g - U(g)) = 0 \;\forall g \in H \Leftrightarrow$$

$$(f, g) - (U^*(f), g) = 0 \quad \forall g \in H \Leftrightarrow$$

$$(f - U^*(f), g) = 0 \;\forall g \in H \Rightarrow U^*(f) = f$$

$$\Leftrightarrow U(f) = f \Leftrightarrow \overline{K}^{\perp} = I_U$$

v) Sea $f \in H \Rightarrow \exists \; f_1 \in I_U$ y $f_2 \in I_U^{\perp}$ únicos $\ni$

$f = f_1 + f_2 \Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f_1) + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f_2) =$$

$$f_1 + 0 = P(f).$$

vi) Supóngase ahora que $U: H \to H$ no es isométrica sino unicamente una contracción i.e. $\| U(f) \| \leq \| f \| \; \forall f \in H$ $\Leftrightarrow \| U \| \leq 1$ entonces el teorema sigue siendo válido. Para demostrarlo basta con demostrar que también es valido para la contracción U la afirmación de que $I_U = I_{U*}$ ya que el resto de la demostración es la misma.

i) Es claro que $\| U \| \leq 1 \Leftrightarrow \| U^* \| \leq 1$.

ii) Sea $f \in I_U$ entonces

$$0 \leq \| U^*(f) - f \|^2 = \| U^*(f) \|^2 - (U^*(f), f) - (f, U^*(f)) + \| f \|^2 =$$

$$\| U^*(f) \|^2 - (f, U(f)) - (U(f), f) + \| f \|^2 =$$

$$\| U^*(f) \|^2 - 2 \| f \|^2 + \| f \|^2 = \| U^*(f) \|^2 - \| f \|^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$U^*(f) = f$$

Teorema ergódico máximo:

Sea $T: X \to X$ que p.m. y para cada $f: X \to R$ sumable sean $U_T^k(f) = f_k$ y $E_f = \{ x \in X \mid \exists n \in N \cdot \ni \cdot \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \geq 0 \}$

entonces $\int_{E_f} fd\, \mu \geq 0$.

Supondremos que f es sumable y $|f(x)| < \infty \; \forall x$.

Sea $m \in N$ y sea

$$E_m = \{ x \in X \mid \exists p \leq m \cdot \ni \cdot \sum_{k=0}^{p} f_k(x) \geq 0 \}$$

entonces $E_m \uparrow E_f \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_{E_m} f d\mu = \int_{E_f} f d\mu$

así pues, para demostrar el teorema basta con demostrar que cada E_m es medible y que $\int_{E_m} f d\mu \geq 0 \ \forall m$.

Sean $m, n \in N$ fijos y sean

i) E_m como ya se definió,

Def: Sean $a_1, \ldots, a_n \in R$ y sea $m \in N \cdot \ni \cdot m \leq n$.

El número a_k será un m-lider si $a_k + a_{k+1} + \ldots +$ $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+p-1} \geq 0$ para alguna $p \cdot \ni \cdot 1 \leq p \leq m$ (F. Riesz les llamo número m-favorables).

Claramente a_k es 1-lider $\Leftrightarrow a_k \geq 0$

Claramente a_k es m-lider $\not\Rightarrow a_k \geq 0$

$a_1 = -3 \ a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 7$

entonces $a_1 < 0$ y a_1 es un 5-lider.

sin embargo el siguiente lema es válido:

LEMA a : Dada la sucesión $a_1, \ldots, a_n$ entonces la suma de los m-lideres de ella es no negativo.

i) Para cada x sea $s(x) =$ suma de los m-lídereres de la sucesión.

$f_0(x), \ldots, f_{n+m-1}(x)$ y sea

ii) $D_R = \{ x \in X \mid f_R(x)$ es un m-líder de la sucesión

$f_0(x), \ldots, f_{n+m-1}(x) \}$ $k=0, \ldots, n+m-1$

entonces :

a) $E_m = D_1$

b) $$D_k = \bigcup_{p=1}^{m} \left(\sum_{r=k}^{k+p-1} f_r \right)^{-1} ([0,\infty)) \Rightarrow D_R \text{ es medible}$$

$k=0,1,\ldots, n+m-1 \Rightarrow E_m$ es medible.

c) $$s(x) = \sum_{k=0}^{n+m-1} f_k(x)\, \chi_{D_k}(x) \Rightarrow s \text{ es medible y}$$

$$\int_X s\, d\mu = \sum_{k=0}^{n+m-1} \int_{D_k} f_k \, d\mu \geq 0 \quad \text{por el \underline{lema a}}$$

d) Sea $1 \leq k \leq n-1$ entonces

$x \in D_k \Leftrightarrow \exists\, p \leq m \cdot \ni \cdot f_k(x) + \ldots + f_{k+p-1}(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\exists\, p \leq m \cdot \ni \cdot f_{k-1}(T(x)) + \ldots + f_{k-1+p-1}(T(x)) \geq 0 \Leftrightarrow$

$T(x) \in D_{k-1} \Rightarrow D_k = T^{-1}(D_{k-1}) \Rightarrow$ (por inducción) $D_k = T^{-k}(D_0) = T^{-k}(E_m)$ $k=1, \ldots, n-1$

como $U_k : L_p(X, R, \mu) \to L_p(X, R, \mu)$ es una isometría para

$1 \leq p < \infty$,

por lo tanto $\| U^k(f) \|_1 = \| f_k \|_1 = \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu = \| f \|_1 \Rightarrow$

$$\int_{D_k} f_k \, d\mu = \int_{T^{-k}(D_0)} f_k \, d\mu = \int_{T^{-k}(D_0)} f \, d\mu = \int_{D_k} f \, d\mu \Rightarrow$$

$$\int_{D_k} f_k \, d\mu = \int_{T^{-k}(D_0)} (f \circ T^k) \, d\mu = \int_X (f \circ T^k)(\chi_{T^{-k}(D_0)}) \, d\mu =$$

$$\int_X (f \circ T^k)(\chi_{D_0} \circ T^k) \, d\mu = \int_X (f \times \chi_{D_0}) \circ T^k \, d\mu =$$

$$\int_X (f \times \chi_{D_0})_k \, d\mu = \| U^k(f \times \chi_{D_0}) \|_1 = \| f \times \chi_{D_0} \|_1 =$$

$$\int_X f \times \chi_{D_0} \, d\mu = \int_{D_0} f \, d\mu = \int_{E_m} f \, d\mu \text{ i. e.}$$

$$\int_{D_k} f_k \, d\mu = \int_{E_m} f \, d\mu , \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Ahora, para $k = n, n+1, \dots, n+m+1$ se tiene que

$$\int_{D_k} f_k \, d\mu \quad \int_X | f_k | \, d\mu = \int_X | f | \, d\mu \Rightarrow$$

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{k=0}^{n+m-1} \int_{D_k} f_k \, d\mu = n \int_{E_m} f \, d\mu + m \int_X | f | \, d\mu \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\int_{E_m} f \, d\mu + \frac{m}{n} \int_X | f | \, d\mu \right) = \int_{E_m} f \, d\mu \geq 0$$

Teorema ergódico individual:

Sea $T: X \to X$ que p.m. y $f \in L_1(X, C, \mu)$ entonces la sucesión $s_n(x) = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)$ converge en casi todo X a una función $f^*(x)$ sumable e invariante (i.e. $f^* o T(x) = f^*(x) \; \forall x$). Si además $\mu(X) < \infty$ entonces $\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$ y $\lim \int_X | f^* - s_n | \, d\mu = 0$.

Nótese primero que no se pierde generalidad si se demuestra el teorema para $f: X \to R$ sumable $\cdot \ni \cdot$ $|f(x)| < \infty \; \forall x \in X$.

1) Sea f sumable, entonces $\{x \mid f(x) > a\}$ es medible $\forall a \in R \Rightarrow X_0 = \{x \mid f_0(x) = f(x) \neq 0\} =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{x \mid f > n^{-1}\} + \sum_{n=1}^{\infty} \{x \quad f < - n^{-1}\}$$ es de medida

σ-finita y como T^k p.m. $\forall k=1,2,\ldots,$ entonces

$X_k = T^{-k}(X_0) = \{x \mid f_k(x) \neq 0\}$ también es de medida

σ-finita $k=1,2,\ldots \Rightarrow X' = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$ es de medida σ-finita

y como $f_k(x) = 0 \; \forall x \in X'^{c} \Rightarrow s_n(x) = 0 \; \forall x \in X'^{c} \Rightarrow$

$f^*(x) = \lim s_n(x) = 0 \; \forall x \in X'^{c}$.

2) Sean $a, b \in R \ni a < b$ y sea

$$\Upsilon = \Upsilon(a,b) = \{ x \mid \underline{\lim}\, s_n(x) < a < b < \overline{\lim}\, s_n(x) \}$$

entonces :

i) f_k sumable $\forall k \Rightarrow \underline{\lim}\, s_n(x)$ y $\overline{\lim}\, s_n$ son medibles $\Rightarrow$

Υ es medible

ii) $x \in \Upsilon \Leftrightarrow \underline{\lim}\, s_n(x) < a < b < \overline{\lim}\, s_n(x) \Rightarrow$

$\exists\, k \ni f_k(x) \neq 0$ ya que de no ser así se tendría que

$\underline{\lim}\, s_n(x) = \overline{\lim}\, s_n(x) = 0 \Rightarrow x \notin \Upsilon \Rightarrow x \in X_k \Rightarrow$

$x \in X' \Rightarrow \Upsilon \subset X'$

iii) $\overline{\lim}\, s_n(x) = \overline{\lim}\, s_n(T(x)) \Rightarrow T^{-1}(\Upsilon) = \Upsilon$

iv) Supóngase que $b > 0$, de no ser así entonces $a < 0$ y entonces los siguientes argumentos se darian para $-a$ y $-f$ en lugar de darlos para b y f:

Sea Z un subconjunto medible de Υ de medida finita y sea

$g : \Upsilon \to R \ni g(x) = f(x) - b\,\chi_Z(x)$ la cual es sumable entonces

$x \in \Upsilon \Rightarrow b < \overline{\lim}\, s_n(x) \Leftrightarrow \exists\, n_0 \in N \ni s_{n_0}(x) > b\,\chi_Z(x) \Leftrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} \{ f_k(x) - b\,\chi_{\Upsilon}(x) \} > 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} g_k(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \{ f\, T^k(x) - b\ \chi_Z(T^k(x)) \} =$$

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} \{ f_k(x) - b\ \chi_{T^{-k}(Z)}(x) \} \geq$$

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} \{ f_k(x) - b\ \chi_{\Upsilon}(x) \} > 0 \Rightarrow$$

$$\Upsilon = \{ x \in \Upsilon \mid \exists\ p \cdot \ni \cdot \sum_{k=0}^{p} g_p(x) \geq 0 \}$$ y como

$g : \Upsilon \to R$ es sumable y $T : \Upsilon \to \Upsilon$ p.m. entonces por el **T.E. Max.** se tiene que

$$\int_{\Upsilon} g d\mu = \int_{\Upsilon} (f - b\ \chi_Z) d\mu \geq 0 \Rightarrow$$

$$\mu(Z) \leq b^{-1} \int_{\Upsilon} f d\mu \leq b^{-1} \int_X |f|\, d\mu \quad \forall\, Z \subset \Upsilon$$

$\cdot \ni \cdot$ Z es medible y de medida finita.

Como $\Upsilon \subset X'$ entonces Υ es de medida σ-finita $\Leftrightarrow$

$$\exists\ Z_n \subset \Upsilon \cdot \ni \cdot Z_n \uparrow \Upsilon \quad \text{y} \quad \mu(Z_n) < \infty \Rightarrow \mu(\Upsilon) =$$

$$= \lim \mu(Z_n) \leq b^{-1} \int_X |f|\, d\mu < \infty$$

por ser f sumable; así pues, Υ es de medida finita. y por lo tanto se tiene que $\int_{\Upsilon} g d\mu = \int_{\Upsilon} (f - b\ \chi\ ) d\mu = \int_{\Upsilon} (f - b) d\mu \geq 0.$

Procediendo analogamente con la función $a - f$ se demuestra que

$$\int_{\Upsilon} (a - f)\, d\mu \geq 0 \Rightarrow \int_{\Upsilon} (a - b)\, d\mu = (a - b)\,\mu(\quad) \geq 0$$

y como $\quad a - b < 0 \quad$ y $\quad \mu(\Upsilon) \geq 0 \Rightarrow \mu(\Upsilon) = 0 \Rightarrow \mu(\Upsilon(a, b)) = 0$

$\forall$ a, b racionales $\cdot \ni \cdot$ $a < b$

$$\Rightarrow \mu \{ x \mid \underline{\lim}\, s_n(x) < \overline{\lim}\, s_n(x) \} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim s_n(x) = f^*(x) \overset{\circ}{\forall} x \in X.$$

3) $\quad f^* T(x) = \lim s_n(T(x)) = \lim s_n(x) = f^*(x) \overset{\circ}{\forall} x .$

4) $$\int_X |s_n|\, d\mu = n^{-1} \int_X \left| \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right| d\mu \leq n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X |f_k|\, d\mu =$$

$$n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X |f \circ T^k|\, d\mu = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \| U_{T^k}(f) \|_1 =$$

$$n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_1 = \|f\|_1 = \int_X |f|\, d\mu \Rightarrow$$ (Lema de Fatou

$$f_n \in M^+ \Rightarrow \int (\underline{\lim}\, f_n) \leq \underline{\lim} \int f_n) \Rightarrow$$

$$\int_X |f^*|\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X |s_n|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu \Rightarrow$$

f^* es sumable.

5) Supongamos ahora que $\mu(X) < \infty$.

Sean p, $n \in N$ y sea

$X_{(p, n)} = \{ x \mid \frac{p}{2^n} \leq f^*(x) < \frac{p+1}{2^n} \}$; entonces :

i) $f^* \circ T = f^* \Rightarrow T : X_{(p,n)} \to X_{(p,n)}$ que p.m. $\forall\, p, n \in N$

ii) Sea $x \in X_{(p,n)}$ y $\varepsilon > 0$ entonces

$$f^*(x) = \lim_{n \to \infty} r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} f_k(x) \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon \in N \ni$$

$$\left| f^*(x) - r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall\, r \geq n_\varepsilon$$

$$f^*(x) - \varepsilon < r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} f_k(x) < f^*(x) + \varepsilon \quad \forall\, r \geq n_\varepsilon$$

Así pues, si $n \geq n_\varepsilon$ entonces

$$n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) - \left(\frac{p}{2^n} - \varepsilon\right) > 0 \Rightarrow$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f_k(x) - \left(\frac{p}{2^n} - \varepsilon\right) \right\} > 0$ al menos para alguna

$n \Rightarrow$ (T. E. Max).

$$\int_{X_{(p,n)}} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f_k(x) - \left(\frac{p}{2^n} - \varepsilon\right) \right\} d\mu = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{X_{(p,n)}} f d\mu \right) - n\left(\frac{p}{2^n} - \varepsilon\right)$$

$$\mu(X_{(p,n)}) = n\left(\int_{X_{(p,n)}} f d\mu - \left(\frac{p}{2^n} - \varepsilon\right) \mu(X_{(p,n)}) \right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\int_{X_{(p,n)}} f d\mu \geq \left(\frac{p}{2^n} - \varepsilon\right) \mu(X_{(p,n)}) \Rightarrow$$

$$\int_{X_{(p,n)}} f d\mu \geq \frac{p}{2^n}\,\mu(X_{(p,n)}) \quad \text{para alguna } n .$$

Analogamente se obtiene que :

$$\frac{p}{2^n}\,\mu(X_{(p,n)}) \leq \int_{X_{(p,n)}} f d\mu \leq \frac{p+1}{2^n}\,\mu(X_{(p,n)})$$

Así mismo, por la definición de $X_{(p,n)}$ se sigue

$$\frac{p}{2^n}\,\mu(X_{(p,n)}) \leq \int_{X_{(p,n)}} f^* d\mu \leq \frac{p+1}{2^n}\,\mu(X_{(p,n)}) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2^n}\,\mu(X_{(p,n)}) \leq \int_{X_{(p,n)}} (f-f^*) d\mu \leq \frac{1}{2^n}\,\mu(X_{(p,n)}) \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{p=1}^{\infty} \int_{X_{(p,n)}} (f-f^*)\, d\mu \right| = \left| \int_X (f-f^*) d\mu \right| \leq 2^{-n}\,\mu(X) \Rightarrow$$

$$\int_X f d\mu = \int_X f^* d\mu \, .$$

6) Caso 1 : f no es acotada

$\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, g$ acotada sumable $\cdot \ni \cdot$ $g \doteq f$ y

$\int_X |f-g|\, d\mu = \| f-g \|_1 < \epsilon \Rightarrow$

$$\| s_n - f^* \|_1 \leq \| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (f_k - g_k) \|_1 + \| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} g_k - g^* \|_1 +$$

$$\| g^* - f^* \|_1 \leq \| f - g \|_1 + \| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} g_k - g^* \|_1 + \| g - f \|_1 \leq$$

$$\| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} g_k - g^* \|_1 + 2\epsilon \quad \forall \; n \Rightarrow$$

si se escoge a $n_0 \cdot \ni \cdot \quad \| n^{-1} \sum_{k=0}^{n_0-1} g_k - g^* \| < \epsilon$

$$\forall \; n \geq n_0 \quad \text{entonces} \quad \| s_n - f^* \|_1 < \epsilon \; \forall \; n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \lim \int | s_n - f^* | \, d\mu = 0$$

Caso 2: f es acotada, entonces cada s_n lo es y usando $\mu(X) < \infty$ y el teorema de la convergencia dominada se demuestra que $\lim \int | f^* - s_n | = 0$.