Miscelánea Matemática **45** (2007) 41–54 SMM

Leonardo Euler, el Primer Analista de lo Imaginario

Xavier Gómez-Mont
Centro en Investigación en Matemáticas - CIMAT
Callejón de Jalisco s/n
Mineral de Valenciana
36240 Guanajuato, Gto.
México
gmont@cimat.mx

¡Ah el tiempo!,... como nubarrones se agolpan los recuerdos... Yo, Leonardo Euler nací hace 300 años y gocé del privilegio de estar vivo durante 75 años... Ahora desde acá, desde el reino de los muertos, les contaré de lo que fue mi pasión de vida.

Las imágenes llegan, una tras otra y me lanzan hasta la infancia... Desde allí , como una constante, como el hilo que le dió sentido a mi estar en el mundo, me acompaña mi pasión por las Matemáticas. Infancia, juventud, madurez, toda mi vida la dediqué devotamente a esta vocación, como a una actividad sagrada.

Debo confesar que me tocó vivir en una época esplendida... El Cálculo Diferencial e Integral recién creado por Newton y Leibniz... Me tocó ser el primero en escribir la fórmula:

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \tag{1}$$

Esta fórmula ha gustado a muchos a través de los siglos. Da una relación insospechada entre varios números importantes:

$$\begin{aligned} 1\ ,\ 0\ ,\ \pi &:= 3.14159265358979323385...\ ,\ e := 2.718281828459045...\ , \\ i &= \sqrt{-1} \end{aligned}$$

los neutros multiplicativos y aditivos, el número que expresa la cuadratura del círculo, la base de los logaritmos naturales y el número imaginario puro. En esta fórmula, aparte de ver sumas, productos y números imaginarios, vemos la operación que representamos como e elevado a una potencia. Esta operación viene del monomio y^n, que representa la multiplicación del número y n veces, pero ahora el exponente n es la variable e y toma el valor numérico de e.

Pero ya que hablamos de fórmulas maravillosas, hay otra fórmula aún más maravillosa:

$$e^{xi} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}\,(x) \tag{2}$$

La fórmula (2) se conoce hoy en día como **la Fórmula de Euler**. La función exponencial e^x está definida para la variable real x (i.e. $2^3 = 8,\ 2^i = ?\ldots$), entonces necesitamos indagar como se extiende a la variable imaginaria, y la fórmula (2) nos dice que lo que encontraremos son a las funciones trigonométricas, expresado en la fórmula (2). Esta fórmula es maravillosa porque las funciones trigonométricas y la función exponencial o logaritmo no se ve a primera vista que estén de alguna forma relacionadas. En particular, la fórmula (1) se obtiene de evaluar (2) con $x = \pi$.

De esta fórmula Benjamin Peirce (profesor y director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Harvard) dijo a finales del siglo XIX:

> **"Señores:**
> **Esto es seguramente cierto,**
> **es absolutamente paradójico;**
> **No lo podemos entender,**
> **y no sabemos que significa.**
> **Pero lo hemos demostrado,**
> **y por consiguiente sabemos que**
> **debe ser la verdad."**

Richard Feynman [F] afirmó:

"Es la fórmula más notable en Matemáticas".

Las funciones trigonométricas nacieron en las tablas elaboradas desde la antigüedad por los babilónicos, griegos e hindús. El seno se definió como la relación que hay entre la mitad del ángulo y la mitad de la longitud de la cuerda en un circulo con apertura ese ángulo. La función exponencial se definió como la inversa del logaritmo, que fue introducido por el escocés John Neper (1550-1617), la cuál se tenía representada en las tablas de logaritmos. El logaritmo permite convertir una multiplicación en una suma, y calcular una raíz con una división, pasando de ida y vuelta por la tabla de los logaritmos:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \qquad \log(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\log(a) \tag{3}$$

La función exponencial, e^x, que es la inversa de la función logaritmo satisface entonces la propiedad fundamental de convertir una suma en un producto:

$$e^{x+y} = e^x e^y \tag{4}$$

A mí me tocó fundamentar matemáticamente estas ideas. La definición de función fué el concepto abstracto que utilicé para que se entendiera todo claramente. Estaba en el aire la representación de funciones por series. Las funciones trigonométricas y exponencial, que originalmente eran 'tablas', podían ser representadas también a través de las siguientes expresiones:

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \tag{5}$$

$$\cos(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \tag{6}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{7}$$

Estas representaciones se siguen fácilmente (como veremos más adelante en (15) y (18)) de las fórmulas:

$$e^{nx} = (e^x)^n \ , \qquad \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx) = (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))^n \tag{8}$$

con x un número y n un entero positivo. La primera fórmula se sigue de (4) y la segunda es la fórmula de de Moivre. La fórmula de de Moivre nos dice que tanto la función exponencial e^x como la función $\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$ satisfacen la propiedad fundamental de mandar sumas en productos.

Si reemplazamos en la fórmula (5) ix por x y organizamos términos reales e imaginarios, utilizando para la organización la identidad

$i^2 = -1$, obtenemos la demostración de (2) que di en mi libro de 1748.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n\geq 0} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + i \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x) \end{aligned} \tag{9}$$

Estos son dos renglones hermosos en la Matemática. La lógica es impecable y minimal, se sigue directamente de las definiciones y de aritmética elemental. La Matemática no es Filosofía, a veces sabemos que algo es verdadero sin comprender su profundo significado. El paso importante en este argumento es el de pasar de las tablas a las expresiones en serie (6), (7), (5) . La expresión (5) para la función exponencial nos dice como debemos extender la función exponencial a los números imaginarios, y (9) nos dicen que en el eje imaginario esta función es trigonométrica. ¡¡Qué sorpesa!!

Como las fórmulas en (8) son fundamentales para este relato, pongámoslas de nuevo:

$$e^{x+\cdots+x} = e^x \cdots e^x$$

$$(\cos + i \operatorname{sen})(x + \cdots + x) = (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)) \cdots (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))$$

Estas fórmulas tienen una propiedad maravillosa: Como $x = n\frac{x}{n}$ nos da que para todo n:

$$e^x = e^{n\frac{x}{n}} = (e^{\frac{x}{n}})^n$$

$$\cos(x) + i \operatorname{sen}(x) = (\cos(\frac{x}{n}) + i \operatorname{sen}(\frac{x}{n}))^n$$

En particular, para conocer estas funciones tan solo hay que saber cuanto valen para x muy cercano a 0, pues la fórmula nos dice como se progaga la función a todos los números a partir de valores pequeños. De hecho, en el argumento que doy al final se prueba que basta con conocer la derivada en el 0 para que las fórmulas en (8) determinen completamente a la función y por ende, den una demostración de la fórmula de Euler (2).

Ya que los intrigué con este relato, permítanme platicarles con detalle como recuerdo el desarrollo y desenlace de estos hechos.

1. La Trigonometría, sus Tablas y sus Funciones

Podemos dividir la historia de la Matemática hasta mis tiempos en tres grandes bloques:

1) El griego, en el cual incluimos a Babilónicos y Egipcios

2) El árabe-hindú: que se desarrolló principalmente del siglo V al XVII.

3) El Europeo, iniciando con Descartes e incluyendo a Galileo, Newton y Leibniz. Duró los siglo XVII y XVIII.

La trigonometría es (principalmente) el estudio cuantitativo de los triángulos en el plano bi-dimensional. El hecho que la razón π entre la circunferencia y el diámetro de un círculo es constante se sabe desde hace tanto... En el Papiro Rhind de Egipto, fechado en 1650 AC, hay buena evidencia de $4 \times (\frac{8}{9})^2 = 3.16$ como un valor para π.

Hay evidencia que los babilónicos utilizaron la trigonometría y la tableta cuneiforme Plimpton 322 (cerca de 1900 A.C.) puede ser interpretada como una tabla de la cosecante. También fué utilizada la trigonometría en Sri Lanka en el siglo VI A.C. en la construcción de estructuras hidráulicas.

El griego Hipparchus de Nicaea (180-125 A.C.) escribió una tabla relacionando la longitud de arcos de círculos (ángulo A por radio r) con la longitud de la cuerda que abarca el arco ($2r\,\mathrm{sen}\,(A/2)$). Posteriormente, Claudio Ptolomeo (siglo II D.C.) en su Almagest, obtuvo fórmulas de adición y substracción, equivalentes a nuestras identidades

$$\mathrm{sen}\,(a+b) = \mathrm{sen}\,(a)\cos(b) + \cos(a)\,\mathrm{sen}\,(b)$$

$$\mathrm{sen}\,(a-b) = \mathrm{sen}\,(a)\cos(b) - \cos(a)\,\mathrm{sen}\,(b)$$

$$\mathrm{sen}\,(\frac{a}{2})^2 = \frac{1-\cos(a)}{2}$$

e hizo tablas más precisas utilizando sus resultados como algoritmo de cálculo.

Los siguientes descubrimientos interesantes en trigonometría se hicieron en la India. Las palabras seno y coseno vienen de esta época. Sobresale Aryabhata (476-550). Hicieron tablas y desarrollaron las fórmulas

$$\mathrm{sen}\,^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\mathrm{sen}\,(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)\ , \qquad \frac{1-\cos(2x)}{2} = \mathrm{sen}\,^2(x)$$

$$1 - \operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)^2 .$$

Los persas continuaron este trabajo. El astrónomo Ebn-Jounis (980-1083) tiene escrita la fórmula

$$\operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)] \tag{10}$$

y para el siglo XIV ya tenían tablas del seno con precisión de 8 dígitos para cada grado del argumento, con las diferencias que había que sumarle para cada $\frac{1}{60}$ de grado.

Noten como la fórmula (10) nos da un método para reemplazar la multiplicación de dos números por varias sumas. Si movemos el punto decimal para que los dos números sean menores que uno, a uno le sacamos el seno inverso, al otro el coseno inverso (consultando las tablas de senos y cosenos y leyéndolas al revés), luego sumamos y restamos los ángulos obtenidos y posteriormente le sacamos el seno (consultando de nuevo las tablas) y finalmente hacemos la semisuma. Posteriormente colocabamos el punto decimal en el lugar correcto. Este procedimiento efectivamente reduce la multiplicación a varias sumas y consulta de tablas trigonométricas. Esto da un aire con la identidad logarítmica fundamental (3), haciendonos sospechar que tal vez hay una relación entre las funciones trigonométricas y el logaritmo, pues están haciendo trabajos parecidos.

Abraham de Moivre (1667-1754) que era un francés protestante exhiliado en Inglaterra contemporáneo de Newton, observó los siguientes cálculos:

$$\begin{array}{rcl}
\cos(2x) & = & \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \\
\operatorname{sen}(2x) & = & 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) \\
\cos(3x) & = & \cos^3(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}^2(x) \\
\operatorname{sen}(3x) & = & 3\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x) \\
\cos(4x) & = & \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}^4(x) \\
\operatorname{sen}(4x) & = & 4\cos^3(x)\operatorname{sen}(x) - 4\cos(x)\operatorname{sen}^3(x) \\
\cos(5x) & = & \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\operatorname{sen}^2(x) + 5\cos(x)\operatorname{sen}^4(x) \\
\operatorname{sen}(5x) & = & 5\cos^4(x)\operatorname{sen}(x) - 10\cos^2(x)\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}^5(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Encontró de Moivre el patrón en estos cálculos. Agrupa estas ecuaciones de 2 en 2, ve el parecido con los coeficientes del binomio de Newton, y haz que los signos hagan sentido. De Moivre escribió en

1722, utilizando los números imaginarios $a+bi$ con $i^2=-1$, la fórmula:

$$\cos(nx)+i\operatorname{sen}(nx)=(\cos(x)+i\operatorname{sen}(x))^n \tag{11}$$

que como veremos más adelante, es fundamental para dar una demostración de (2), y que se conoce como la fórmula de de Moivre.

2. Los logaritmos, sus Tablas, sus Funciones y sus Inversas

Los logaritmos fueron introducidos por el escocés John Neper en 1614. Eran los tiempos de Descartes y de Galileo, tiempos anteriores a Newton y a Leibniz. Al principio Neper llamó a los logaritmos "números artificiales" y a los antilogaritmos "números naturales". Posteriormente formó la palabra logaritmo para significar un número que indica una proporción: logos, significando proporción y arithmos, significando número. Napier escogió esto, porque los logaritmos de números en progresión geométrica están en progresión aritmética.

Pero como es común en Matemáticas, podemos rastrear el nacimiento de la idea mucho antes. Podemos rastrear la relación logarítmica fundamental

$$\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b) \tag{12}$$

hasta Arquímedes (-287,-212). En su libro El Arenero, se propone calcular el número de granos de arena que caben en una esfera con radio la distancia de la tierra a la luna. Para poder escribir números muy grandes, diseña una cascada de unidades de tamaño creciente, que nosotros escribiríamos como

$$10^8,(10^8)^2,(10^8)^3,(10^8)^4,\dots$$

De esta forma sólo necesita poder escribir números enteros con 8 cifras decimales y estas unidades. El ya nota que

$$10^a\dot{1}0^b=10^{a+b}$$

que es un caso particular de la relación logarítmica fundamental (12).

Posteriormente esta relación fue redescubierta por el alemán Stifel (1486-1567) quien escribió

progresión aritmética:	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
progresión geométrica:	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

indicando que ya sabía obtener el logaritmo de números de magnitud menor que 1:

$$\log(\frac{1}{n}) = -\log(n)\,.$$

Si usamos la base 10 para los logaritmos, el logaritmo de un número $a := a_1.a_2$, con parte entera a_1 y parte decimal $.a_2$, es el número b tal que $a = 10^b$. Si escribimos $b = N.c$, con parte entera N y parte decimal $.c$, entonces el número N, que se llama la característica, nos informa el número de dígitos, disminuidos por 1 que tiene el número a_1 en su expansión decimal. Es decir, basta escribir una tabla de logaritmos para los números entre 1 y 10, obteniendo el número c que se denomina la mantisa.

Johann Bernoulli (1667-1748) introdujo la definición (aunque yo le di el nombre)

$$e := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n\,.$$

El descubrió este número al estudiar el interés compuesto. Una manera sencilla de describir esto es la siguiente: Una cuenta bancaria que empieza con \$1.00 y paga el 100 % de interés por año. Si el interés se acredita 1 vez, al final del año, el valor del capital asciende a \$2.00; pero si el interés se calcula y se suma 2 veces al año, el \$1 se multiplica por 1.5 dos veces, dando $\$1.00 \times 1.5^2 = \$2.25$. Calculando trimestralmente obtenemos $\$1.00 \times 1.25^4 = \$2.4414...$ ... y calculando mensualmente da $\$1.00 \times 1.0833..^{12} = \$2.613035...$

Bernoulli se percata que esta sucesión se acerca a un límite a medida que se toman más intervalos de menor tamaño. Si hacemos el cálculo semanalmente nos da \$2.692597..., mientras que si calculamos diario, nos da \$2.714567... Usando n como el número de intervalos, con interés de $\frac{1}{n}$ en cada intervalo, el límite para n grande es el número e. En otras palabras, con un interés continuo, el valor de la cuenta llegaría a \$2.7182818... Más generalmente, una cuenta que inicie con \$1, y que rinde $\$(1 + R)$ como interés simple, nos rendirá $\$e^R$ con interés compuesto.

3. El Escenario Matemático en el que Nací

En Europa en el siglo XVII, llegó René Descartes (1596-1650) con todas sus dudas sobre el conocimiento recopilado desde la antigüedad, la certeza de su pensamiento y la escritura de su Geometría. También llegó Galileo Galilei(1564-1642) con su Cinemática, dosificando la gravedad en su plano inclinado. Luego el gran Sir Isaac Newton (1643-1727) con su Dinámica. Que hermoso libro Principia Mathematica. Pero a su vez, que torre tan inaccesible para la mayoría de los demás. Mucho tuvimos que trabajar muchos para aclarar lo que Newton quería decir. El alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) ayudó mucho a este respecto. Me atrevería a decir que Newton era mejor físico y geómetra, pero Leibniz era mejor matemático. Claro que Leibniz no escribió nada ni cercanamente a la Principia Mathematica de Newton.

Yo seguí la tradición de Leibniz. A mí me tocó aparecer en escena cuando Newton y Leibniz ya habían muerto. Mi "Introductio in Analysin Infinitorum"([E1]) de 1748 se convirtió en el texto estandar del siglo XVIII, así como mis Elementos de Algebra (E2]) de 1770. Utilizo estos 2 textos para describir el escenario matemático en el que me tocó vivir. En el primer libro hice más precisas las ideas de Johann Bernoulli sobre la definición de función, y **afirmé que el Análisis Matemático es el estudio de las funciones. Integré el Cálculo diferencial de Leibniz con el método de Newton de las fluxiones en el Análisis Matemático. Nosotros basamos el Cálculo sobre la teoría de funciones en lugar de basarlo sobre las curvas geométricas, como se había hecho previamente (principalmente por Newton).** Las bases de mi pensamiento matemático son:

Lo que sea que sea capaz de incrementar o disminuir, se dice **magnitud o cantidad**. De esta definición es evidente que las distintas clases de magnitudes deben ser tan variadas que hace difícil que uno las enumere.

Matemáticas, en general, es la ciencia de la cantidad; o la ciencia que investiga los medios de medir las cantidades. Un número es solamente la razón de una magnitud hacia otra arbitraria a la que consideramos la unidad.

Por lo tanto los fundamentos de la Ciencia Matemática deben recaer en un **tratado completo de la ciencia de los números, y en un examen cuidadoso de los distintos métodos posibles de su cálculo**.

Los número enteros y las fracciones las podemos sumar y multiplicar.

El producto de un número consigo mismo se dice que es un cuadrado, nombre que viene de la Geometría, que nos dice que el contenido en un cuadrado se obtiene al multiplicar el lado con sigo mismo. El número con respecto al producto se dice que es su raíz cuadrada. En aquella época nos gustaba hacer tablas. Por ejemplo:

Número:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Cuadrado:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

Número:	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Cuadrado:	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Si leemos la tabla al revés, obtenemos la tabla de las raíces cuadradas. Nos percatamos de las fórmulas

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pero cuando un número no es un cuadrado perfecto, como 12 por ejemplo, no es posible encontrar un número natural cuyo cuadrado sea 12. Sabemos, sin embargo, una raíz cuadrada de 12, $\sqrt{12}$ debe valer entre 3 y 4, dado que $3^2 = 9$, y $4^2 = 16$. También sabemos que es un número menor que $3\frac{1}{4}$, dado que $(3\frac{1}{4})^2 = 12\frac{1}{4}$ y menor que $3\frac{7}{15}$, dado que $(3\frac{7}{15})^2 = 12\frac{4}{225}$

De esta manera, una clase de números, que no pueden ser designados por fracciones, pero que sin embargo son cantidades determinadas: Como para $\sqrt{12}$, y nombramos a esta nueva clase de números irracionales o inconmensurables.

Cuando deseamos extraer la raíz cuadrada de un número negativo, una gran dificultad aparece, dado que no hay ningún número cuyo cuadrado sea un número negativo. Por ejemplo el número $\sqrt{-4}$ debe pertenecer a una especie completamente distinta de números; dado que no los podemos incluir ni dentro de los números positivos ni negativos. Por consiguiente es una cantidad imposible.

> **De esta manera hemos llegado a una idea de números que por su naturaleza son imposibles; y son conocidos como cantidades imaginarias, porque viven solo en la imaginación.**
>
> **Pero a pesar de esto, estos números se presentan a la mente; existen en nuestra imaginación, y todavia tenemos idea suficiente de ellos, dado que por $\sqrt{-4}$ entendemos un número tal que multiplicado con sigo mismo nos da -4. Por esta razón también, nada**

nos prohibe de utilizar estos números imaginarios, y emplearlos dentro de los cálculos.(Ver [E1].)

4. El Nacimiento del Análisis de lo Imaginario

Ahora toca las ideas novedosas que introduje, y que aplicadas a la discusión anterior, podríamos llamar Análisis Trigonométrico.

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma de esta cantidad variable y por números o cantidades constantes. Para mí, una expresión analítica quería decir una expresión compuesta de magnitudes simbólicas y números através de operaciones algebraicas, que incluía adición, substracción, multiplicación, división, elevar a potencias, el tomar raíces, la resolución de ecuaciones, la función exponencial, los logaritmos e innumerables otras funciones, del cual el Cálculo Integral nos provee en abundancia.

Para mí la variable x podía tomar valores reales e imaginarios. Los números imaginarios incluían los de la forma $a + b\sqrt{-1}$, pero para nosotros los números imaginarios eran todos los números que se ocuparan para resolver todas las ecuaciones polinomiales. Fue hasta Carl Friederic Gauss (1777,1855) que se supo que podíamos escribir todos esos números en la forma $a + bi$ y les dio una representación geométrica de puntos en un plano. Nosotros calculábamos con gran destreza con las expresiones $a + bi$.

Consideremos las funciones exponenciales, o potencias, en las cuales los exponentes mismos son una variable. Consideremos a^z, donde a es una constante de tamaño mayor que 1 y z una variable. Al menos los números enteros podemos sustituirlos por z:

$$\begin{aligned} z &= \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \;\rightarrow\; a^z \\ &= \ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots \end{aligned}$$

Igualmente, podemos tomar z una fracción, por ejemplo $a^{\frac{5}{2}} := \sqrt{a^5}$ se encuentra entre a^2 y a^3, dado que $2 < \frac{5}{2} < 3$. De la misma forma dejamos que z tome valores irracionales, aunque por supuesto es más dificil de entender este concepto. Sin embargo, solo consideramos ahora valores reales de z (pues desde este punto de vista que pueda ser a^i es bastante enigmático). Así $a^{\sqrt{7}}$ toma un valor que se encuentra entre a^2 y

a^3, y más precisamente entre $a^{\frac{26457}{10,000}}$ y $a^{\frac{26458}{10,000}}$, dado que $\sqrt{7} = 2.64575\ldots$, etc.

Probemos ahora **la propiedad fundamental de las exponenciales:**

$$a^{y+z} = a^y a^z \qquad\qquad \forall\, y, z \tag{13}$$

Basta probarlo para y, z fracciones, dado que nuestra definición de exponencial es aproximando el número z por fracciones. Sea entonces m el mínimo común múltiplo de los denominadores de $y = \frac{n_1}{m}$ y de $z = \frac{n_2}{m}$, y tenemos:

$$a^{y+z} = a^{\frac{n_1+n_2}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{n_1+n_2} = (a^{\frac{1}{m}})^{n_1}(a^{\frac{1}{m}})^{n_2} = a^{\frac{n_1}{m}}a^{\frac{n_2}{m}} = a^y a^z$$

Habiendo fijado la base a, decimos que el logaritmo de y es el exponente en la potencia a^z tal que $a^z = y$, y lo denotamos como $z = \log(y) = \log_a(y)$. De la propiedad fundamental de la exponencial (13) se deduce la propiedad fundamental de los logaritmos (3). Hay una infinidad de logaritmos, dependiendo de la elección de la base $a > 1$. Si $b > 1$ es otro número y escribimos $b = a^r$, entonces

$$\log_b(z) = r \log_a(z)$$

y por consiguiente en esencia hay un solo logaritmo.

Sea ω un número infinitamente pequeño, o una fracción tan pequeña de tal forma que $a^\omega = 1 + \psi$, con ψ también un número infinitamente pequeño. Poniendo $\psi = k\omega$, tenemos

$$a^\omega = 1 + kw \tag{14}$$

Ahora haciendo $\omega = \frac{z}{n}$ infinitamente pequeño obtenemos:

$$\begin{aligned} a^z = (a^{\frac{z}{n}})^n = (1 + \frac{kz}{n})^n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{\ell!}(\frac{kz}{n})^\ell \\ = \sum_{\ell=0}^{n}[\frac{n}{n}\cdots\frac{n-\ell+1}{n}]\frac{(kz)^\ell}{\ell!} \to \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(kz)^\ell}{\ell!}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

donde en el segundo paso usamos (14) y en el tercero el binomio de Newton que expande $(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + \cdots + \beta^n$. Adentro del paréntesis rectangular en (15) tenemos que el término $\ell = 1, \ldots$ es el producto de ℓ factores, cada uno de los cuales se está aproximando a 1 al hacer n cada vez más grande. Noten que en este término siempre tenemos ℓ factores aunque n sea muy grande. Cuando n crece, el número de factores es fijo y cada uno de ellos está tendiendo a 1. Asi que la convergencia coeficiente a coeficiente a la serie es muy clara.

Existe un único valor de la base a de tal forma que $k = 1$. Si escojemos esta base, que la denotamos por e, tendremos la expansión en serie

$$e^z = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell!} \ , \qquad e = e^1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} = 2.71828182... \tag{16}$$

Esta es la función exponencial, y su inverso es la función logaritmo natural. Lo natural viende de haber escojido $k = 1$ en la discusión anterior.

De esta fórmula podemos también deducir la propiedad fundamental (4) de la exponencial

$$e^{x+y} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(x+y)^\ell}{\ell!} = (\sum_{\ell_1=0}^{\infty} \frac{x^{\ell_1}}{\ell_1!})(\sum_{\ell_2=0}^{\infty} \frac{y^{\ell_2}}{\ell_2!}) = e^x e^y$$

Semejantemente, queremos obtener la expresión en serie de las funciones trigonométricas Seno y Coseno. La clave para descifrar estas expansiones está en la fórmula de de Moivre (11) y del hecho de que si ω es infinitesimalmente pequeño tenemos

$$\cos(\omega) = 1 \quad , \quad \mathrm{sen}\,(\omega) = \omega \quad , \quad \cos(\omega) + i\,\mathrm{sen}\,(\omega) = 1 + i\omega \tag{17}$$

Así que dado x escojamos n suficientemete grande para que $\omega = \frac{x}{n}$ sea infinitesimalmente pequeño, y entonces tenemos

$$\begin{aligned} \cos(x) + i\,\mathrm{sen}\,(x) &= \cos(n\frac{x}{n}) + i\,\mathrm{sen}\,(n\frac{x}{n}) = (\cos(\frac{x}{n}) + i\,\mathrm{sen}\,(\frac{x}{n}))^n \\ &= (1 + i\frac{x}{n})^n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{\ell!}(\frac{ix}{n})^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} [\frac{\ell}{n} \cdots \frac{n-\ell+1}{n}] \frac{(ix)^\ell}{\ell!} \to \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ix)^\ell}{\ell!} = e^{ix} \,. \end{aligned} \tag{18}$$

donde la última igualdad del primer renglón utilizamos la fórmula de de Moivre (11), y al pasar al segundo renglón hemos utilizando las aproximaciones (17). Note las semejanzas del argumento (15) y (18).

Hemos demostrado la relación (2) exclusivamente usando las fórmulas de de Moivre (11), las aproximaciones infinitesimales (17) y la expansión de e^x en (16). Con esta fórmula justificamos el argumento en (9), así como las definiciones (6), (7) y (5).

Cabe también decir que con esta argumentación pude dar por terminada la disputa que venía desde Leibniz y Bernoulli sobre el significado del logaritmo de un número negativo $x < 0$ siendo esta

$$\log(x) = \log(-x) + (2k+1)\pi i \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Aunque la fórmula (2) la descubrí en 1727, no publique mi teoría general de logaritmos de números complejos hasta 1751. Estos argumentos que hemos expuesto utilizando infinitesimales se explican en el libro de Courant y John ([C]) utilizando la fundamentación posterior a mis tiempos que inició Augustin Cauchy (1789-1857) de ϵ y δ.

Ahora necesito descansar,..., saborear un poco estos recuerdos que he avivado para ustedes,..., meditar en lo dicho, relean para ver si absorben mejor el argumento, pues lo dicho es bello y profundo ....

Referencias

[C] Richard Courant y Fritz John, Introduction to Calculus and Analysis, Vol. I, Interscience Publishers (1965).

[E1] Leonhard Euler: Introduction to Analysis of the Infinite: Book I (ed. original 1748), Springer Verlag.

[E2] Leonhard Euler, Elements of Algebra, (ed. original 1770), Springer Verlag.

[F] Richard Feynman, Lecture on Physics Vol I, Chapter 33, p. 10, (1970).