MOTIVANDO UN PRODUCTO ESCALAR

Por Humberto Madrid de la Vega*

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (el campo de los números reales). Un producto escalar sobre V es una función $\langle\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0$ si y solo si $x = 0$

(b) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

(c) $\langle \alpha x + \beta x', y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle x',y\rangle$

para todo $x, x', y \in V$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Dos de los ejemplos más comunes de producto escalar son:

1) Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

si $x = (x_1,\ldots,x_n)$; $y = (y_1,\ldots,y_n)$

2) Sea $C_{[a,b]}$ el espacio vectorial de funciones continuas $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f, g \in C_{[a,b]}$, sea

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\ g(x)\ dx$$

Observese que si $k = (k_1,\ldots,k_n)$ es un vector no-cero de $\mathbb{R}^n$ tal que $k_i \geq 0$ para toda $i=1,2,\ldots,n$, la función $\langle x,y\rangle_k = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i y_i$ define un producto

* Profesor de Carrera de la Facultad de Ciencias, UNAM.

escalar en R^n. En particular si $k_i = 1$ para toda $i = 1,2,\dots,n$, se obtiene el producto escalar usual en R^n (ver ejemplo 1); y si k es un real no-cero, $k = k_i$ para toda i, se tiene que $\langle x,y\rangle_k = \sum_{i=1}^{n} k\, x_i y_i = k(x, y)$ define un producto escalar en R^n ((x, y) denota el producto escalar usual en R^n).

La presente nota tiene como objeto motivar el producto escalar del ejemplo 2) a partir de la observación anterior.

Sea $a_1,\dots,a_n$ un número finito de puntos distintos de R y sea V_n el conjunto de las funciones $f:\{a_1,\dots,a_n\} \longrightarrow R$. V_n es un espacio vectorial de dimensión n sobre R (una base está dada por las funciones $f_i(a_i) = 1$, $f_i(a_j) = 0$ $i \neq j$, $i = 1,2,\dots,n$)) el cual bajo la correspondencia $V_n \longrightarrow R^n$
$f \longrightarrow (f(a_1),\dots,f(a_n))$ es isomorfo a R^n.

Si $k = (k_1,\dots,k_n) \neq 0$ es un vector fijo en R^n. con $k_i \geq 0$ para toda i, la función $\langle f,g\rangle_k = \sum_{i=1}^{n} k_i f(a_i) g(a_i)$ define un producto escalar en V_n.

Sea $C_{[a,b]}$ el espacio vectorial del ejemplo 2, $a = x_1,\dots,x_n = b$ una partición de $[a,b]$ y sea V_n el espacio vectorial de funciones $\tilde{f}$ las cuales son restricción a $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de elementos de $C_{[a,b]}$.

(ver figura 1).

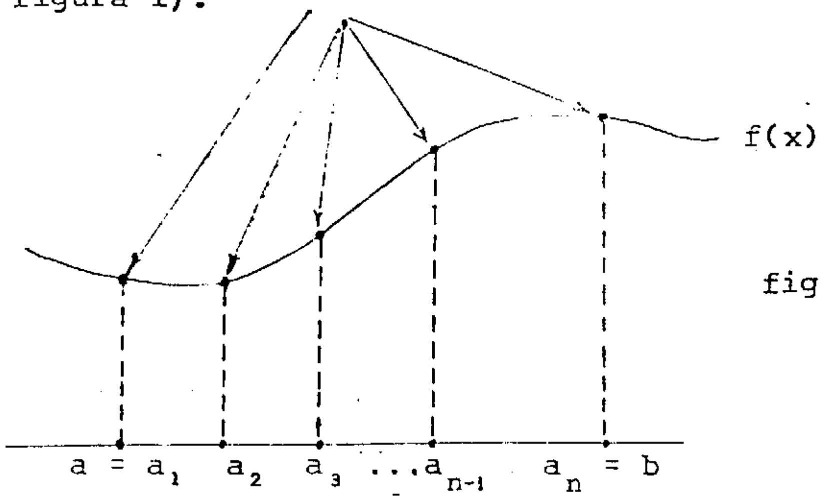

fig. 1

Obsérvese que desde un punto de vista informal, si n "crece", $\tilde{f} \in V_n$ se aproxima a f y por lo tanto V_n se "parece" más a V.

Sea ΔX el vector de R^n cuyas coordenadas son $\Delta X_i = x_i - x_{i-1}$. Asociado a este vector se tiene el producto escalar en V_n: $\langle \tilde{f},\tilde{g}\rangle_{\Delta X} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}(x_i)g(x_i)\Delta X_i$

La parte de la derecha de ésta expresión es una aproximación a $\int_a^b f(x)g(x)dx$ y si $n \longrightarrow \infty$, mejor es la aproximación a la integral.

Así, resulta natural definir en $C_{[a,b]}$ el producto escalar como expresado en el ejemplo 2.