CONSIDERACIONES HISTORICAS Y HEURISTICAS SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Alejandro López Yáñez*

0. INTRODUCCION

> Sin los conceptos, métodos y resultados descubiertos y desarrollados por las generaciones previas hasta la Antigua Grecia, uno no puede entender las finalidades y logros de las matemáticas de los últimos cincuenta años.
>
> Hermann Weyl

Nos proponemos, por medio de estas breves notas mostrar algunos elementos y aspectos del Cálculo que generalmente no aparecen en los textos de Cálculo y en consecuencia en la enseñanza usual de éste. Consideramos que el conocimiento de este tipo de elementos y aspectos por parte del profesor crea la posibilidad de enriquecer las condiciones de aprendizaje y conocimiento del Cálculo por parte de los alumnos.

Los elementos que presentaremos pueden ser considerados, en una primera aproximación, de tres clases: históricos, psicológicos y filosóficos.

---

*Facultad de Ciencias, UNAM.

I. Mencionaremos algunos elementos importantes de carácter histórico que conducen a tener una visión y entendimiento más amplios e integrados de las Matemáticas, con la consecuente mejora de posibilidades a la hora de la enseñanza.

a) La Historia muestra que las Matemáticas son una ciencia dinámica, en continua evolución en todos aspectos, como:

Generación de conceptos y teorías
Concepciones y enfoques
Metodologías, criterios de verdad y rigor
Interacciones con otros campos del saber humano
Aplicaciones
Formas y difusión de la actividad matemática

b) Al estudiar la génesis de una idea o concepto matemático, en algunos casos podemos obtener indicaciones acerca de sus puntos claves o difíciles y, a través de los diferentes métodos o concepciones usadas en el pasado, generar alternativas para su enseñanza. Podemos conocer las relaciones de esta idea con otras, ya sea de carácter matemático, físico, filosófico, etc. Podemos encontrar motivaciones para su descubrimiento o invención, así como problemas interesantes y menos artificiales conectados con ella.

c) Por medio de la Historia, podemos humanizar y desmitificar el conocimiento y la actividad matemática, situándolas en términos de las personas y circunstancias específicas que las generaron, con sus avances, éxitos, crisis, errores, giros, recovecos, etc.

d) A través de la Historia, podemos situar a las Matemáticas en un contexto social, con las presiones que éste ejerce sobre ellas, las características gremiales e institucionales de la actividad matemática, la interacción de factores extracientíficos y científicos, las modas matemáticas, la profesionalización de la actividad matemática, etc.

II. Es evidente (basta ver los textos de matemáticas) que la enseñanza actual de las matemáticas, sobre todo a nivel medio superior y superior, se reduce esencialmente a presentar una serie de definiciones, teoremas y ejercicios encadenados lógicamente. Esta forma, que es la más económica desde el punto de vista del "conocimiento" del maestro y "entendimiento" del alumno, conduce, entre otras cosas, a crear la imagen en el estudiante de que las matemáticas son una sucesión lógicamente encadenada de definiciones y teoremas que han sido creados por unas mentes superlógicas y que, cuando él sea capaz de seguir paso a paso el razonamiento deductivo de la prueba de un teorema, ya habrá entendido éste. Conclusión totalmente falsa, ya que el tipo de consideraciones o argumentos intuitivos, casos particulares, situaciones sugerentes, experimentación, analogías, etc., que conducen a entender lo que el teorema dice, el por qué se estudia, el por qué esas hipótesis son necesarias, dónde se aplica, el por qué es un enunciado óptimo en algún o algunos sentidos, posibles variantes o generalizaciones, puntos todos éstos, fundamentales para la comprensión del teorema, son desconocidos para el estudiante. En particular la mayoría de los elementos de naturaleza heurística quedan casi totalmente marginados en la enseñanza actual. Decimos casi, porque sólo a través de la resolución de algunos problemas o ejercicios, el estudiante entra en contacto de manera muy implícita con estas herramientas, y aún aquí, en forma deficiente, ya que los ejercicios usualmente son seleccionados y presentados sin consideraciones y ordenamientos que faciliten o propicien el desarrollo de ciertas habilidades y la familiarización con ciertas técnicas o trucos, (que no por elementales, son menos útiles) y carecen en general de comentarios sobre posibles alternativas de valor heurístico, etc.

III. Es importante hacer ver al estudiante que el Cálculo (y en general las Matemáticas) pueden ser concebidos, manejados y usados de diferentes formas y cómo cada una de éstas ha cumplido o cumple un papel, dependiendo del contexto en que se esté situado o de las finalidades que se persigan. Esto contribuiría notablemente, no solamente a crear condiciones más propicias y variadas para entender el material del Cálculo, sino también a darle flexibilidad a ciertas concepciones paleolíticas de las matemáticas y de su enseñanza, que proclaman ser *la* concepción o *la* forma de enseñar las matemáticas.

En las notas pretendemos mostrar, a través de temas específicos de matemáticas, como:

A. Las ideas matemáticas evolucionan y en algunos casos se ha requerido de mucho tiempo y esfuerzo para llevarlas a su forma actual. Presentaremos un teorema de Eudoxo y uno de Arquímedes en los cuales se usa el Método de Exhaución de Eudoxo que es un antecedente muy claro y evolucionado del concepto de límite. Luego presentaremos la forma en que Cavalieri y Fermat manejaban la idea de límite en el cálculo de áreas.
(La Idea de Límite en el Cälculo de Areas, Cap. 1)

B. Al ignorar ciertos aspectos históricos de un tema, se crean lagunas o huecos que repercuten en un conocimiento fragmentado. Se puede decir que, en general, las fórmulas para calcular el área de las figuras geométricas elementales, esto es, triángulos, polígonos regulares e irregulares, y círculo, aparecen como independientes unas de otras. Sin embargo usando la idea de semejanza todas pueden ser derivadas a partir de la determinación del área del triángulo. Citaremos dos teoremas de los Elementos de Euclides y el Primer paso del Teorema de Eudoxo para ilustrar lo afirmado. (La Idea de Límite en Cálculo de Areas, Cap. 1).

C. El proceso creativo de matemáticas es muy complejo y recurre en general a diversos elementos que deben ser destacados. Esto lo ejemplificaremos con la primera parte del teorema de Arquímedes en la que se usan ideas de tipo mecánico y geométrico para descubrirlo y con uan presentación del Teorema Fundamental del Cálculo, en la cual la analogía entre el caso finito y el caso continuo es clara. Este tipo de analogía, fué usada con frecuencia por Leibniz, y posiblemente jugó un papel importante en su descubrimiento del teorema. (La Idea de Límite en Cálculo de Areas y El Teorema Fundamental del Cálculo, Cap. 1 y 3)

D. Hay muchas formas de enfocar, entender y manejar una "misma" idea matemática o resolver un problema, cada una con sus posibilidades y limitaciones determinadas por circunstancias específicas. Esto será ejemplificado con las definiciones de la cicloide de Descartes, Roverbal y Fermat y sus respectivas soluciones al problema de la construcción de la tangente a esa curva. (Construcción de Tangentes, Cap. 2).

E. Existen diferentes concepciones o interpretaciones del Cálculo. Aquí describiremos los aspectos principales de tres de ellas. (Concepciones del Cálculo, Cap. 4).

Finalizaremos puntualizando que, aún aceptando que la presentación de la matemática formal de la enseñanza fuese el mejor camino para introducir al estudiante al conocimiento de las Matemáticas, es una deficiencia grave el no hacerle conciente, aunque sea por medio de comentarios y lecturas marginales, de que se le está presentando un aspecto de las Matemáticas y que otros, al menos tan importantes como éste, están siendo ig norados por el momento y que por lo tanto, para lograr un conocimiento más amplio y profundo de las matemáticas, él tendrá, eventualmente, que manejar esos otros aspectos.

1. LA IDEA DE LIMITE EN EL CALCULO DE AREAS

INTRODUCCION

Uno de los antecedentes más remotos de la idea de límite se encuentra en el Método de Exhaución de Eudoxo (± 408 A.C., ± 355 A.C.). Sin embargo, el hecho de que en el trabajo de este matemá tico griego ya aparezca en una forma bastante desarrollada, hace suponer la existencia de precedentes más antiguos y elementales, por lo que se podría afirmar que el desarrollo del concepto de límite, desde la forma en que lo manejaba Eudoxo hasta la forma en que lo presentamos a los estudiantes actuales de un curso de Cálculo, le tomó a la humanidad alrededor de 22 siglos, a lo lar- go de los cuales notamos períodos de mayor actividad matemática alrededor de ese concepto, como el que va de Cavalieri (1598-1647) a Cauchy (1789-1857). Sabemos, en términos de nuestra experiencia durante el conocimiento y la enseñanza de la idea de límite, que ésta es compleja y difícil de ser captada y manejada, y que, de hecho, a lo largo del tiempo vamos descubriendo nuevas facetas y elementos que permiten tener una visión y manejo más claros y pro fundos de ella. Hay otros ejemplos (números irracionales, números negativos, números imaginarios, medida, dimensión, cardinalidad, ordinalidad, etc.) en donde se presenta esta situación de semejan za entre un proceso histórico de desarrollo prolongado de una idea matemática, con momentos de gran actividad, crisis, irregularida- des y obstáculos y, por otro lado, la existencia de dificultades mayores durante la enseñanza y el conocimiento actuales de esa idea

Esto sugiere que un estudio histórico fino del desarrollo de la idea aportaría elementos para construir un esquema global de l información, procedimientos y etapas requeridas para su conocimien to los cuales serían de gran utilidad durante su enseñanza.

Antes de pasar a ilustrar con un ejemplo bello e importante Método de Exhaución de Eudoxo, haremos un paréntesis para discuti la idea de límite en términos más accesibles e intuitivos. Lo efe tuaremos por medio de una analogía, con una simplificación matemática fuerte: la de pasar de un modelo continuo, el de los números reales, a un modelo discreto, el de los enteros.

Supongamos que estamos interesados en estudiar un cierto hecho histórico, digamos la realización de un golpe de estado, que se lleva a cabo durante tres días. Podríamos considerar varias posibilidades de estudio del fenómeno con respecto al tiempo, por ejemplo:

a) Estudiar qué sucede durante ese intervalo de tres días, que llamaremos el tiempo cero y denotaremos por To.

b) Seleccionar una serie de intervalos de tiempo inmediatamente anteriores al intervalo To digamos T_{-5}, T_{-4}, T_{-3}, T_{-2}, T_{-1} y estudiar primeramente lo que sucedió en el T_{-5}, a continuación lo que sucedió en el T_{-4} y así sucesivamente, tratando de ver si se definen algunas tendencias o patrones que desemboquen en lo sucedido en el tiempo To.

¡Cuán grande sería nuestra sorpresa al ver que la segunda opción no sólo nos da la información que obtenemos de la primera, sino además información adicional! (Observemos que estamos haciendo una suposición de continuidad).

Aunque quizás un poco más de reflexión nos haría ver que el resultado no es del todo extraño, ya que en la segunda opción estamos manejando, de alguna manera, más información que en la primera. En la segunda opción estaríamos en el caso de estudiar lo sucedido en el tiempo To a través del límite de lo sucedido anteriormente.

Otra forma de sugerir la importancia y necesidad de la idea de límite sería a través de la observación de que se puede llegar a situaciones idénticas por medio de trayectorias diferentes. Por ejemplo: si tenemos la intersección de dos carreteras, podemos llegar a ella al menos de dos direcciones diferentes; si vemos un automóvil en reposo, es posible que acabe de detenerse, que haya estado ahí los últimos años u otros casos diferentes. Considerando estas observaciones, podemos decir que el concepto de límite nos permite estudiar una situación dada a través de como se llegó a ella, o en términos de lo sucedido "inmediatamente antes"; esto ta bién pone de manifiesto porqué en conjuntos infinitos, tales que t dos sus puntos son de acumulación, como los racionales, los reale el plano, la idea de límite adquiere su significado e importancia plenos.

Regresando al Método de Exhaución de Eudoxo, presentaremos u teorema, también debido a Eudoxo, que aparece como Proposición 2. del Libro XII de los Elementos de Euclides (± 330, ± 275 A. de C.)

<u>TEOREMA 1</u>. Las áreas de los círculos son proprocionales a lo cuadrados de sus diámetros. Esto es, si tenemos un círculo con área C_1 y otro con área C_2 y con diámetros d_1 y d_2 respectivament entonces:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

La idea de la demostración, y posiblemente un origen del teo ma , es concebir a la circunferencia como un polígono con un núme infinito de lados, o podríamos decir, como el límite de polígonos regulares inscritos en ella con un número creciente de lados. Com para los polígonos inscritos el teorema es válido, es una posibil dad viable que también sea cierto para el caso límite. Esa forma concebir la circunferencia fué, en la antigüedad, fuente de descubrimientos matemáticos importantes y fué tomando diferentes forma y generalizaciones, siendo las más conocidas las de Nicolás de Cus Kepler y Leibniz, ésta última conocida como El Principio de Continuidad de Leibniz, que dice: "En cualquier proceso o transición q finaliza en algún término, es permisible establecer un razonamien general en el cual el término final puede ser incluido".

DEMOSTRACION. La demostración del teorema 1 puede ser considerada en tres pasos. En el primero, se demuestra el teorema análogo para polígonos. En el segundo, se demuestra que el área del círculo puede ser exhaustada o aproximada, con el grado de precisión necesaria, por medio de las áreas de polígonos regulares -- inscritos de 2^n lados. En el tercero, se usa el método de reducción al absurdo, o método indirecto, para derivar el resultado - buscado.

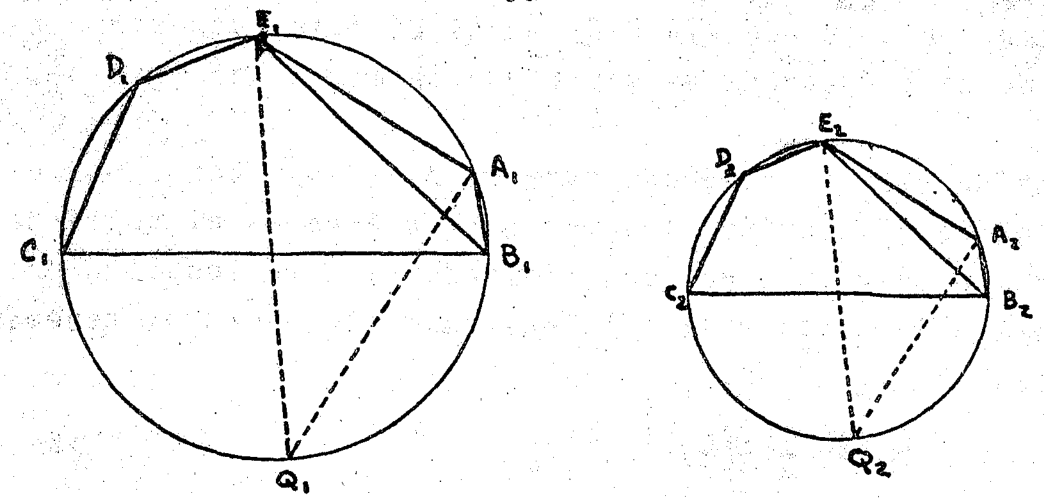
1er. paso) Teorema (Proposición 1 del Libro XII de los Elementos de Euclides): "Las áreas de polígonos semejantes inscritos en círculos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros."

Demostración. Considerando como un hecho conocido que las - áreas de polígonos semejantes están en la misma razón que los cuadrados de dos cualesquiera lados correspondientes (Proposición 20 del Libro VI de los Elementos de Euclides), es suficiente demostrar que una pareja de lados correspondientes están en la misma razón que los diámetros correspondientes.

Aquí convendría observar que el área de un triángulo es el producto de dos de sus lados por una constante, que sólo depende del ángulo formado por estos dos lados. En consecuencia las áreas de triángulos semejantes están en la misma razón que el cuadrado de la razón de cualesquiera dos lados correspondientes. De aquí podemos pasar a un caso más general, el de polígonos semejantes, ya que el área de un polígono puede obtenerse triangulándolo, y tendríamos la Proposición 20 del Libro VI de los Elementos de Euclides.

Consideremos los polígonos semejantes $A_1B_1C_1D_1E_1$ y $A_2B_2C_2D_2E_2$ inscritos en los círculos correspondientes C_1 y C_2.

Sean Q_1 y Q_2 tales que E_1Q_1 y E_2Q_2 son diámetros.



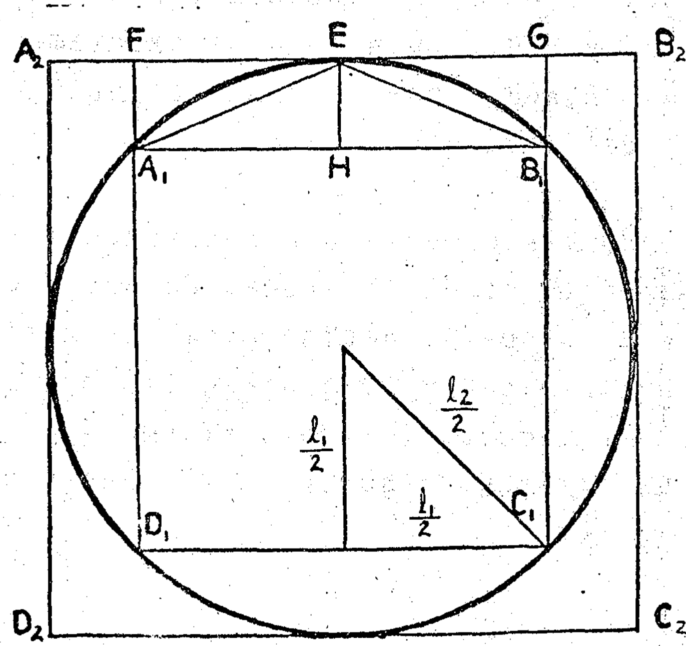
Entonces el ángulo $E_1A_1B_1$ es igual al ángulo $E_2A_2B_2$ y los lados que los determinan son proporcionales, ya que, por hipótesis, los polígonos son semejantes. Por lo tanto los triángulos $E_1A_1B_1$ y $E_2A_2B_2$ son equiangulares. De aquí obtenemos: ángulo $A_1B_1E_1$ = ángulo $A_2B_2E_2$ y en consecuencia, por ser inscritos y subtender los mismos arcos, ángulo $A_1Q_1E_1$ = ángulo $A_2Q_2E_2$ y como los ángulos $E_1A_1Q_1$ y $E_2A_2Q_2$ son rectos, tenemos que los triángulos $A_1Q_1E_1$ y $A_2Q_2E_2$ son equiangulares, y por lo tanto, semejantes. De aquí inferimos

$$\frac{E_1Q_1}{E_2Q_2} = \frac{E_1A_1}{E_2A_2}$$

con lo que terminamos el primer paso,

2o. paso). Demostraremos ahora que las áreas de polígonos regulares de 2^n lados exhaustan el área del círculo,

Demostración:



Inscribamos un cuadrado $A_1B_1C_1D_1$ en el círculo; demostraremos que el área de este cuadrado es mayor que la mitad del área del círculo.

Consideremos el cuadrado excrito $A_2B_2C_2D_2$, con lados paralelos al cuadrado inscrito. Tenemos que su área es el doble del área del cuadrado inscrito, ya que, llamando ℓ_1 a la longitud del lado del cuadrado inscrito y ℓ_2 a la del cuadrado excrito, tenemos, por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2$$

y en consecuencia

$$2\,\ell_1^2 = \ell_2^2$$

Entonces, el área del cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado excrito y como ésta es mayor que la del círculo, tenemos demostrado lo que nos propusimos.

Ahora consideremos el octágono regular obtenido bisectando al arco superior A_1B_1 en el punto E. Demostraremos que del exceso de área del círculo con respecto al cuadrado inscrito, el octágono incluye más de la mitad.

Tenemos que el área del segmento circular determinado por el arco $A_1E\,B_1$ y el segmento A_1B_1 es menor que el área del rectángulo A_1FGB_1. Claramente, el octágono incluye exactamente las áreas de los triángulos A_1EH y HEB_1, cuya suma es exactamente la mitad del área del rectángulo A_1FGB_1, por lo tanto el octágono incluye más de la mitad del área del segmento.

De aquí, usando básicamente una consecuencia del principio, obvio para los matemáticos de la época, de que dadas dos cantidades podemos sumar la pequeña consigo misma un número suficientemente grande de veces hasta exceder la grande, (lo que ahora es conocido como el Axioma de Arquímedes), Eudoxo afirma que la diferencia del círculo y la de un polígono regular de 2^n lados, con n suficientemente grande, puede ser hecha menor que una cantidad asignada de antemano.

$\boxed{\text{Problema 0.}}$ A partir del Axioma de Arquímedes, esto es, de que dados dos números reales positivos a y b tales que $a < b$, existe un número natural n tal que $na > b$, demostrar que el área de la circunferencia es aproximada con el grado de precisión requerido por las áreas de los polígonos regulares construidos anteriormente.

3er. paso). Ahora consideremos dos círculos con áreas C_1 y C_2 y con diámetros d_1 y d_2 respectivamente, y supongamos que:

$$\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{d_1^2}{d_2^2} \tag{1.0}$$

po lo tanto tendremos que:

$$\frac{C_1}{C_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2} \quad \text{o} \quad \frac{C_1}{C_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

En el primer caso existirá un círculo con área C_3, tal que, $C_3 < C_2$ y

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \tag{1.1}$$

En el segundo caso existirá un círculo con área C_4, tal que, $C_4 < C_1$ y

$$\frac{C_4}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

$\boxed{\text{Problema 1.}}$ ¿Cómo se aseguraba en esa época la existencia de C_3 y C_4?

Consideremos el primer caso, esto es,

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

con $C_3 < C_2$. Por lo demostrado en el segundo paso, podemos encontrar un polígono regular de 2^m lados, inscrito en el círculo C_2, tal que, su área P satisfaga

$$C_3 < P < C_2 \tag{1.2}$$

Consideremos un polígono regular de 2^m lados, con área P_1, inscrito en el círculo C_1, entonces por lo demostrado en el primer paso, se tiene

$$\frac{P_1}{P} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

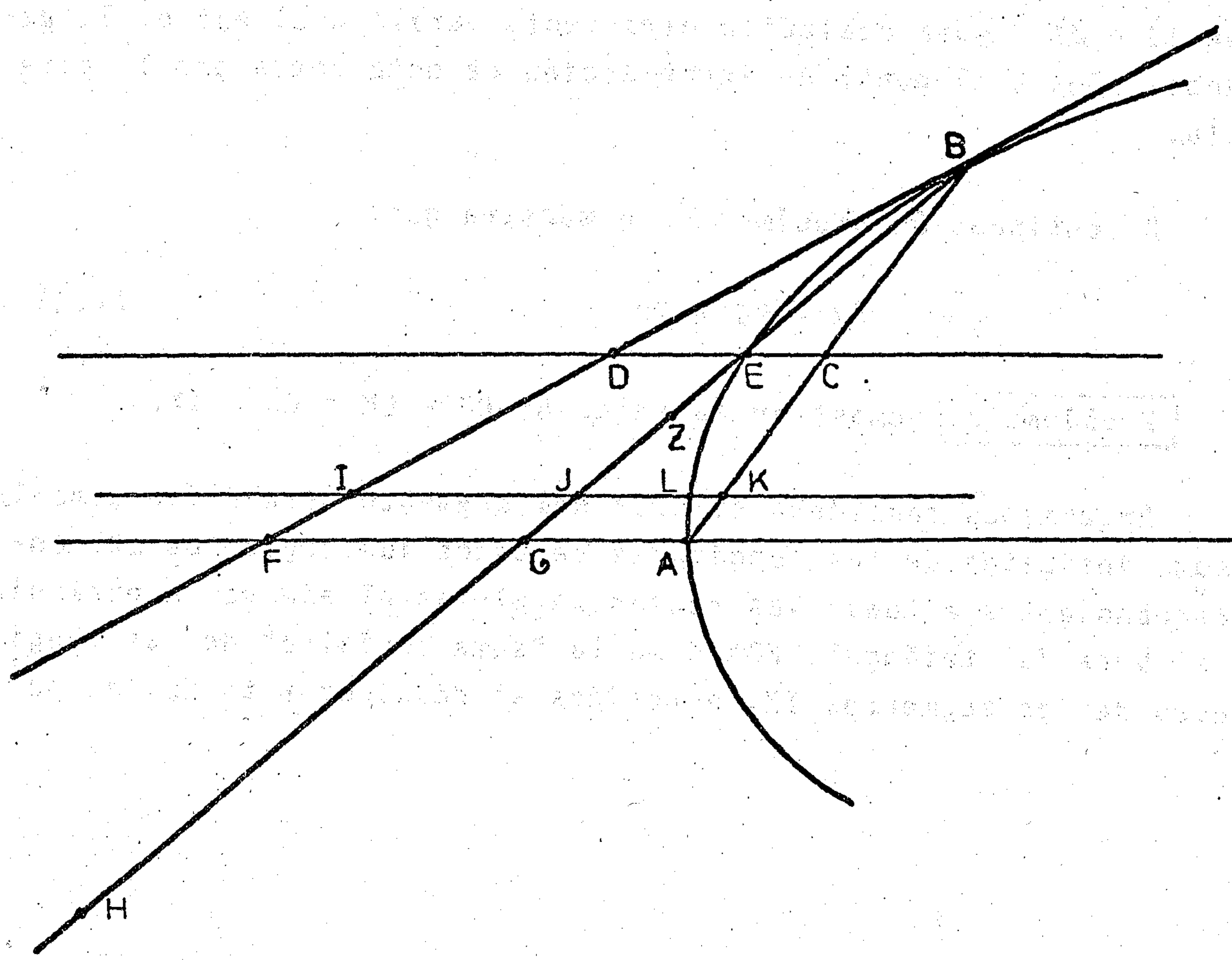
y considerando (1.1) obtenemos

$$\frac{P_1}{P} = \frac{C_1}{C_3}$$

y ya que $P_1 < C_1$, llegamos a $P < C_3$, lo que contradice (1.2). En el segundo caso procediendo de manera completamente análoga llegamos también a una contradicción. Por lo tanto, la proposición (1.0) es falsa y así concluimos la prueba del Teorema de Eudoxo,

Ahora consideraremos un problema en el que Arquímedes usó con éxito impresionante consideraciones de tipo mecánico para el descubrimiento de conocimientos matemáticos. En el problema que presentaremos, se conjugan consideraciones mecánicas sencillas con intuiciones geométricas profundas acerca del área, dando por resultado una obra maestra del pensamiento matemático griego. Primero presentaremos cómo Arquímedes descubre el valor del área del segmento parabólico y posteriormente daremos su demostración "rigurosa" del resultado, usando el Método de Exhuación de Eudoxo.

El problema que se propone Arquímedes es el de calcular el área de un segmento parabólico. Sea éste el determinado por el arco de parábola AB y el segmento de recta AB. Sea C el punto medio del segmento AB. Sea D el punto de intersección de la tangente a la parábola en B con la recta paralela al eje de la parábola que pasa por C y llamemos E al otro punto de intersección de esta recta con la parábola. Arquímedes menciona, como un hecho ya conocido en su época, que DE = EC.



Problema 2. Demostrar que DE = EC. ¿Se puede dar una demostración en la que no se use Geometría Analítica?.

Sea F el punto de intersección de la tangente con la recta que pasa por A, paralela al eje de la parábola, y G el punto de intersección de esta recta con la determinada por los puntos B y E. Como el triángulo FBA es semejante al triángulo DBC y DE = EC, se tiene que FG = GA. Sea el punto H sobre la recta que pasa por los puntos B y E tal que G sea el punto medio del segmento BH. Usando el argumento anterior para demostrar que FG = GA, se tiene que IJ = JK para cualquier otra recta paralela al eje de la parábola. Sea L el punto de intersección de esta recta con la parábola.

A continuación Arquímedes demuestra que:

$$HG \cdot LK = GJ \cdot IK \qquad (1.3)$$

Problema 3. Demostrar la relación HG • LK = GJ • IK.

Arquímedes considera el área del segmento parabólico como la "suma infinita" de las longitudes de todos los segmentos LK, correspondientes a todas las rectas paralelas al eje de la parábola, y el área del triángulo FBA como la "suma infinita" de las longitudes de los segmentos IK, obtenidos al considerar todas las para lelas al eje de la parábola que intersectan el segmento AB. La - fórmula (1.3) relaciona estas longitudes y Arquímedes la interpreta así:

Considérese JH como una palanca con punto de apoyo en G, entonces si consideramos LK como un peso colocado en H, e IK como un peso colocado en J, tendremos la palanca en equilibrio, según la ley de la palanca en vista de la fórmula (1.3). De aquí, se tiene que la suma de las longitudes de los segmentos LK colocada en H equilibrará a la suma de los segmentos IK reposando en su - punto medio, sobre el punto correspondiente J del segmento BG. - Esta última distribución de peso es equivalente a considerar todos los segmentos sobre el centro de gravedad del triángulo FBA, que estará colocado en el segmento GB y será llamado Z, o sea el área del triángulo colocada en Z y por lo tanto tendremos que.-

(Area del triángulo FBA) $\cdot$ GZ = (Area del segmento parabólico AEB) $\cdot$ GH.

Arquímedes demuestra ahora que GZ = $\frac{1}{3}$ GB = $\frac{1}{3}$ GH y por lo tanto:

Area del segmento parabólico AEB = $\frac{1}{3}$ Area del triángulo FBA

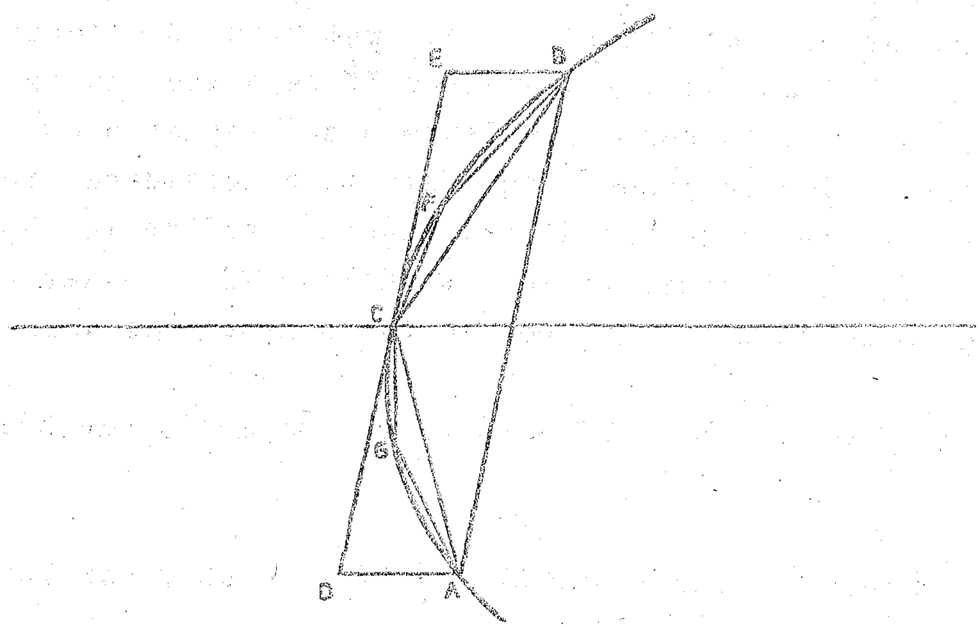
$\boxed{\text{Problema 4.}}$ Demostrar que GZ = $\frac{1}{3}$ GB.

Por último, Arquímedes relaciona las áreas de los triángulos FBA y AEB de la manera siguiente: primero demuestra que el área del triángulo AEB es la mitad del área del triángulo GBA y esta área es a su vez la mitad del área del triángulo FBA; consecuentmente, el área del triángulo AFB es cuatro veces la del triángul AEB y de aquí inferimos que:

TEOREMA 2. El área del segmento parabólico AEB es igual a $\frac{4}{3}$

del Area del triángulo AEB

Arquímedes tiene una idea tan desarrollada, y podríamos decir tan actual, de lo que es una demostración matemática, que considera los razonamientos anteriores como una ayuda o guía para descubrir hechos matemáticos y demuestra este teorema por un método rigurosamente matemático, que hace uso del Método de Exhaución de Eudoxo. Pasemos a ver su demostración.



DEMOSTRACION

Considérese el segmento parabólico determinado por el arco de la parábola AB y la cuerda AB. Por el punto medio del segmento AB, trácese una recta paralela al eje de la parábola y llámese C al punto en que esta recta intersecta a la parábola. Entonces se demuestra que la tangente a la parábola en C es paralela al segmento AB.

$\boxed{\text{Problema 6.}}$ Demostrar la afirmación anterior

Tomando las paralelas al eje de la parábola que pasan por A y B e intersectándolas con la tangente en C, obtenemos un parale

logramo DEBA. Claramente, el triángulo ACB tiene la mitad del área del paralelogramo y la de éste es mayor que la del segmento parabólico. Por lo tanto, el área del triángulo ACB es mayor que la mitad del área del segmento parabólico. Consideremos ahora el segmento parabólico determinado por el arco CB y el segmento CB, y construyamos el triángulo CFB de una manera análoga a la construcción del triángulo ACB. Arquímedes demuestra:

$$\text{Area del triángulo CFB} = \frac{1}{8}\ \text{Area del triángulo ACB} \qquad (1.4)$$

En consecuencia el área de los triángulos CFB y AGC es la cuarta parte del área del triángulo ACB.

$\boxed{\text{Problema 7.}}$ Demostrar la igualdad (1.4).

Tenemos también que el área de cada uno de los triángulos A ó CFB es mayor que la mitad del área del correspondiente segment parabólico. Usando el mismo argumento que Eudoxo manejó en el TE REMA 1. Arquímedes demuestra que la diferencia entre el área del segmento parabólico y la suma de las áreas de un cierto paso de la división en triángulos será menor que una cantidad α asignac de antemano, esto es:

$$\text{Area del segmento parabólico-Area del triángulo ACB} - \frac{1}{4}\ \text{Area del triángulo ACB}-\ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{4^n}\ \text{Area del triángulo ACB} < \alpha$$

Llamando β_1 al área del triángulo ACB, prueba a continuaci que para cualquier n.

$$\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_1 + \ldots + \frac{1}{4n}\beta_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}\beta_1\right) = \frac{4}{3}\beta_1 \qquad (1.5)$$

$\boxed{\text{Problema 8.}}$ Demostrar la igualdad (1.5)

Designemos por β_i a $\frac{1}{4i}\beta_1$ y por β el área del segmento parabólico en cuestión.

Por último, usando el método indirecto, Arquímedes prueba el TEOREMA 2 ya que, si suponemos que $\beta \neq \frac{4}{3}\beta_1$, digamos que $\beta > \frac{4}{3}\beta_1$ entonces es posible encontrar una red de triángulos cuya suma de áreas sea mayor que $\frac{4}{3}\beta_1$, o sea,

$$\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_1 + \ldots + \frac{1}{4^m}\beta_1 > \frac{4}{3}\beta_1$$

y esto contradice (1.5)

Ahora, si $\beta < \frac{4}{3}\beta_1$, es posible encontrar triángulos de un paso de la cadena, tales que su área, digamos A_j, sea menor que $\frac{4}{3}\beta_1 - \beta$. Esto es posible, porque las áreas de triángulos sucesivos van acercándose a cero. Por un lado tenemos que

$$\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_1 + \ldots + \frac{1}{4^m}\beta_1 < \beta \text{ para toda } m. \qquad (1.6)$$

por otro, aplicando (1.6), tenemos que:

$$\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_1 + \ldots + \frac{1}{4^j}\beta_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^j}\beta_1\right) = \frac{4}{3}\beta_1$$

en consecuencia

$$\left(\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_1 + \ldots + \frac{1}{4^j}\beta_1\right) - \beta > 0$$

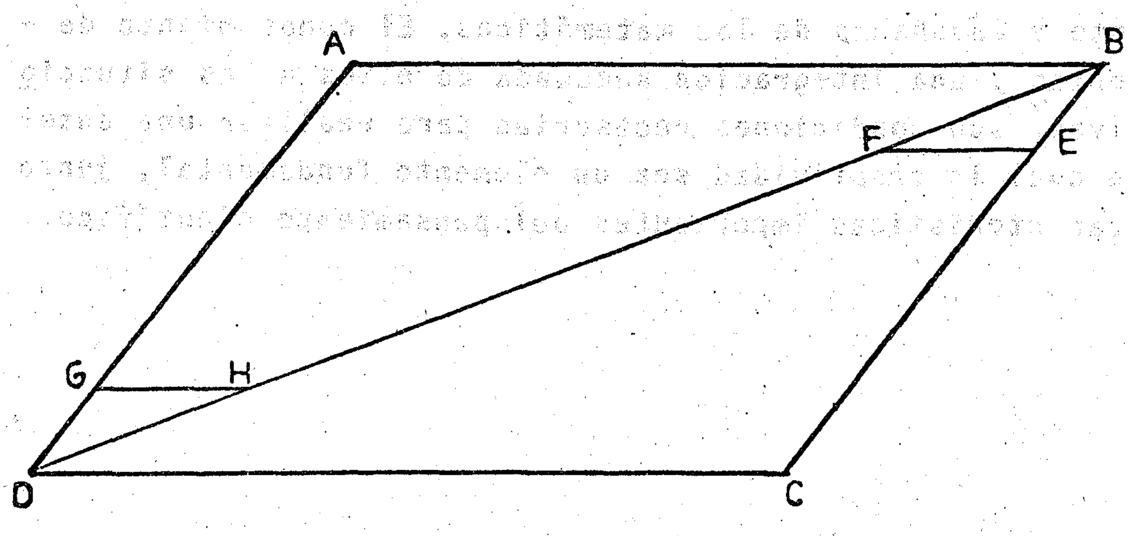
lo cual contradice (1.6). Con esto termina la demostración del TEOREMA 2.

No deja de ser sorprendente la actualidad de las demostraciones del TEOREMA 1 y del TEOREMA 2, así como su contenido geométrico y en el caso del segundo teorema, el método de descubrimiento o razonamiento heurístico que usó e hizo explícito Arquímedes, ya que la mayoría de las veces la dinámica del descubrimiento queda perdida, ya sea en la inconciencia, ya sea en el desinterés por comunicarla o en el interés por ocultarla y hacer así aparecer más impresionante e inalcanzable la creatividad del autor. Pocos son los matemáticos que han escrito algo acerca de su experiencia creativa; entre ellos podemos mencionar a Arquímedes, Descartes, Leibniz, Euler, Boole, Poincaré, Littlewood y Hardy.

Al no cubrir este tipo de material en la enseñanza tradicional de las matemáticas, creemos que se está dando un gran salto que repercute en general en deficiencias varias de la formación e información del estudiante.

El Método de Exhaución de Eudoxo y las consideraciones heurísticas de Arquímedes están entre las contribuciones más hermosas y geniales de la matemática griega a la matemática universal.

Un siguiente paso en la evolución de la idea de límite, asociada al cálculo de áreas, podemos encontrarlo en el trabajo de Cavalieri (1598-1647). El considera, sistemáticamente, un área como la unión de un número indefinido de segmentos paralelos y un volumen formado por un número indefinido de áreas planas y paralelas. Estos elementos son llamados por él "los indivisibles de área y volumen" y reconoce que su número debe ser indefinidamente grande, sin precisar más qué quiere decir con esto. Como ejemplo, él demuestra que el área del paralelogramo ABCD es el doble del área del triángulo ABD o del triángulo BCD, demostrando que cuando GD= BE entonces GH = FE, y por lo tanto los triángulos ABD y BCD están formados por una cantidad igual de segmentos iguales y en conclusión sus áreas son iguales.



$\boxed{\text{Problema 9.}}$ Demostrar que si GD = BE, entonces GH = FE,

Otros matemáticos contemporáneos de Cavalieri usaron una idea diferente, consistente en aproximar el área de la región en cuestión por la suma de áreas de esos rectángulos y observaban que, cuando el número de rectángulos tendía a infinito, ciertos términos podían ser despreciados, esto es, implícitamente estaban tomando el límite de la suma cuando n tiende a infinito. Stevin, Pascal y Fermat son algunos de los matemáticos que usaron este método, pudiendo calcular diferentes integrales, como:

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

para valores de n racionales y diferentes de -1.

Con la presentación de estas tres etapas del desarrollo de la idea de límite no pretendemos haber dado todos los elementos importantes de su evolución, ni en términos exclusivamente matemáticos, ni con respecto a su relevancia en la enseñanza de las Matemáticas. Pero sí creemos haber mostrado elementos que sugieren, por un lado, que las dificultades experimentadas por los estudiantes en el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos están ligados a dificultades y aspectos manifestados en el proceso histórico de desarrollo de estos conceptos, y, por otro lado, que en el proceso de entendimiento y creación de las matemáticas hay elementos muy variados que rebasan la frontera de éstas, y que son importantes en términos del entendimiento y enseñanza de las matemáticas. El conocimiento de estos elementos y una integración adecuada de ellos a las situaciones educativas, son condiciones necesarias para realizar una enseñanza en la cual la creatividad sea un elemento fundamental, junto con otras características importantes del pensamiento científico.

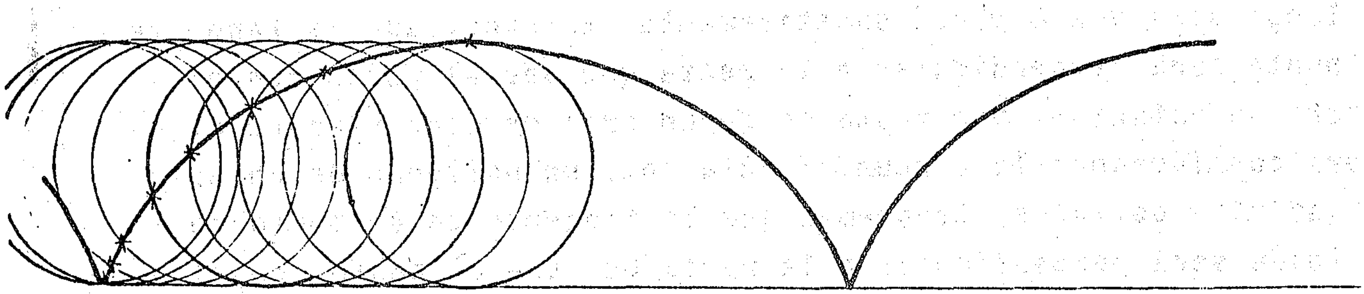
2. CONSTRUCCION DE TANGENTES

INTRODUCCION

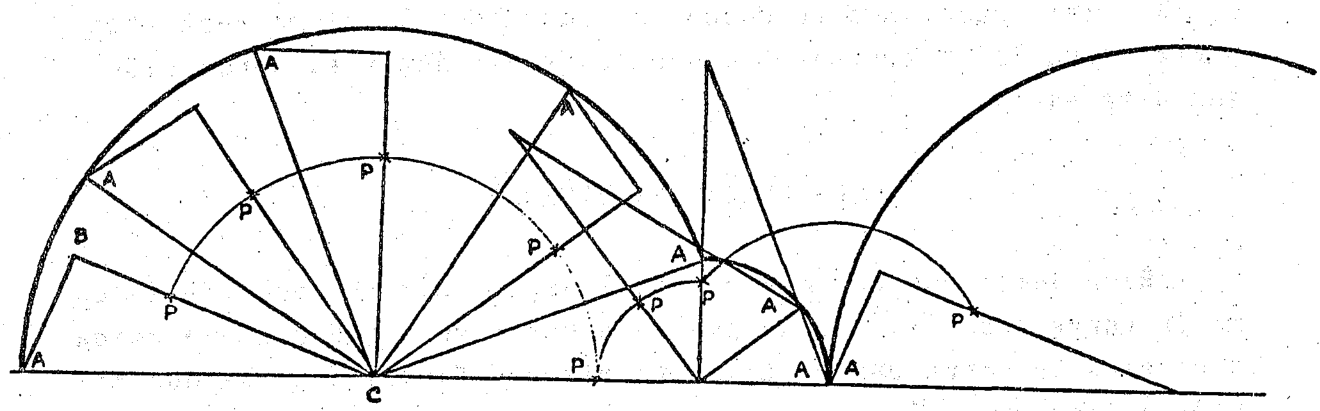
Hacia 1640 no había aún una definición de tangente aceptada por los matemáticos principales de la época. De hecho, se manejaba a la tangente desde varios puntos de vista o con definiciones diferentes, algunas haciendo más énfasis en aspectos geométricos, otras en aspectos dinámicos y otras en la idea de límite. Por medio del problema de construir la tangente a la cicloide, ilustraremos tres concepciones diferentes de la tangente a una curva, a saber la de Descartes (1596, 1650), la de Roberval (1602-1675) y la de Fermat (1601-1665). Debe hacerse la aclaración de que todas estas interpretaciones conducen en realidad a la misma recta tangente, pero lo interesante es que su derivación y su concepción son diferentes.

CONSTRUCCIONES DIVERSAS

Recordemos que una manera usual de definir la cicloide es como la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta. Esta misma definición es la que manejaba Descartes.



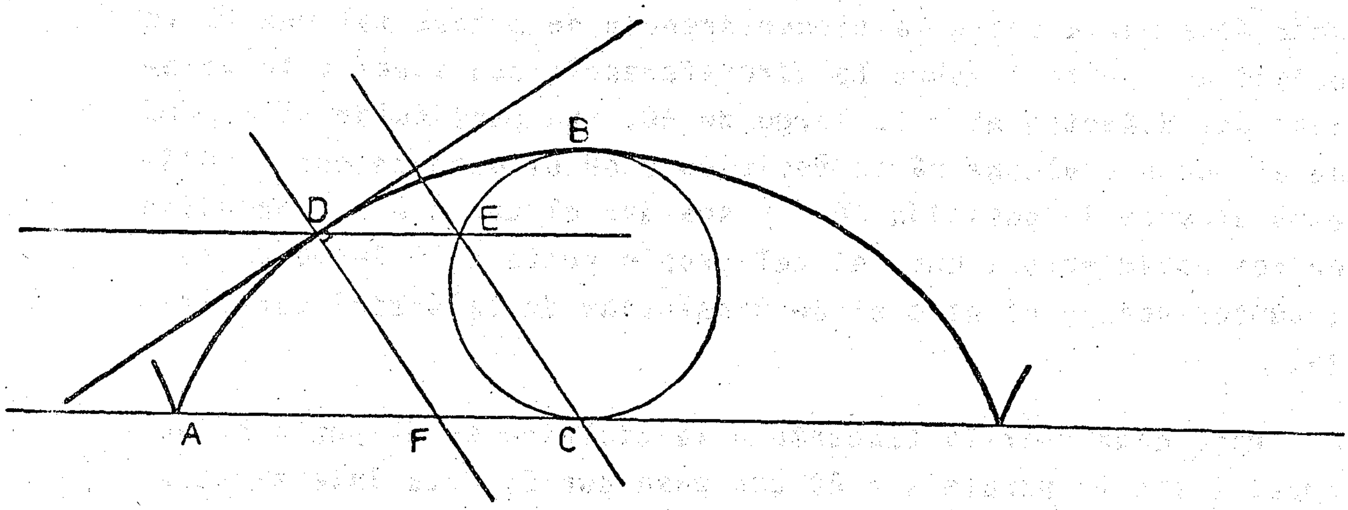
El Método de Descartes para construir la tangente a la cicloide se basa en los centros de rotación instantáneos. Pensemos en un polígono que rueda sobre una línea recta y fijémonos en la trayectoria que describe un punto fijo del polígono. Observaremos que la curva descrita por el punto consiste en un cierto número de arcos de circunferencia cuyos centros serán los puntos sobre la recta ocupados por los vértices del polígono. En consecuencia, la tangente a un punto de la curva será la perpendicular a la recta que une al punto con el centro de la circunferencia del arco en el cual se encuentra el punto.



En la figura tenemos las curvas descritas por el vértice A y por el punto P del triángulo ABC al rodar éste sobre la recta. Vemos como los centros de rotación son C, luego B, posteriormente A, luego otra vez C y así sucesivamente. En cada caso la tangente al punto será perpendicular a la recta que une el punto con el centro de rotación, por tratarse de un arco de circunferencia. Ahora considerando la circunferencia como un polígono de un número infinito de lados, tendremos que la tangente en un punto de la cicloide será perpendicular a la recta que une el punto con el centro de rotación "instantáneo o límite".

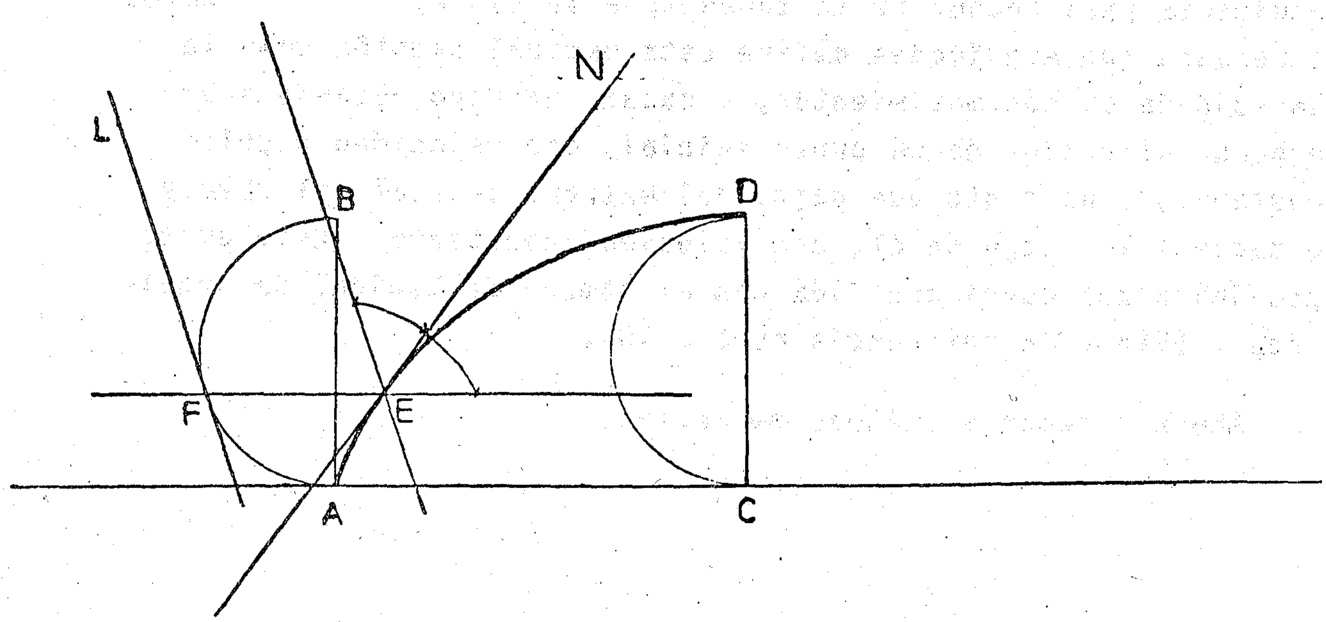
Problema 10. ¿Cómo se definiría el centro de rotación instantáneo? ¿Podría definirse el mismo concepto para otro tipo de curvas? ¿cuáles y cómo?.

La construcción de Descartes va así:



Sea D cualquier punto del semiarco de la cicloide AB. Para construir la tangente trácese la paralela a AC que pasa por D. Sea E el punto de intersección de esta paralela con la circunferencia. Trácese la recta que une a C y E y la paralela a ésta que pasa por D. Entonces la perpendicular a esta última recta, que pasa por D, es la tangente a la cicloide en D.

$\boxed{\text{Problema 11.}}$ ¿Cómo se justificaría que el punto que describe la cicloide al pasar por D tiene a la circunferencia apoyada en F?



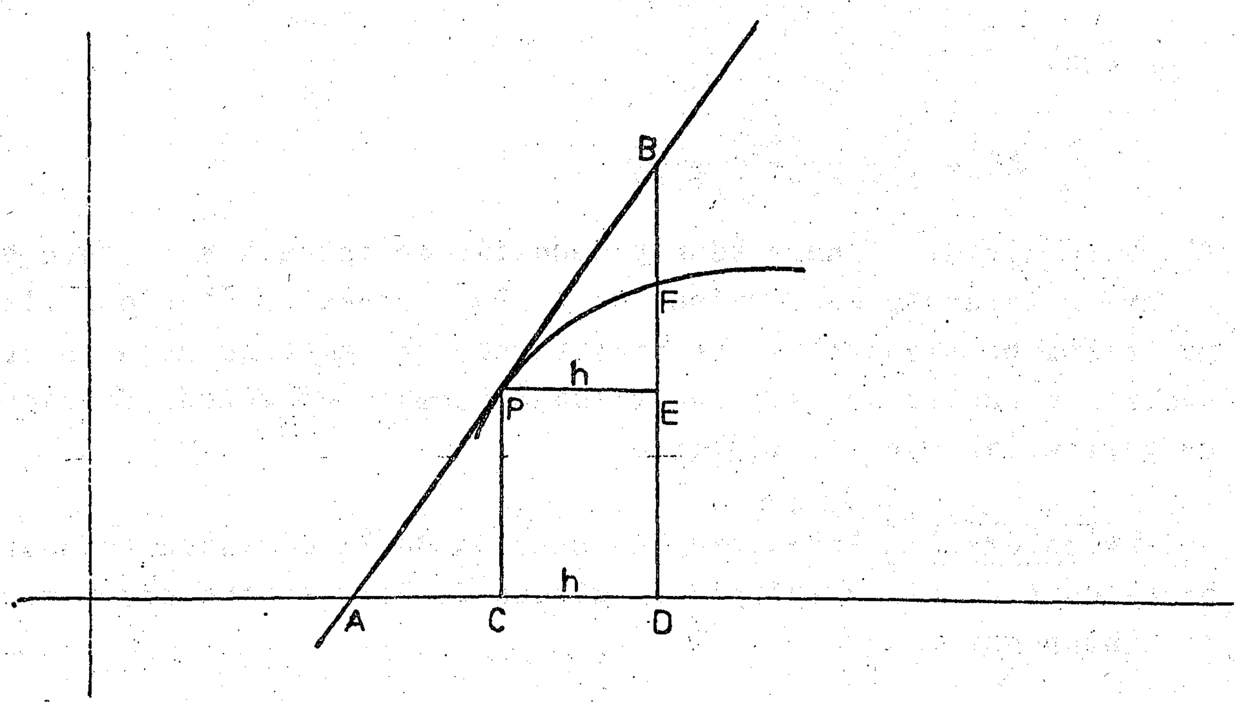
Roberval define a la cicloide de la manera siguiente:

Consideremos que el diámetro AB del círculo se desplaza paralelamente a su posición inicial, con el punto A sobre la recta AC hasta que llega a la posición CD. Al mismo tiempo hagamos que el punto A se mueva sobre la circunferencia de manera tal que la velocidad del punto A sobre la circunferencia sea igual a la velocidad del diámetro AB a lo largo de AC. En particular se tendrá que el punto A alcanzará la posición D en el momento que el diámetro alcance la posición CD. O sea que el punto A es conducido por dos movimientos: uno, el del propio punto a lo largo de la circunferencia y el otro el de traslación de la semicircunferencia.

Para construir la tangente a la cicloide en el punto E, Roberval traza la paralela a AC que pasa por E; ésta intersecta a la semicircunferencia AB en F. Después considera la tangente L a la semicircunferencia en F y su paralela en E; esta recta forma un cierto ángulo con la recta que pasa por F y E, cuya bisectriz es la tangente buscada, ya que es el resultado de dos "movimientos iguales". Esto es, uno de ellos, el desplazamiento lateral, daría como tangente a la recta que pasa por F y E; el otro, el movimiento a lo largo de la circunferencia, daría como tangente a L y como las velocidades son "iguales", la tangente resultante es N.

Este método de Roberval es similar al que supuestamente usó Arquímedes para encontrar la tangente a la espiral de su nombre. Recuérdese que Arquímedes define esta espiral también como la composición de dos movimientos, a saber, un rayo rotando sobre un plano alrededor de su punto inicial, con velocidad angular constante, y un punto que parte del extremo inicial del rayo y se mueve a lo largo de él, con velocidad constante. Este punto describirá una curva conocida con el nombre de Espiral de Arquímedes. (Véase la referencia número 10).

Ahora pasemos al método de Fermat:



Sea AB la tangente en P a una curva dada, es claro,(Problema 12. Ver si realmente es claro), que la determinación de la tangente es equivalente a la determinación del punto A y esto es equivalente a la determinación de la distancia entre A y C. Esta distancia es llamada por Fermat la subtangente y es la que se propone encontrar. Sea h un incremento en C que nos determina el punto D. Considerando la paralela a PC que pasa por D obtenemos B y y de manera semejante obtenemos los puntos auxiliares E y F que aparecen en la figura. Los triángulos APC y PBE son semejantes y por lo tanto

$$\frac{AC}{PC} = \frac{h}{EB}$$

y para h pequeño tenemos que EB y EF son casi iguales, así que

$$\frac{AC}{PC} = \frac{h}{FD-PC}$$

o en términos de f(x),

$$\frac{AC}{f(x)} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)}$$

y de aquí

$$AC = \frac{h\ f(x)}{f(x+h) - f(x)}$$

Ahora se divide el numerador y denominador entre h y se hace h = 0 para obtener TQ en términos de x. Por supuesto estos dos últimos pasos no siempre pueden realizarse; sin embargo para un buen número de curvas con las que trabajó Fermat, el método funcionó, en particular para la cicloide.

Problema 13. Encontrar la ecuación de la cicloide en coordenadas cartesianas y aplicar el método de Fermat para encontrar la subtangente.

Como se ve, el método de Fermat es prácticamente el mismo que usamos actualmente, con la diferencia de que ahora usamos límites y aunque es a primera vista más complicado que los métodos anteriores, su generalidad es mayor.

Es conveniente comentar que Descartes también inventó un método general para encontrar la tangente a una curva el cual es muy semejante al de Fermat, aunque de carácter puramente algebraico (esto es, no se hacía h = 0) y aplicable sólo a algunas de las curvas para las cuales el método de Fermat funcionaba.

Se ve, una vez más, como en el manejo e interpretaciones de los objetos y problemas matemáticos aparecen entes y consideraciones variados que enriquecen las posibilidades de entendimiento y manejo de aquéllos.

3. EL TEOREMA FUDAMENTAL DEL CALCULO

INTRODUCCION

La Historia de las Matemáticas juega un papel muy importante en la Enseñanza de las Matemáticas ya que a través de ella se obtiene una visión de conjunto de las Matemáticas en la que aparecen los diferentes elementos que se conjugan para determinar el desarrollo de las mismas. Uno de estos elementos es la relación que existe entre las Matemáticas y las necesidades concretas de los pueblos. Parece indudable que las matemáticas primitivas estuvieron directamente vinculadas a las necesidades primordiales de tipo económico y social y que fueron evolucionando muy lentamente y en cierta forma independizándose de las situaciones concretas que las habían producido. La aritmética, que actualmente estudiamos en la escuela primaria, es el fruto de siglos de experiencia matemática, aunque a nosotros nos parezca simple y elemental, o, en otras palabras, podríamos decir que las ideas matemáticas tienen una evolución durante la cual cada vez se vuelven más abstractas y aparentemente se alejan más de las situaciones concretas que las originaron. Decimos aparentemente, porque es sabido de sobra cómo disciplinas matemáticas que nacieron de consideraciones más puramente matemáticas posteriormente han probado ser herramientas útiles en ciencias o en aplicaciones de carácter muy concreto. Los diferentes usos o aplicaciones de las Matemáticas, que le confieren a éstas su status de ciencia por excelencia, es otro elemento que aparece en el estudio de la Historia de las Matemáticas y que contribuye notablemente a aclarar la vida de éstas, su importancia para otras ciencias, para la técnica y para la sociedad en general.

Dentro de la evolución de las ideas matemáticas, podemos intentar establecer algo así como líneas generales de desarrollo de ciertos conceptos. Por ejemplo, una suma, una serie y una integral son tres ideas matemáticas con mucho en común, casi nos atreveríamos a decir que es una misma idea pero en diferentes contextos. En el primer caso tenemos una cantidad finita de sumandos, en el segundo - una cantidad numerable de sumandos y en el tercero una cantidad "continua" de sumandos. Siguiendo en este camino, podríamos pensar que una suma es a una integral como una diferencia es a una diferencial. Esto quizás suene demasiado nebuloso o hueco, sin embargo este tipo de analogías y consideraciones, fueron hechas por importantes matemáticos, y condujeron a entender y descubrir algunos hechos matemáticos importantes. Baste citar a Leibniz, quién usó las analogías sistemáticamente y fué el primer matemático que observó que los procesos de diferenciación e integración son inversos uno del otro. Para mostrar que la relación entre el caso finito y el - caso continuo de la suma y la diferencia es menos trivial de lo -- que uno puede suponer a primera vista, daremos dos versiones del - Teorema Fundamental del Cálculo, en las cuales la analogía es clara.

Analogías para el Teorema Fundamental del Cálculo

Para recordar y precisar el tema, veamos una presentación del Teorema Fundamental del Cálculo en la forma más o menos tradicional.

Teorema 1. Si $f(x)$ es derivable en $[a,b]$ y $f'(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Demostración. Para cualquier partición

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

se tiene

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'(\varepsilon_i)\ (x_i - x_{i-1}) \text{ con } \varepsilon_i \in]x_{i-1}, x_i[\qquad (3.1)$$

siendo esta última igualdad una consecuencia del Teorema del Valor Medio. Si consideramos el límite de las sumas de Riemann (3.1), - cuando la partición se refina obtenderemos que (3.1) tiende a

$$\int_a^b f'(x)dx$$

que por hipótesis existe, ya que $f'(x)$ es continua.

Teorema 2. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ para } x \in [a,b],$$

entonces $F(x)$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.

Demostración: Para $x_0 \in [a,b]$ se tiene que

$$\frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

Como f es continua en x_0 dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) - \in < f(t) < f(x_0) + \in$$

para $$x_0 - \delta < t < x_0 + \delta, \qquad (3,2)$$

Ya que la integral es monótona, integrando (3,2) obtenemos para $x > x_0$

$$\int_{x_0}^{x} [f(x_0) - \in] dt < \int_{x_0}^{x} f(t)dt < \int_{x_0}^{x} [f(x_0) + \in] dt \qquad (3,3)$$

y para $x < x_0$ tenemos,

$$\int_{x}^{x_0} [f(x_0) - \in] dt < \int_{x}^{x_0} f(t)dt < \int_{x}^{x_0} [f(x_0) + \in] dt \qquad (3.4)$$

integrando en (3.3) y (3.4) y dividiendo entre $x - x_0$ nos queda, - para $|x-x_0| < \delta$,

$$f(x_0) - \in < \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt < f(x_0) + \in$$

y de aquí pasamos a que si $|x - x_0| < \delta$ entonces,

$$f(x_0) - \in < \frac{F(x) - F(x_0)}{x-x_0} < f(x_0) + \in$$

o sea, si $|x - x_0| < \delta$ entonces

$$\left| f(x_0) - \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right| < \epsilon$$

o equivalentemente,

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x)}{x - x_0} = f(x_0)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Veamos lo que llamaríamos el Teorema Fundamental del Cálculo en su versión finita.

Supongamos que F es una función definida en un intervalo de - números naturales $[i, j+1] \subset N$ y con valores en los reales, definamos una función f(n) que llamaremos la diferencia de F(n) de la manera siguiente:

$$f(n) = F(n+1) - F(n) = \delta F(n) \qquad (3.5)$$

Observemos que la función f(n) vendría siendo la diferencial en el caso finito.

Tenemos que

$$\sum_{n=i}^{j-1} f(n) = F(j) - F(i) \qquad (3.6)$$

La demostración es simple y sólo depende de cancelaciones sucesi-- vas,

$$\sum_{n=i}^{j-1} f(n) = F(i+1) - F(i) + F(i+2) - F(i+1) + \ldots + F(j-1) - F(j-2) +$$

$$F(j)\ F(j-1) = F(j) - F(i)$$

O sea que, hemos visto el análogo de

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $F'(x) = f(x)$, en el caso finito.

Veamos que la semejanza o analogía no sólo aparece en los resultados, sino también en las demostraciones.

Sea $F(x)$ tal que su derivada $f(x)$ es Riemann integrable en a,b, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (3.7)$$

Para demostrar (3.5) consideremos una partición arbitraria del intervalo a,b

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

y sea N la norma de la partición, esto es,

$$N = \max_{1<i\leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

entonces $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

para cualquier elección de $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

En particular por el Teorema del Valor Medio

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\&_i)\,(x_i - x_{i-i}) \qquad (3.8)$$

para algún $\&_i \in]x_{i-1}, x_i[$, por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$$

y otra vez, por cancelaciones sucesivas

$$= \lim_{N\to 0} (F(x_n) - F(x_0)) = F(x_n) - F(x_0)$$

$$= F(b) - F(a).$$

con respecto a notación tenemos que (3.8) puede ser escrita como

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = DF(\&_i)\Delta x$$

y su análogo (3.5) como

$$F(n+1) - F(n) = \delta F(n)\Delta n$$

Por otro lado (3.6) la representamos por

$$\sum_{n=i}^{j} \delta F(n)\ \Delta n = F(j) - F(i)$$

y (3.7) por

$$\int_a^b DF(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\boxed{\text{Problema 14.}}$ Extienda esta analogía a otros temas del Cálculo en todos los niveles y aspectos posibles.

Claramente se ve la necesidad de estudiar la historia de las matemáticas con la intención de descubrir los elementos de carácter heurístico, tanto del pensamiento matemático psicológico, como del pensamiento matemático social, para posteriormente buscar formas adecuadas para que los estudiantes manejen y desarrollen estos elementos dentro y fuera de las matemáticas

4. CONCEPCIONES DEL CALCULO

Hay varias formas de enfocar o concebir el Cálculo Diferencial e Integral. Se podría decir que Newton lo concebía y trabajaba más en términos de problemas e ideas de la Física y consideraciones - geométricas, tratando de aplicar la metodología de demostración de Arquímedes, Eudoxo, etc., mientras Leibniz lo enfocaba de una manera más puramente matemática, en términos de analogías con otras situaciones matemáticas y haciendo énfasis en su generalidad, estructuración y sus aspectos combinatorios y simbólicos. Leibniz afirmaba que la teoría que estaba construyendo guardaba la misma relación, en términos de generalidad, eficiencia y mecanicidad, con los métodos de Arquímedes, como la Geometría Analítica de Descartes a la - Geometría de Euclides. En esta concepción se enfatizaba el aspecto algebraico del Cálculo, que nos permitía resolver familias de problemas sin tener que ingeniar para cada caso una solución, sino simplemente aplicar fórmulas y computar. Este enfoque tomó mucho auge en la Europa Continental, en contraste con el enfoque de los matemáticos ingleses que acentuaban los aspectos geométricos y de movimiento y trataban de darle validez a los resultados del Cálculo, usando demostraciones de tipo geométrico como las del Método de Exhaución de Eudoxo. Laplace dice en su "Exposición del Sistema del Mundo": El análisis algebraico (Cálculo) nos hace olvidar pronto el objetivo principal, enfocando nuestra atención en las combinaciones - abstractas, y únicamente al final regresamos al objetivo original. - Pero, al sumergirse en las operaciones del análisis, uno es conducido, por la generalidad de sus métodos y la inestimable ventaja de - transformar el razonamiento a procedimientos mecánicos, a resultados frecuentemente inaccesibles a la geometría. Tal es la fecundidad de análisis, que es suficiente traducir verdades particulares a este - lenguaje universal para ver emerger de su mera expresión una multitud de verdades nuevas e inesperadas. Ningún otro lenguaje tiene la capacidad para la elegancia, que surge de una larga sucesión de expresiones encadenas una a otra y todas ramificándose de una idea - fundamental. En consecuencia, los geómetras (matemáticos) de este -

siglo, convencidos de su superioridad, se han dedicado, principalmente, a extender su dominio y agrandar sus posibilidades.

Lagrange, en el prefacio de su "Mecánica Analítica", dice: Ya tenemos varios tratados sobre Mecánica, pero el plan de éste, es completamente nuevo, Me he impuesto el problema de reducir la mecánica y el arte de la resolución de sus problemas a fórmulas generales cuyo simple desarrollo proporciona todas las ecuaciones necesarias para las soluciones de cada problema... Ningún diagrama será encontrado en este trabajo. Los métodos que expongo no requieren construcciones o razonamientos geométricos o mecánicos, sino unicamente operaciones algebraicas sujetas a un procedimiento regular y uniforme. Aquellos que gustan del Análisis verán con placer como la mecánica deviene en una de sus ramas y me quedarán agradecidos por haber extendido su dominio.

Esta concepción del Cálculo se podría extender a todas las matemáticas y constrasta fuertemente con aquella que las considera como el arte de resolver cierto tipo de problemas haciendo énfasis en los aspectos de soluciones particulares, ingeniosas para cada caso.

Se puede decir de estas dos concepciones, que la de Leibniz propició el desarrollo del Cálculo y en cambio la de Newton puso escollos para este desarrollo, de tal manera que en los años siguientes a estos dos matemáticos, el desarrollo del Cálculo en la Europa Continental aventajó por mucho al dado por la escuela inglesa.

En la actualidad, con el desarrollo del Algebra Lineal y el Cálculo en Variedades, se ha generalizado un enfoque consistente en interpretar el Cálculo como el estudio del "comportamiento cualitativo" de una cierta clase de funciones, a saber, las funciones diferenciables, a través del comportamiento de las funciones lineales, entendiendo por estudio del comportamiento cualitativo de las funciones, el estudio ya sea de carácter local o global, de elementos como:

Inyectividad

Suprayectividad

Ceros

Singularidades

Crecimiento

Acotamiento

Periodicidad

En este enfoque la idea de derivabilidad queda como la de aproximación local a la función original, por medio de una función lineal.

Este enfoque tiene la ventaja de darle gran unidad a la problemática del Cálculo en sus diferentes formas: Cálculo de funciones de una variable, de varias variables, en variedades, en espacios de dimensión infinita y también la de relacionar más íntimamente diferentes ramas de las matemáticas.

También se podría pensar el Cálculo como un modelo límite de modelos discretos de medición de cambio. Dentro de este modelo límite tiene lugar la situación ideal de la medición sin error e instantánea, que claramente no es posible en la práctica, y que permite entonces pensar en el cambio o comportamiento puntual o instantáneo. Para que este modelo límite sea construido necesitamos una geometría y una concepción del tiempo "continuos", o en otras palabras, sin agujeros o saltos. En la evolución del problema del movimiento planetario, se ve claramente cómo, a medida que se iban refinando las mediciones del movimiento de los astros, iba surgiendo la necesidad de buscar nuevos modelos de carácter mecánico - geométrico que se adaptaran a la situación experimental de la época. Aunque el continuo geométrico y el continuo tiempo están íntimamente ligados, la concepción del tiempo como un continuo aparece mucho más tarde que el continuo geométrico, quizás entre otras cosas por el carácter más abstracto del tiempo en contraste con las mediciones de figuras geométricas que son más permanentes, perceptibles, e imaginables. Para ejemplificar lo que acabamos de decir consideremos un objeto que se mueve de un lugar A a un lugar B en un tiempo T, entonces la velocidad promedio del móvil de A a B estaría dada por la distancia entre A y B dividida entre el tiempo T, si necesitaramos calcular velocidades promedio para subtrayectos del trayecto AB, cada vez tendríamos una cierta lista de números, a la cual podríamos asociarle una función digamos escalonada, por ejemplo supongamos que: distancia de A a B, que denotaremos por $d(A,B) = 430$ km. $d(A,A_1) = 100$ km

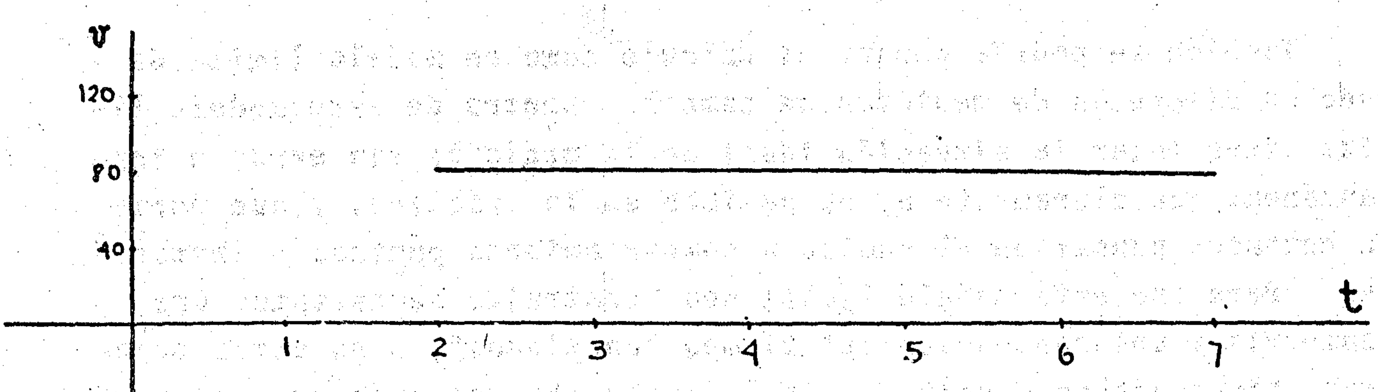
$d(A,A_2) = 60$ km

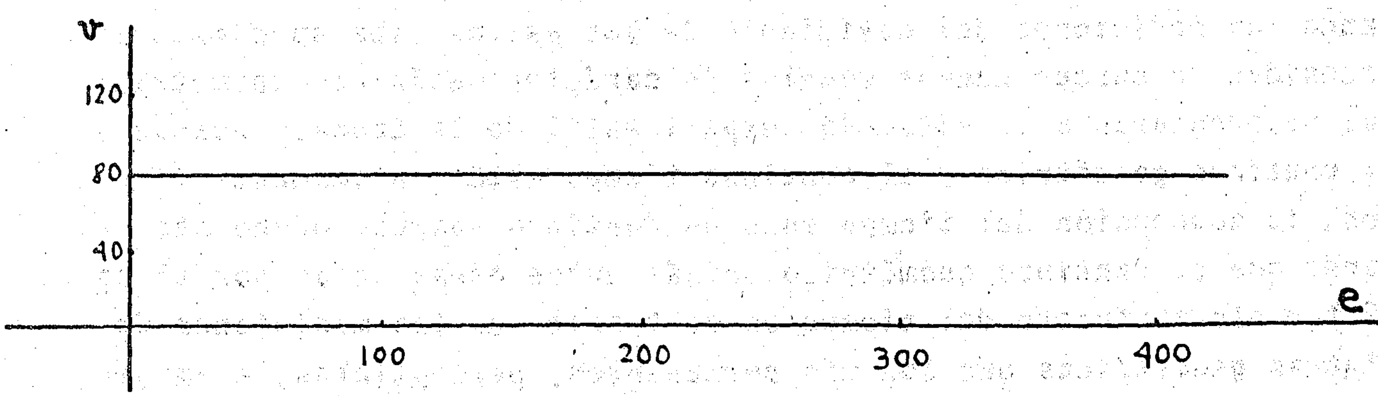
$d(A_2,B) = 270$ km

para ir de A a A_1 empleó de las 2:00 a las 3:15
para ir de A_1 a A_2 empleó de las 3:15 a las 4:45
para ir de A_2 a B empleó de las 4:45 a las 7:00

entonces las funciones escalonadas que representarían las velocidades promedio, quedarían:

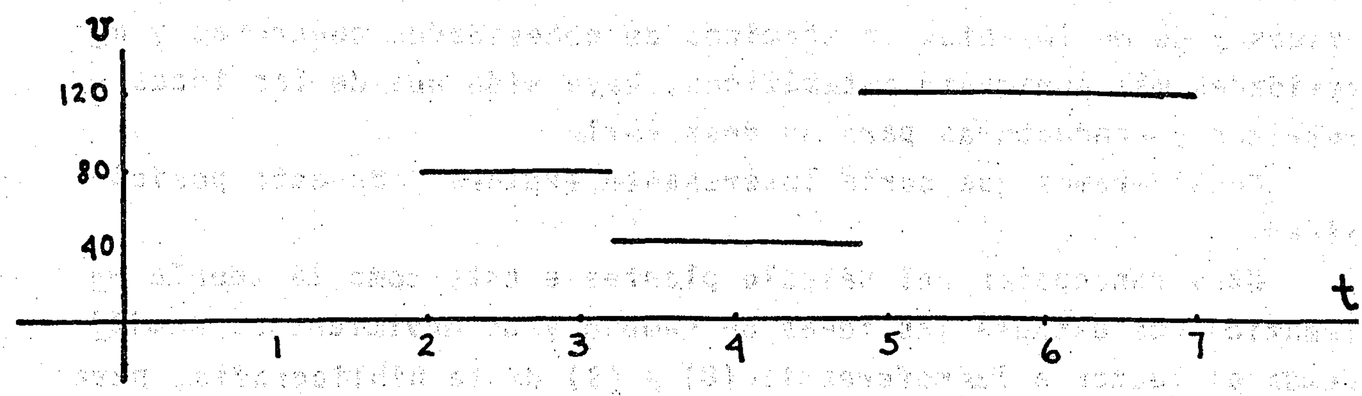
a) Si tomamos todo el trayecto

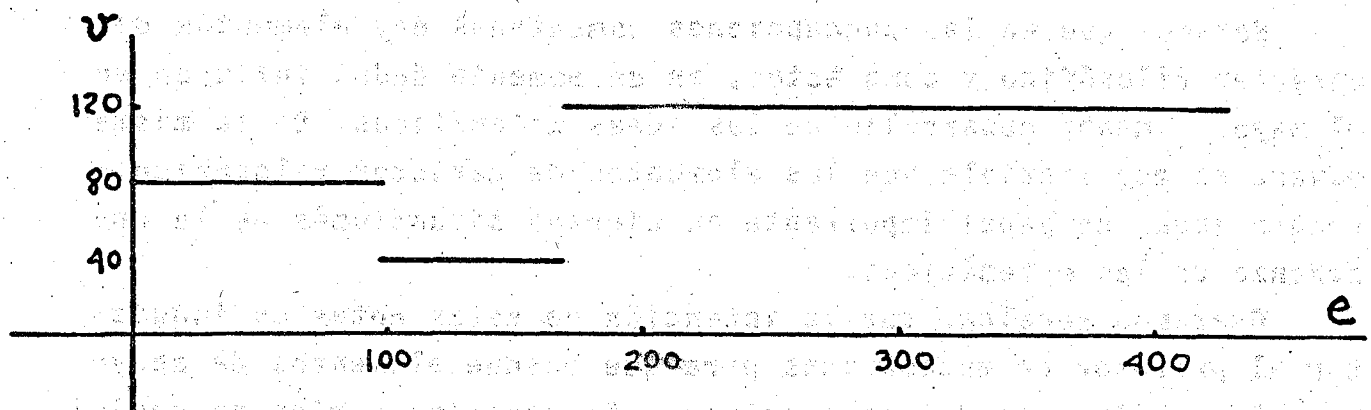




donde e y t representan el espacio recorrido y el tiempo transcurrido, respectivamente

b) Considerando los subtrayectos





Entonces, para cada medición tendríamos una pareja de funciones que nos representarían los cambios de velocidad en los diferentes subtrayectos con respecto al tiempo y al espacio, y así, una descripción matemática del modelo estaría dada por una familia de parejas de funciones, aunque ya desde aquí es claro que si tenemos dos parejas de funciones, una correspondiente a una subdivisión de los subtrayectos de la otra, en general aquella contiene más información que esta última. Esto nos conduce a que mientras más fina es una partición respecto a otra, más información hay en el modelo correspondiente. Entonces si existiena un modelo que correspondiera a una partición más fina que cualquier otra, tendríamos ahí más información que en cualquier otro modelo.

¿Cuál sería la partición más fina que cualquier otra? Pues claramente la partición puntual y esto nos lleva a pensar en la ve locidad en un punto y en un instante. Es muy posible que durante los siglos que llevó la gestación del Cálculo esta situación de refinamiento paulatino de modelos discretos para problemas geométricos y de movimiento, en términos de necesidades concretas y necesidades más puramente matemáticas, haya sido una de las ideas motrices y conductoras para su desarrollo.

Consideramos que sería interesante explorar más esta posibilidad.

Otra concepción del Cálculo plantea a éste como la teoría matemática que estudia las ideas de cambio y de movimientos. Remitiremos al lector a las referencias (8) y (9) de la Bibliografía, para una exposición de este enfoque.

Notemos que en las concepciones comentadas hay elementos de carácter filosófico, y como éstos, en un momento dado, influyen en el mayor o menor desarrollo de las ideas matemáticas. De la misma manera es muy factible que los elementos de carácter filosófico puedan jugar un papel importante en ciertas situaciones de la enseñanza de las matemáticas.

Queremos recalcar que la intención de estas notas es inquietar al profesor de matemáticas para que busque elementos de apoyo para la realización de una enseñanza más efectiva y rica en posibilidades y, en particular, hemos señalado algunos temas y direcciones que consideramos que tienen mucho que ofrecer al entendimiento y enseñanza de las matemáticas. No pretendimos ni ser exhaustivos ni mucho menos que se interprete con rigidez y dogmatismo lo que hemos planteado, ya que, si algo requiere la enseñanza actualmente es deshacerse de estos dos aspectos que la ahogan, y en su lugar poner la imaginación y la autocrítica.

Bibliografía

1. Euclides. EUCLID'S ELEMENTS, Vols. 1,2,3. Dover Publications Inc. 1956.
2. CIENTIFICOS GRIEGOS, Vols. 1,2. Aguilar S.A. de Ediciones, 1970.
3. Boyer, Carl B. THE HISTORY OF THE CALCULUS AND ITS CONCEPTUAL DEVELOPMENT. Dover Publications Inc., 1959.
4. Kline, Morris. MATHEMATICAL THOUGHT FROM ANCIENT TO MODERN TIMES. Oxford University Press, 1972.
5. Brand, Louis. THE FUNDAMENTAL THEOREM OF THE CALCULUS. American Mathematical Monthly, Vol. 62, (1955).
6. Whitman, E. A. SOME HISTORICAL NOTES ON THE CYCLOID. American Mathematical Monthly, Vol. 50, (1943).
7. Rosenthal, Arthur. THE HISTORY OF CALCULUS. American Mathematical Monthly, Vol. 58, (1951).
8. Hogben, Lancelot. LA MATEMATICA EN LA VIDA DEL HOMBRE. Cía. Editorial Continental, 1957.
9. López de Medrano, Santiago. NOTAS DE CALCULO. Miscelánea Matemática # 12, Sociedad Matemática Mexicana, 1977.
10. Edwards, C. H. THE HISTORICAL DEVELOPMENT OF THE CALCULUS. Springer-Verlag, 1979.

Recomendamos los siguientes libros de Historia de las Matemáticas a nivel general.

1. Eves, Howard. AN INTRODUCTION TO THE HISTORY OF MATHEMATICS. Saunders Coll. Pub., 1983.
2. Struik, Dirk J. A CONCISE HISTORY OF MATHEMATICS. Dover Publications Inc., 1967.
3. Bell, E. T. DEVELOPMENT OF MATHEMATICS. McGraw-Hill, 1945.

Para obtener un panorama amplio de las matemáticas:

1. Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. y otros. LA MATEMATICA; SU CONTENIDO, METODOS Y SIGNIFICADO. Alianza Editorial, 1973.
2. Courant, R., Robbins, H. ¿QUE ES LA MATEMATICA? Aguilar S.A. de Ediciones, 1962.

Para el tema de Heurística:

1. Pólya, G. COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS. Editorial Trillas, 1965.
2. Pólya, G. MATHEMATICAL METHODS IN SCIENCE. The Mathematical Association of America, 1977.
3. Pólya, G. MATHEMATICAL DISCOVERY. John Wiley and Sons, 1981.
4. Pólya, G. MATEMATICAS Y RAZONAMIENTO PLAUSIBLE. Editorial Tecnos.

5. De Bono, E. LATERAL THINKING. Penguin Books, 1970.

Para una introducción a la Filosofía de las Matemáticas:

1. Lakatos, Imre. PRUEBAS Y REFUTACIONES, LA LOGICA DEL DESCUBRIMIENTO MATEMATICO. Alianza Editorial, 1978.

2. Weyl, Hermann. FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS Y DE LA CIENCIA NATURAL. Univ. Nal. Aut. de Mex., 1965.

para cualquier elección de $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

En particular por el Teorema del Valor Medio

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\&_i)\,(x_i - x_{i-i}) \qquad (3.8)$$

para algún $\&_i \in \,]x_{i-1}, x_i[$, por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$$

y otra vez, por cancelaciones sucesivas

$$= \lim_{N\to 0} (F(x_n) - F(x_0)) = F(x_n) - F(x_0)$$

$$= F(b) - F(a).$$

con respecto a notación tenemos que (3.8) puede ser escrita como

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = DF(\&_i)\Delta x$$

y su análogo (3.5) como

$$F(n+1) - F(n) = \delta F(n)\Delta n$$

Por otro lado (3.6) la representamos por

$$\sum_{n=i}^{j} \delta F(n)\,\Delta n = F(j) - F(i)$$

y (3.7) por

$$\int_a^b DF(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\boxed{\text{Problema 14.}}$ Extienda esta analogía a otros temas del Cálculo en todos los niveles y aspectos posibles.

Claramente se ve la necesidad de estudiar la historia de las matemáticas con la intención de descubrir los elementos de carácter heurístico, tanto del pensamiento matemático psicológico, como del pensamiento matemático social, para posteriormente buscar formas adecuadas para que los estudiantes manejen y desarrollen estos elementos dentro y fuera de las matemáticas

4. CONCEPCIONES DEL CALCULO

Hay varias formas de enfocar o concebir el Cálculo Diferencial e Integral. Se podría decir que Newton lo concebía y trabajaba más en términos de problemas e ideas de la Física y consideraciones geométricas, tratando de aplicar la metodología de demostración de Arquímedes, Eudoxo, etc., mientras Leibniz lo enfocaba de una manera más puramente matemática, en términos de analogías con otras situaciones matemáticas y haciendo énfasis en su generalidad, estructuración y sus aspectos combinatorios y simbólicos. Leibniz afirmaba que la teoría que estaba construyendo guardaba la misma relación, en términos de generalidad, eficiencia y mecanicidad, con los métodos de Arquímedes, como la Geometría Analítica de Descartes a la Geometría de Euclides. En esta concepción se enfatizaba el aspecto algebraico del Cálculo, que nos permitía resolver familias de problemas sin tener que ingeniar para cada caso una solución, sino simplemente aplicar fórmulas y computar. Este enfoque tomó mucho auge en la Europa Continental, en contraste con el enfoque de los matemáticos ingleses que acentuaban los aspectos geométricos y de movimiento y trataban de darle validez a los resultados del Cálculo, usando demostraciones de tipo geométrico como las del Método de Exhaución de Eudoxo. Laplace dice en su "Exposición del Sistema del Mundo": El análisis algebraico (Cálculo) nos hace olvidar pronto el objetivo principal, enfocando nuestra atención en las combinaciones abstractas, y únicamente al final regresamos al objetivo original. Pero, al sumergirse en las operaciones del análisis, uno es conducido, por la generalidad de sus métodos y la inestimable ventaja de transformar el razonamiento a procedimientos mecánicos, a resultados frecuentemente inaccesibles a la geometría. Tal es la fecundidad de análisis, que es suficiente traducir verdades particulares a este lenguaje universal para ver emerger de su mera expresión una multitud de verdades nuevas e inesperadas. Ningún otro lenguaje tiene la capacidad para la elegancia, que surge de una larga sucesión de expresiones encadenas una a otra y todas ramificándose de una idea fundamental. En consecuencia, los geómetras (matemáticos) de este siglo, convencidos de su superioridad, se han dedicado, principalmente, a extender su dominio y agrandar sus posibilidades.

Lagrange, en el prefacio de su "Mecánica Analítica", dice: Ya tenemos varios tratados sobre Mecánica, pero el plan de éste, es completamente nuevo, Me he impuesto el problema de reducir la mecánica y el arte de la resolución de sus problemas a fórmulas generales cuyo simple desarrollo proporciona todas las ecuaciones necesarias para las soluciones de cada problema... Ningún diagrama será encontrado en este trabajo. Los métodos que expongo no requieren construcciones o razonamientos geométricos o mecánicos, sino unicamente operaciones algebraicas sujetas a un procedimiento regular y uniforme. Aquellos que gustan del Análisis verán con placer como la mecánica deviene en una de sus ramas y me quedarán agradecidos por haber extendido su dominio.

Esta concepción del Cálculo se podría extender a todas las matemáticas y constrasta fuertemente con aquella que las considera como el arte de resolver cierto tipo de problemas haciendo énfasis en los aspectos de soluciones particulares, ingeniosas para cada caso.

Se puede decir de estas dos concepciones, que la de Leibniz propició el desarrollo del Cálculo y en cambio la de Newton puso escollos para este desarrollo, de tal manera que en los años siguientes a estos dos matemáticos, el desarrollo del Cálculo en la Europa Continental aventajó por mucho al dado por la escuela inglesa.

En la actualidad, con el desarrollo del Algebra Lineal y el Cálculo en Variedades, se ha generalizado un enfoque consistente en interpretar el Cálculo como el estudio del "comportamiento cualitativo" de una cierta clase de funciones, a saber, las funciones diferenciables, a través del comportamiento de las funciones lineales, entendiendo por estudio del comportamiento cualitativo de las funciones, el estudio ya sea de carácter local o global, de elementos como:

Inyectividad

Suprayectividad

Ceros

Singularidades

Crecimiento

Acotamiento

Periodicidad

En este enfoque la idea de derivabilidad queda como la de aproximación local a la función original, por medio de una función lineal.

Este enfoque tiene la ventaja de darle gran unidad a la problemática del Cálculo en sus diferentes formas: Cálculo de funciones de una variable, de varias variables, en variedades, en espacios de dimensión infinita y también la de relacionar más íntimamente diferentes ramas de las matemáticas.

También se podría pensar el Cálculo como un modelo límite de modelos discretos de medición de cambio. Dentro de este modelo límite tiene lugar la situación ideal de la medición sin error e instantánea, que claramente no es posible en la práctica, y que permite entonces pensar en el cambio o comportamiento puntual o instantáneo. Para que este modelo límite sea construido necesitamos una geometría y una concepción del tiempo "continuos", o en otras palabras, sin agujeros o saltos. En la evolución del problema del movimiento planetario, se ve claramente cómo, a medida que se iban refinando las mediciones del movimiento de los astros, iba surgiendo la necesidad de buscar nuevos modelos de carácter mecánico - geométrico que se adaptaran a la situación experimental de la época. Aunque el continuo geométrico y el continuo tiempo están íntimamente ligados, la concepción del tiempo como un continuo aparece mucho más tarde que el continuo geométrico, quizás entre otras cosas por el carácter más abstracto del tiempo en contraste con las mediciones de figuras geométricas que son más permanentes, perceptibles, e imagi-

nables. Para ejemplificar lo que acabamos de decir consideremos un objeto que se mueve de un lugar A a un lugar B en un tiempo T, entonces la velocidad promedio del móvil de A a B estaría dada por - la distancia entre A y B dividida entre el tiempo T, si necesitara
mos calcular velocidades promedio para subtrayectos del trayecto AB, cada vez tendríamos una cierta lista de números, a la cual podríamos asociarle una función digamos escalonada, por ejemplo supongamos que: distancia de A a B, que denotaremos por $d(A,B) = 430$ km.

$d(A,A_1) = 100$ km

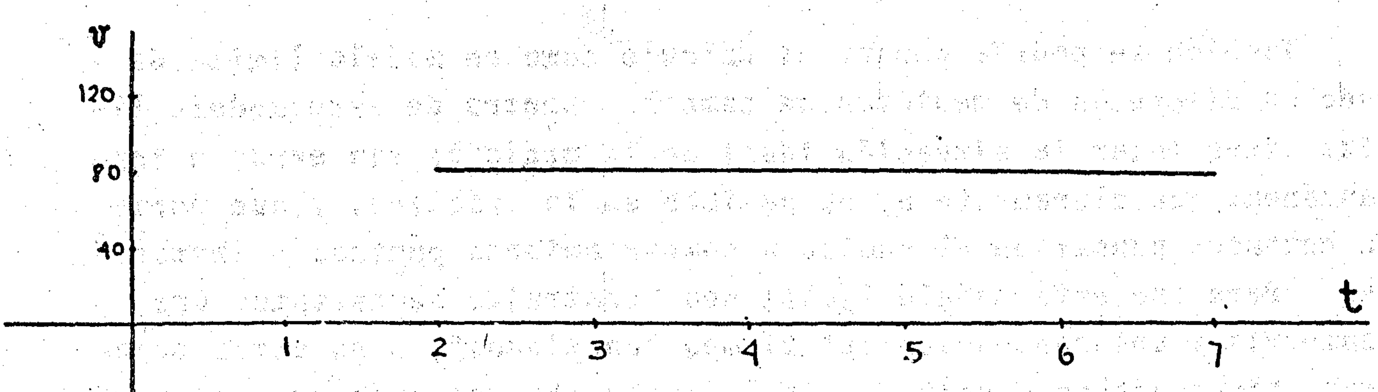
$d(A,A_2) = 60$ km

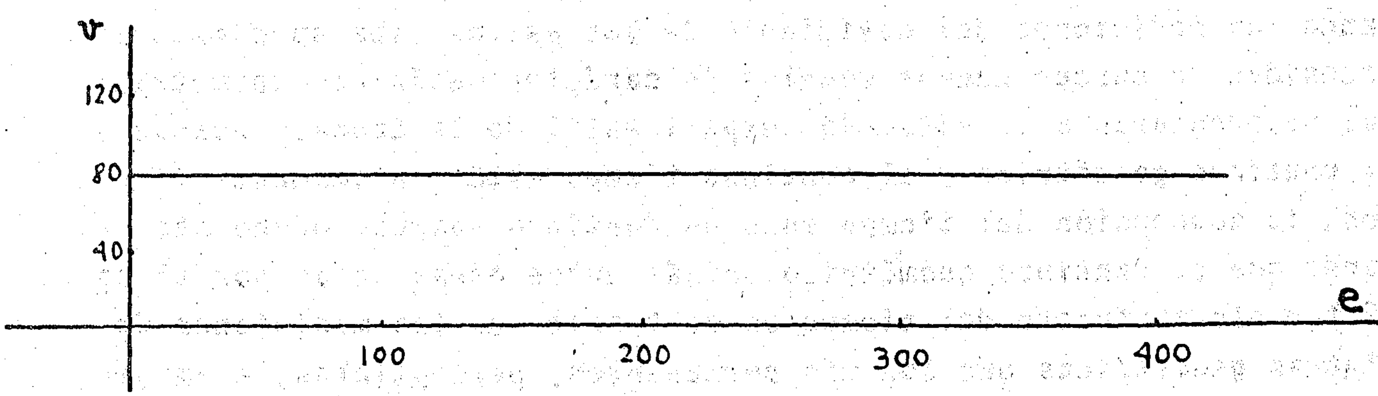
$d(A_2,B) = 270$ km

para ir de A a A_1 empleó de las 2:00 a las 3:15
para ir de A_1 a A_2 empleó de las 3:15 a las 4:45
para ir de A_2 a B empleó de las 4:45 a las 7:00

entonces las funciones escalonadas que representarían las velocidades promedio, quedarían:

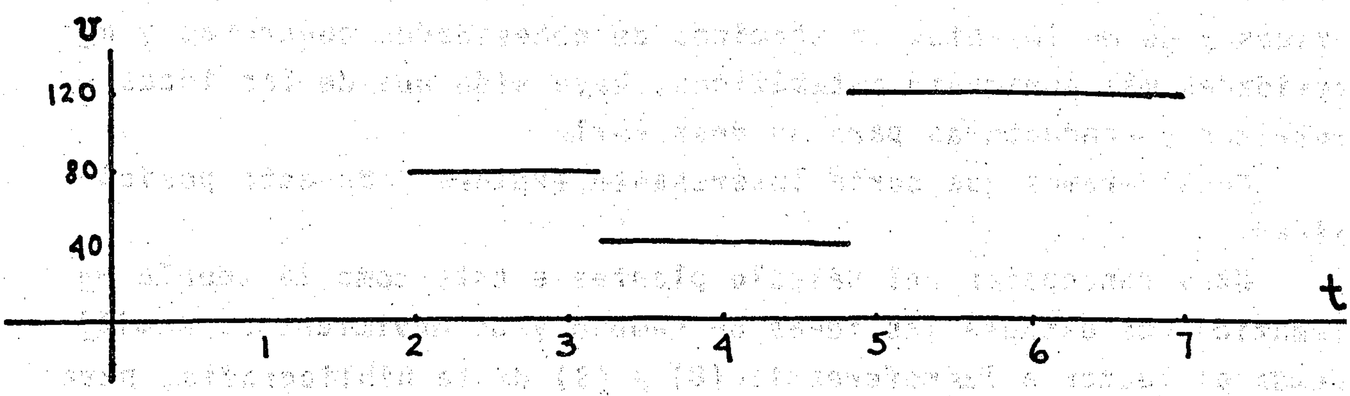
a) Si tomamos todo el trayecto

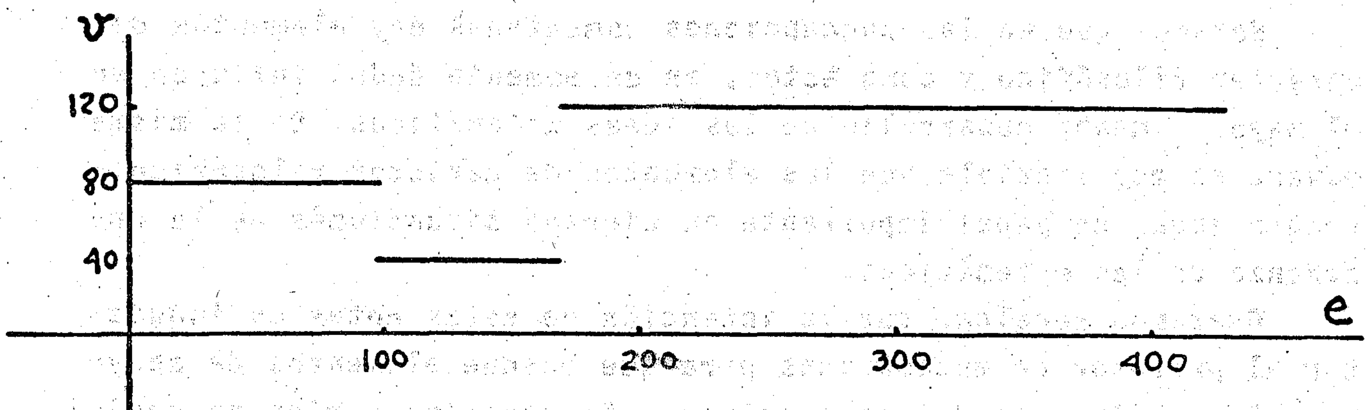




donde e y t representan el espacio recorrido y el tiempo transcurrido, respectivamente

b) Considerando los subtrayectos





Entonces, para cada medición tendríamos una pareja de funciones - que nos representarían los cambios de velocidad en los diferentes subtrayectos con respecto al tiempo y al espacio, y así, una descripción matemática del modelo estaría dada por una familia de parejas de funciones, aunque ya desde aquí es claro que si tenemos dos parejas de funciones, una correspondiente a una subdivisión - de los subtrayectos de la otra, en general aquella contiene más - información que esta última. Esto nos conduce a que mientras más fina es una partición respecto a otra, más información hay en el modelo correspondiente. Entonces si existiena un modelo que correspondiera a una partición más fina que cualquier otra, tendríamos ahí más información que en cualquier otro modelo.

¿Cuál sería la partición más fina que cualquier otra? Pues - claramente la partición puntual y esto nos lleva a pensar en la ve locidad en un punto y en un instante. Es muy posible que durante los siglos que llevó la gestación del Cálculo esta situación de refinamiento paulatino de modelos discretos para problemas geométricos y de movimiento, en términos de necesidades concretas y necesidades más puramente matemáticas, haya sido una de las ideas motrices y conductoras para su desarrollo.

Consideramos que sería interesante explorar más esta posibilidad.

Otra concepción del Cálculo plantea a éste como la teoría matemática que estudia las ideas de cambio y de movimientos. Remitiremos al lector a las referencias (8) y (9) de la Bibliografía, para una exposición de este enfoque.

Notemos que en las concepciones comentadas hay elementos de carácter filosófico, y como éstos, en un momento dado, influyen en el mayor o menor desarrollo de las ideas matemáticas. De la misma manera es muy factible que los elementos de carácter filosófico puedan jugar un papel importante en ciertas situaciones de la enseñanza de las matemáticas.

Queremos recalcar que la intención de estas notas es inquietar al profesor de matemáticas para que busque elementos de apoyo para la realización de una enseñanza más efectiva y rica en posibilidades y, en particular, hemos señalado algunos temas y direcciones que consideramos que tienen mucho que ofrecer al entendimiento y enseñanza de las matemáticas. No pretendimos ni ser exhaustivos ni mucho menos que se interprete con rigidez y dogmatismo lo que hemos planteado, ya que, si algo requiere la enseñanza actualmente es deshacerse de estos dos aspectos que la ahogan, y en su lugar poner la imaginación y la autocrítica.

Bibliografía

1. Euclides. EUCLID'S ELEMENTS, Vols. 1,2,3. Dover Publications Inc. 1956.
2. CIENTIFICOS GRIEGOS, Vols. 1,2. Aguilar S.A. de Ediciones, 1970.
3. Boyer, Carl B. THE HISTORY OF THE CALCULUS AND ITS CONCEPTUAL DEVELOPMENT. Dover Publications Inc., 1959.
4. Kline, Morris. MATHEMATICAL THOUGHT FROM ANCIENT TO MODERN TIMES. Oxford University Press, 1972.
5. Brand, Louis. THE FUNDAMENTAL THEOREM OF THE CALCULUS. American Mathematical Monthly, Vol. 62, (1955).
6. Whitman, E. A. SOME HISTORICAL NOTES ON THE CYCLOID. American Mathematical Monthly, Vol. 50, (1943).
7. Rosenthal, Arthur. THE HISTORY OF CALCULUS. American Mathematical Monthly, Vol. 58, (1951).
8. Hogben, Lancelot. LA MATEMATICA EN LA VIDA DEL HOMBRE. Cía. Editorial Continental, 1957.
9. López de Medrano, Santiago. NOTAS DE CALCULO. Miscelánea Matemática # 12, Sociedad Matemática Mexicana, 1977.
10. Edwards, C. H. THE HISTORICAL DEVELOPMENT OF THE CALCULUS. Springer-Verlag, 1979.

Recomendamos los siguientes libros de Historia de las Matemáticas a nivel general.

1. Eves, Howard. AN INTRODUCTION TO THE HISTORY OF MATHEMATICS. Saunders Coll. Pub., 1983.
2. Struik, Dirk J. A CONCISE HISTORY OF MATHEMATICS. Dover Publications Inc., 1967.
3. Bell, E. T. DEVELOPMENT OF MATHEMATICS. McGraw-Hill, 1945.

Para obtener un panorama amplio de las matemáticas:

1. Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. y otros. LA MATEMATICA; SU CONTENIDO, METODOS Y SIGNIFICADO. Alianza Editorial, 1973.
2. Courant, R., Robbins, H. ¿QUE ES LA MATEMATICA? Aguilar S.A. de Ediciones, 1962.

Para el tema de Heurística:

1. Pólya, G. COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS. Editorial Trillas, 1965.
2. Pólya, G. MATHEMATICAL METHODS IN SCIENCE. The Mathematical Association of America, 1977.
3. Pólya, G. MATHEMATICAL DISCOVERY. John Wiley and Sons, 1981.
4. Pólya, G. MATEMATICAS Y RAZONAMIENTO PLAUSIBLE. Editorial Tecnos.

5. De Bono, E. LATERAL THINKING. Penguin Books, 1970.

Para una introducción a la Filosofía de las Matemáticas:

1. Lakatos, Imre. PRUEBAS Y REFUTACIONES, LA LOGICA DEL DESCUBRIMIENTO MATEMATICO. Alianza Editorial, 1978.

2. Weyl, Hermann. FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS Y DE LA CIENCIA NATURAL. Univ. Nal. Aut. de Mex., 1965.