Miscelánea Matemática 58 extraordinario (2014) 1-13 SMM

Navegación, convección y caos

Pedro Miramontes
Grupo de Biomatemáticas,
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México
pmv@ciencias.unam.mx

1. Los amores

Beatriz de Bobadilla y Ossorio nació en 1462 en una pequeña población de la provincia de Valladolid en España. Hija de un hidalgo cercano a la casa real española, Beatriz creció en los círculos cercanos a los monarcas y al final de su adolescencia era —según gente de la época— «...de una hermosura deslumbrante, de que se hacen lenguas los contemporáneos y capaz de pasiones volcánicas en las lides del amor». Bastó esa razón para que Isabel la Católica, no ajena al trato especial que su marido Fernando le prodigaba a la joven, la hiciera enmaridar con Hernán Peraza, señor de La Gomera, pues en el reino español no había sitio como dicha isla, en el archipiélago de Canarias, donde Beatriz y Fernando pudiesen encontrarse más alejados. Quiso de esta manera la fortuna que Beatriz, luego de enviudar, fuese la prenda amada de Cristóbal Colón, nuestro Almirante de la Mar Océana, y que al emprender este su viaje histórico en busca de las Indias, la primera escala fuese en Canarias donde el genovés le rindió visita a la señora de La Gomera. Afortunados amores, pues al reemprender su navegación, Colón encontró unos vientos, los que ahora llamamos alisios, que soplaban hacia el suroeste y lo alejaron de la costa de África encaminándolo hacia América.

Después de visitar las Bermudas, Cuba y La Española, Colón quiso volver a España rehaciendo su ruta. Como se encontró los alisios en contra, intentó maniobrar a la bolina, que es una acción lenta y fatigosa y conlleva muchas desviaciones de la ruta deseada. En una de las fluctuaciones, llegó al norte de su trayectoria original y ahí encontró vientos del oeste que lo llevaron tan al norte como las Azores y de ahí a puerto conocido, el de Lisboa. Sin habérselo propuesto, Colón había encontrado la tornavuelta de América a Europa.

Otro detalle de las rutas de los viajeros a vela entre Europa y América, que tampoco supo Colón, es que los patrones de los vientos se acompañan de patrones de corrientes marinas. De manera que constituyen verdaderas bandas de transporte que facilitan enormemente la navegación y, como consecuencia, la colonización de las nuevas tierras y el despegue de los imperios coloniales.

Tal es la importancia del conocimiento de las corrientes marinas y los vientos que las acompañan que, cuando a mediados del siglo XVI Andrés de Urdaneta descubrió la tornavuelta de Manila a Acapulco, esta ruta se mantuvo como un secreto de Estado de la mayor importancia. Urdaneta, experimentado navegante vasco, razonó que, en analogía con la ruta de América a España, si navegaba al norte de Manila en algún momento tendría que encontrar vientos y corrientes que se dirigieran al noreste. Así fue; las corrientes lo llevaron a bordear por el sur el archipiélago de Japón, a atravesar el Pacífico Norte y encontrar tierras americanas en la Alta California, de ahí se dirigió costeando hacia el sur hasta el puerto de San Blas y alcanzó Acapulco unos días después. Muchos españoles habían fracasado donde Urdaneta tuvo éxito, tanto que la trayectoria de ida y vuelta entre Acapulco y Manila fue la empleada durante siglos (hasta la independencia de México) para el comercio entre América y las Indias Orientales y pasó a la historia como la «ruta de Urdaneta».

Volvamos en el tiempo a 1513. En marzo de ese año, Juan Ponce de León zarpó de Puerto Rico al mando de tres naves para tratar de encontrar una isla que los rumores ubicaban al noroeste de La Española. Ponce de León divisó tierra firme en lo que ahora es San Agustín y dado su exuberante verdor, la llamó La Florida. Después de los requisitos legales (tomar posesión en nombre de la Cruz y la Corona, registrar su posición exacta, etcétera), Ponce de León quiso regresar a Puerto Rico y no pudo. Pese a tener el velamen hinchado por el viento en popa, una fuerza desconocida impedía el avance de las naves; Ponce de León se había topado con la corriente del Golfo. Se ha registrado para la historia el 13 de abril de 1513 como la fecha exacta del descubrimiento, por lo que en el reciente 2013 se conmemoraron quinientos años del acontecimiento. Hacia 1770 el fenómeno era ya bien conocido y en ese año se publicó el mapa de la figura 1.

Como se puede apreciar, los autores; el diplomático, político e inventor estadounidense Benjamín Franklin y su primo, el capitán ballenero Timothy Folger, concebían la corriente como una verdadera banda transportadora y razón no les faltaba puesto que calcularon que al montarse en ella se podía disminuir el tiempo de viaje entre América y Europa en dos semanas. Lamentablemente, el mapa de Franklin no fue apreciado en su tiempo y cayó en el olvido.

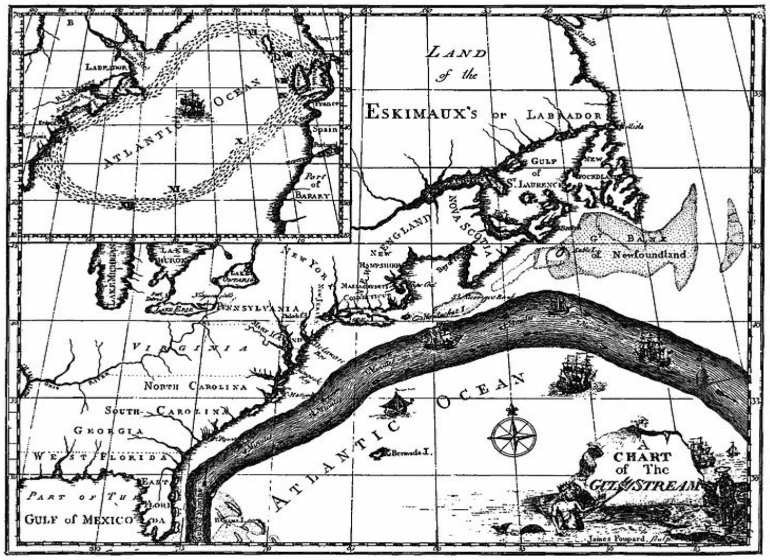

Figura 1. Mapa de la corriente del Golfo elaborado por Benjamin Franklin y publicado en 1770.

2. Las corrientes

Las corrientes marinas son movimientos masivos de agua y ocurren en todos los océanos. Son generadas por múltiples causas entre las cuales se cuentan los gradientes de temperatura y salinidad, la rotación de la tierra, el efecto de Coriolis y la interacción mecánica entre masas de agua de diferente densidad. Las corrientes marinas no se restringen al plano bidimensional —como en el mapa de Franklin— de la superficie de los océanos sino que también se pueden dar en las profundidades. La corriente del Golfo se origina en las aguas tropicales del estrecho de Florida y el agua caliente se dirige hacia el noreste. Frente a Carolina del Norte se aleja de la costa para dirigirse a la Europa septentrional, ahí pierde buena parte de la energía térmica que acarrea, cerca de un petawatt (10^{15} watts)[1], y se tuerce hacia el sur para regresar a América después de visitar las Canarias y cerrar su ciclo de nuevo en las Antillas. El centro del enorme remolino que forma la corriente del Golfo es una zona de calma chicha que se conoce como el mar de los Sargazos. Fenómenos semejantes ocurren en los demás océanos y en ambos hemisferios. Como dato interesante cabe mencionar que las corrientes de Kurioshio y la del Pacífico Norte, transportaron miles de toneladas de desechos que se produjeron durante los sismos de la

[1]Se estima que la energía que el sol irradia sobre la tierra es de 170 petawatts. Un automóvil típicamente tiene una potencia aproximada de 100 kilowatts.

región japonesa de Fukushima en el 2012 y las depositaron en la costa del Pacífico Norte de los Estados Unidos.

Gracias a la corriente del Golfo, Europa no es un congelador. Una opinión, tan falsa como extendida, es que el clima se determina principalmente por la latitud. Después de todo, es muy natural suponer que una región será más fría en tanto más cerca se encuentre de uno de los polos. Esta idea sería razonable (no del todo pues la altitud es un factor muy importante) si no existieran las corrientes marinas. Si miramos un mapa podemos constatar que la ciudad de Quebec, capital de la provincia del mismo nombre y Mónaco, enclavado en el Mediterráneo francés ambas al nivel del mar se encuentran a la misma latitud y sin embargo en enero la temperatura media de la primera es de trece grados centígrados bajo cero mientras que la de la segunda es de diez grados sobre cero. Lo mismo sucede en el Océano Pacífico; si se hace la comparación entre Vladivostok, en Rusia y Vancouver en Canadá se observa la misma diferencia. Es razonable suponer que la latitud es uno de los principales componentes del clima pues la energía que recibe el planeta tierra proveniente del sol es proporcional a la cuarta potencia del seno del ángulo que forma el rayo solar con la vertical en un punto de la superficie terrestre. Esto provoca un enorme gradiente dependiendo de la latitud. Si nos fijamos exclusivamente en los océanos, que cubren el setenta por ciento de la superficie del planeta, esta irradiación diferencial es el motor del clima pues en las regiones tropicales el agua se calienta mucho y dado que el calor específico del agua es cuatro veces mayor que el del suelo y cerca de cuatro mil veces mayor que el del aire, se dan diferencias muy grandes entre las temperaturas del agua y del aire, lo que provoca inestabilidades. La corriente del Golfo contribuye a estos efectos, pues lleva su enorme carga calórica del Caribe a Europa y allá cede su calor y atempera el clima de ese continente. El mecanismo preciso es objeto de fuertes debates [7] pero, en cualquier escenario, tiene que ver con la transferencia de calor del agua al aire.

3. Rupturas de simetría

Imaginemos un líquido contenido en un recipiente. Si se calienta la base se establece una diferencia $\Delta T = T - T_a$ de temperatura entre el líquido del fondo del contenedor y su superficie libre que está a la temperatura del ambiente. Si la diferencia de temperaturas es muy pequeña, el calor fluye de las partes bajas a las altas mediante el mecanismo de difusión. Es decir, a través de la cesión de energía de las moléculas más veloces del fondo a las más lentas de arriba mediante golpeteo mecánico, todo esto en un escenario microscópico. Sin embargo, si la diferencia de temperaturas aumenta, existe un valor crítico de ΔT a partir del cual el mecanismo de difusión se vuelve insuficiente para transmitir la energía. En ese momento ocurre una ruptura de simetría y el calor se traslada de abajo hacia arriba por convección, que ya es un transporte de masa macroscópico: el líquido caliente del fondo del recipiente sube y el frío de la superficie baja estableciéndose un patrón de circulación como el de la figura 2.

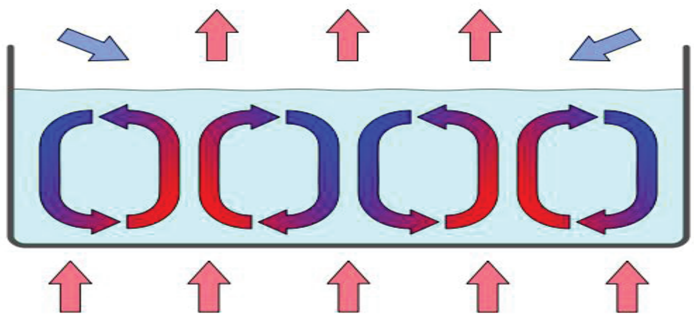

Figura 2. Representación de un liquido calentado en la base del recipiente.

En tres dimensiones (figura 3), al fenómeno del movimiento del fluido calentado, se le conoce como *circulación de Taylor–Bénard* y los prismas hexagonales se llaman *celdas de Bénard*.

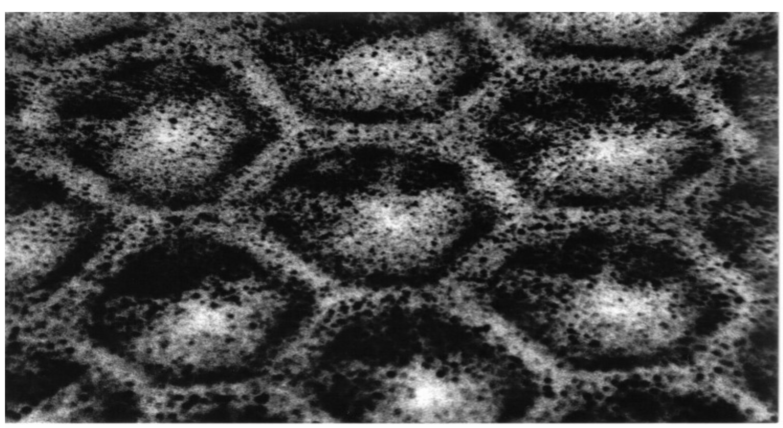

Figura 3. Patrones de Bénard en tres dimensiones. Se aprecia claramente como el líquido asciende por las caras de los prismas hexagonales y desciende por el centro. Se trata de un líquido de silicón.

La materia tiene una tendencia a adoptar de manera espontánea patrones geométricos claros, conspicuos y discernibles. Cuando un sistema homogéneo e isotrópico transita a un estado heterogéneo y anisótropo, lo hace a partir de una ruptura de simetría y al proceso se le llama *autoorganización*. La aparición espontánea de patrones en donde antes no existían, es posible únicamente en sistemas que intercambian materia, energía o información con su entorno; es decir sistemas termodinámicamente abiertos. Para ilustrar: si no existiera el sol, la atmósfera terrestre estaría en equilibrio y sus componentes se hallarían homogéneamente distribuidos. Gracias al sol, este hipotético estado no existe y existen patrones geométricos —las nubes— bien diferenciados. Las rupturas de simetría en física corresponden a las bifurcaciones en matemáticas. Estos conceptos junto con el de autoorganización son fundamentales en el estudio de las ciencias naturales pues son la manera como surge la *forma* tanto en la materia viva como en la inerte.

4. El tiempo atmosférico

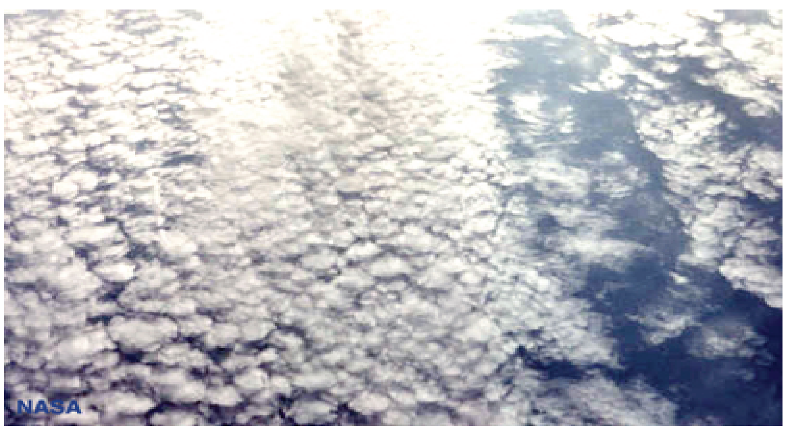

Figura 4. Celdas de convección de nubes. Los aficionados a los planeadores buscan las corrientes ascendentes para poder permanecer horas en vuelo.

El motor del tiempo atmosférico[2] en nuestro planeta es la interacción entre el agua de los mares y océanos y el aire atmosférico. Esto se debe al enorme calor específico del agua comparado con el del aire y el de los suelos. El agua de la superficie calienta el aire con el que se encuentra en contacto y si la diferencia de temperaturas es lo suficientemente grande, entonces se forman patrones de Bénard en el aire. Estos patrones se pueden observar como celdas en las nubes que se muestran en la figura 4.

Si esto sucede en una superficie marina muy extensa, entonces la fuerza de Coriolis hace sentir sus efectos y se forman los ciclones tropicales como el de la figura 5.

[2] «El tiempo atmosférico» es el estado de la atmósfera a corto plazo y es la materia de estudio de la metereología, mientras que el «clima» es lo mismo pero a largo plazo y la estudia la climatología. De aquí en adelante nos referiremos al primero simplemente como «el tiempo».

Figura 5. El ciclón tropical Catarina que golpeó la costa sur de Brasil en el 2004.

En 1963 apareció en la revista *Journal of Atmospheric Sciences* un artículo titulado *Deterministic Nonperiodic Flow* [5]. El autor, Edward N. Lorenz, presenta el análisis matemático y la solución numérica de un sistema que representa las celdas convección en un sistema hidrodinámico disipativo. Lorenz se propuso elaborar un modelo basado en la circulación de Rayleigh–Bénard. Lorenz, meteorólogo de profesión, buscaba modelar precisamente la circulación del aire cuando es calentado por el agua del mar.

Las ecuaciones de la hidrodinámica, las de Navier–Stokes, son muy complicadas y para intentar trabajar casos realistas se tienen que hacer suposiciones simplificadoras. Lorenz tomó un sistema propuesto originalmente por Saltzman [8] en donde se supone que en los términos inerciales la densidad es constante y no así en los términos que contienen a la aceleración debida a la gravedad. Esto se llama la *aproximación de Boussinesq* y las ecuaciones resultantes son:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\nabla^2\psi = \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\theta + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta = \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta$$

$\mathbf{v}$ es la velocidad del fluido y se puede suponer que ocurre en dos dimensiones por lo que se colocará ese vector en el plano vertical xz. $\psi(x,z,t)$ es el potencial de corriente. La convección consta de difusión y de un término de transporte de masa que se llama *advección*. Se puede definir el operador advectivo como $\mathbf{v}\cdot\nabla(\cdot)$. Este operador aparece en los lados izquierdos de ambas ecuaciones. θ es la diferencia de temperaturas entre la superficie del agua y el aire. El resto de los parámetros son: ν, la viscosidad cinemática, g, la aceleración gravitacional, el coeficiente de expansión térmica α del aire y el término de difusión κ. También se supone que la temperatura disminuye linealmente con la altura.

Dado que al alcanzar un valor crítico de la diferencia de temperaturas, el fluido comienza a moverse en forma de rollo convectivo, Lorenz escribió la parte espacial de θ y ψ en sus series de Fourier y aplicó el *truncamiento de Galerkin*, que consiste en cortar la serie de Fourier en sus primer o segundos términos. El resultado, después de acomodos y redefinición de variables y parámetros es el muy celebrado *sistema de Lorenz*:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x), \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z, \end{aligned} \tag{1}$$

donde x es la dependencia temporal de la función de corriente cuyo gradiente es el campo de velocidades, y y z son, respectivamente, las variaciones horizontal y vertical de la temperatura. El parámetro σ es el cociente ν/κ y se llama el *número de Prandtl*, la razón entre la difusividad de momento y la difusividad térmica, ρ es el número de Rayleigh y β tiene que ver con la geometría de las celdas de convección. Para una deducción formal y detallada se recomienda el excelente libro de Hilborn [3].

Para el análisis de su sistema, Lorenz eligió los valores de los parámetros $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ y $\rho = 28$. Si bien es costumbre comenzar el estudio de los sistemas mediante el análisis lineal en las vecindades de los puntos de equilibrio, en este caso el examen de los puntos de equilibrio aporta poca información. Cuando más es posible calcular los puntos de equilibrio, que son tres, y el análisis del jacobiano en ellos nos indicará que para los valores de los parámetros existen raíces complejas del polinomio característico, de modo que se puede concluir que si el estado de equilibrio se perturba, habrá oscilaciones locales.

Si se considera el campo vectorial definido por el lado de derecho del sistema (1):

$$F(x,y,z) = (\sigma(y-x), \rho x - y - xz, xy, -\beta z),$$

y se calcula su divergencia, se obtiene:

$$\nabla \cdot F = -(\sigma + \beta + 1).$$

Dado que los parámetros son positivos, la divergencia es negativa en todo el espacio y eso implica que el volumen de toda región en el espacio fase tiende a cero con el tiempo. Hay que tener precaución con la interpretación pues esto no quiere decir necesariamente que el destino final de toda región sea un punto pues también puede ser una superficie en el espacio.

Ante la imposibilidad de obtener más información relevante de manera analítica, Lorenz recurrió a la solución numérica de (1). Para ello, empleó una computadora Royal McBee modelo LGP-30. Esta computadora salió al mercado en 1956 con un costo cercano a los cincuenta mil dólares y contaba con una memoria de $4kb$, un procesador que corría $5kHz$ y consumía 1500 watts. Lorenz eligió un esquema de Runge-Kutta de segundo orden y cada iteración con un paso de $\Delta t = 0.01$ le tomaba un segundo a la computadora. Lorenz hizo corridas de 3000 a 6000 iteraciones.

5. Solución moderna

Hemos repetido el experimento numérico de Lorenz usando un esquema simple de Euler en una computadora de escritorio con un procesador i5 y que se toma 0.001 de segundo en calcular cien mil iteraciones con un paso de $\Delta t = 0.001$.

Desde luego, los resultados coinciden. La propiedad de cómputo es independiente del sustrato material del dispositivo en el que se lleve a cabo: si alguien corriese el mismo algoritmo para resolver las mismas ecuaciones en una computadora biomolecular, mecánica o hidráulica, llegaría a los mismos resultados.

En la figura 6 se muestra la gráfica de la componente x del sistema como función del tiempo. Un mirada a esta nos permite apreciar que hay un movimiento cuasiperiódico (alrededor de las 1500 y 2000 unidades de tiempo), que corresponden a los lapsos en los cuales las órbitas del espacio fase en la figura 8 dan vueltas alrededor de los «ojos» del atractor que parece un número ocho deformado. A la conmutación entre lapsos de cuasiperiodicidad y «crisis» en las cuales el sistema cambia de una rama del «ocho» a la otra, se le conoce como *intermitencia*. La intermitencia, que ha sido muy estudiada en la teoría de los sistemas dinámicos y en la física de fluidos, corresponde a la transición entre turbulencia y no turbulencia. Matemáticamente hablando, cada crisis corresponde a una bifurcación por doblamiento de periodo inversa [1].

La figura 7 muestra también la gráfica de la misma variable pero comenzando con dos condiciones iniciales muy cercanas: una de ellas parte del $(1, 1, 3)$ y la segunda del $(1, 1, 3.001)$.

Se puede observar que las trayectorias son muy parecidas pero que después de un lapso pequeño (hasta un lugar cercano a $x = 700$) divergen y que después de transcurrido un tiempo las diferencias son enormes y ya no tiene nada que ver la evolución de un sistema con la del otro.

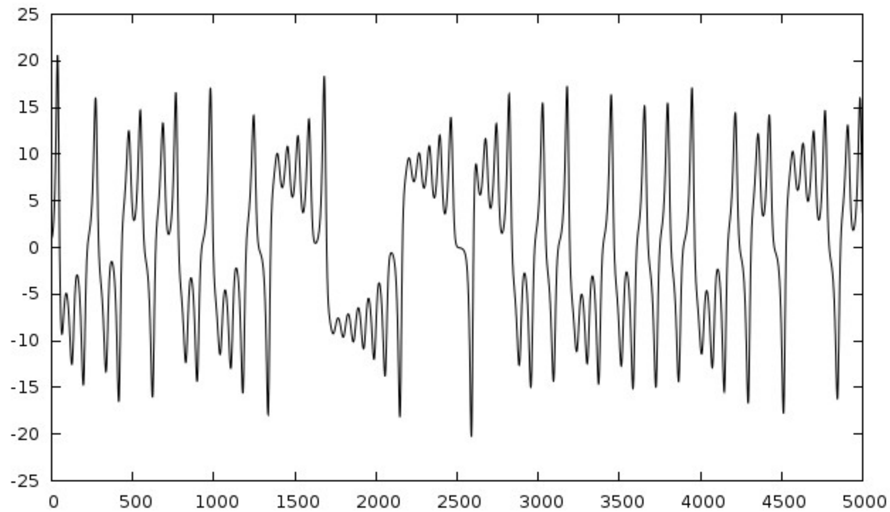

Figura 6. Gráfica de la solución numérica del sistema de Lorenz para la componente x. La unidades de tiempo en el eje horizontal son arbitrarias.

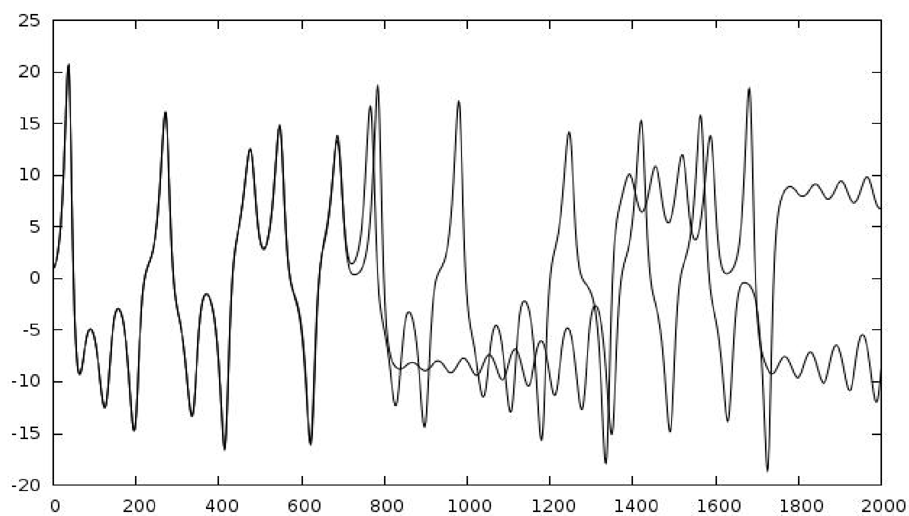

Figura 7. La sensibilidad en las condiciones iniciales se ilustra en esta gráfica. Dos condiciones iniciales con una diferencia de 0.001 en el eje horizontal evolucionan de manera cercana al principio y a partir, aproximadamente, del valor 700 divergen de manera exponencial en promedio. Las unidades de tiempo son arbitrarias.

Lorenz llamó a este fenómeno «sensibilidad en las condiciones iniciales». Esta sensibilidad es la huella digital de un *fenómeno caótico*. De hecho, para fines prácticos se puede tomar como la definición de *caos*[3]. Una función es caótica si es periódica pero con periodo infinito. Recordemos

[3]Formalmente se tienen que satisfacer otras dos condiciones: transitividad topológica y densidad de órbitas inestables, que se pueden consultar en el libro de Devaney [2].

que una función tiene periodo T si su gráfica se repite cada T unidades de tiempo. Estas funciones son predecibles pues para conocer su valor en cualquier instante, basta considerar el valor de la abscisa módulo el periodo, lo que a su vez se puede hacer si se conocen los valores de la función en un intervalo igual al periodo. Al tener el caos periodo infinito, se requiere información infinita para poder predecir sus valores futuros. Dado que esto es imposible, el caos es, simultáneamente, determinista e impredecible en el largo plazo.

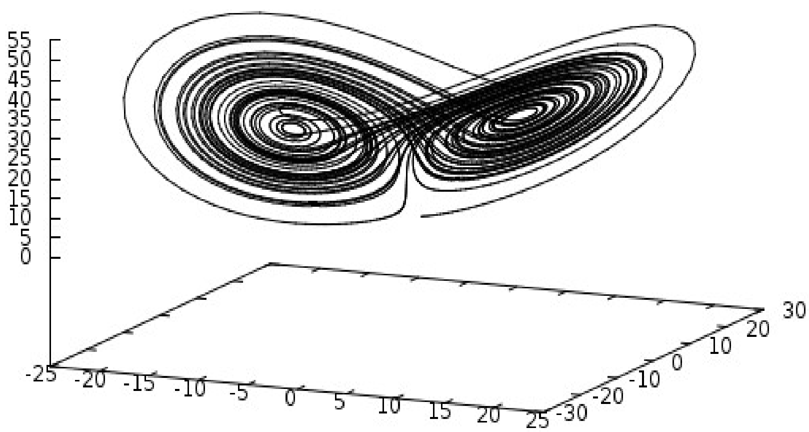

Figura 8. La «mariposa». Está figura representa el atractor del sistema de Lorenz en su régimen caótico.

En la figura 8 se aprecian las trayectorias en el espacio fase completo. Las trayectorias que son la solución del sistema de Lorenz, no pueden salir de un conjunto compacto en el espacio pero tampoco pueden cruzarse pues ello implicaría que en un instante existirían dos elementos del campo vectorial asociados en un mismo punto del espacio, lo que querría decir que existirían dos posibles futuros para un mismo presente y ello es imposible [4]. La única manera que una trayectoria diferenciable permanezca sin cruzarse en el compacto hasta el infinito es teniendo geometría fractal. Aquí no se abundará en esta propiedad de las soluciones de ciertos sistemas dinámicos pero vale la pena comentar que el atractor de Lorenz tiene una dimensión de Hausdorff de aproximadamente 2.06. De manera coloquial se puede decir que es demasiado

[4]Un argumento más formal es que el sistema de Lorenz satisface el teorema de existencia y unicidad.

«gordo» para ser una superficie pero que no le alcanza para ser un sólido. Un conjunto atractor de un sistema dinámico en un régimen caótico se llama *atractor extraño*.

Con un poco de imaginación, se puede encontrar en el atractor de Lorenz la forma de una mariposa. Como se vio arriba, en este sistema tenemos la propiedad de sensibilidad en las condiciones iniciales. Esta situación llevó a Lorenz a enunciar la muy famosa metáfora del «efecto mariposa» [6]: el aleteo de una mariposa en el Amazonas puede constituir una diferencia en las condiciones iniciales de la dinámica atmosférica, diferencia que se amplifica y que eventualmente puede ser la razón de que haya un tornado en Texas.

6. Las predicciones

En la física se trabaja acotando y simplificando las ecuaciones generales que describen la dinámica de los fluidos. Se van eliminando términos dependiendo del caso de estudio específico que el investigador tenga en sus manos. Por ejemplo, si la escala espacial es pequeña, se puede despreciar el término del efecto de Coriolis. Si el líquido es incompresible, los términos que incluyan la derivada de la densidad se anulan. Este proceso continúa hasta que se tiene un sistema de ecuaciones manejable desde el punto de vista matemático y que capture la esencia del fenómeno que se está modelando. Este fue el procedimiento de Lorenz. Arrancó con una versión simplificada del modelo de Saltzman, que a su vez es una simplificación de Navier–Stokes, y lo redujo hasta tener un sistema no lineal de tres ecuaciones diferenciales ordinarias en tres dimensiones. ¿Son válidas las conclusiones después de tal reducción en la complejidad del aparato matemático? La respuesta es positiva pero con una condición: siempre y cuando nos restrinjamos al margen que nos dejen las hipótesis simplificadoras. Si hablamos del modelo de Lorenz podremos tener la confianza de que sus resultados reproducen cualitativamente el comportamiento de las corrientes de convección en la interacción océano – atmósfera. Tenemos comprobaciones experimentales en modelos a escala en el laboratorio, de modo que podemos llegar a una conclusión muy fuerte —que ya sabía Lorenz— el fenómeno del estado del tiempo es intrínsecamente impredecible. ¿Quiere esto decir que los meteorólogos deben buscarse otro empleo? No, afortunadamente la respuesta es negativa. El caos determinista es un fenómeno muy peculiar: es determinista y es impredecible pero tiene regularidades que se pueden encontrar si se busca bien. Una de las regularidades es que dos condiciones iniciales divergen entre sí a velocidad exponencial. El parámetro que multiplica a la variable temporal en el argumento de la exponencial se llama *exponente de Liapunov*. Dado que es la tasa instantánea de divergencia, su recíproco nos proporciona un tiempo característico llamado *el tiempo de Liapunov*. Este tiempo característico nos da una medida del rango temporal en el cual se pueden hacer predicciones buenas en un sistema caótico, un *horizonte de predictibilidad*. En 1989 se demostró que el sistema solar planetario es caótico [4]. Esto significa que una pequeña perturbación (posiblemente debida a la resonancia de los planetoides) provoque un «efecto mariposa» y un planeta caiga al sol, o se fugue del sistema o choque con otro. Sin embargo, el horizonte de predictibilidad para nuestro sistema es del orden de 200 millones de años y sabemos que en los próximos 200 millones de años no se materializará ningún presagio funesto. Volviendo al tiempo, el horizonte en este caso es del orden de cuatro días. Los meteorólogos seguirán siendo indispensables en nuestra sociedad pues una gran cantidad de eventos humanos se dan en lapsos de esta duración. Vuelos, expediciones, eventos políticos o deportivos, necesitan predicciones confiables y los meteorólogos lo hacen, dentro de las restricciones que les impone el caos, cada vez mejor.

Bibliografía

[1] P. Bergé, Y. Pomeau y C. Vidal, *Order within chaos: Towards a deterministic approach to turbulence*, New York: John Wiley & Sons, 1984.

[2] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Westview Press, 2003.

[3] R. C. Hilborn, *Chaos and nonlinear dynamics: An introduction for scientists and engineers*, Oxford University Press, 2000.

[4] J. Laskar, «Large-scale chaos in the solar system», *Astronomy and Astrophysics*, vol. 287, 1994, 9–12.

[5] E. N. Lorenz, «Deterministic nonperiodic flow», *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20 (2), 1963, 130–141.

[6] ———, *The essence of chaos*, Washington University Press, 1993.

[7] S. C. Riser y M. S. Lozier, *Rethinking the gulf stream*, Scientific American. Febrero, 2013.

[8] B. Saltzman, «Finite amplitude free convection as an initial value problem-i», *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 19 (4), 1962, 329–341.