

SOLUCION DE UN PROBLEMA CON FRONTERA MOVIL
PARA LA ECUACION DE ONDA USANDO EL METODO
DE LAS ESCALAS MULTIPLES.

Catherine García Reimbert*

Introducción.

El propósito de este trabajo es el de presentar una aplicación del método de dos tiempos, también conocido como método de las escalas múltiples a un problema de propagación de ondas.

El problema es el de estudiar las modulaciones que se producen en una cuerda vibrante cuando uno de sus extremos se mueve lentamente en comparación con uno de los períodos naturales.

Antes de resolver el problema, se describe el método de dos tiempos y se motiva su forma a partir de ejemplos simples, cuya solución exacta se conoce. Desde luego, estos resultados son conocidos y se hace referencia a ellos.

Una vez que se tiene confianza con el método, se procede a usarlo en el problema de la cuerda. Se obtienen soluciones aproximadas para varias modulaciones y se estudian en detalle algunos ejemplos

*Investigadora del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas. Universidad Nacional Autónoma de México.

numéricos. El resultado central desde el punto de vista teórico, que es la invariancia adiabática del cociente densidad de energía/frecuencia, se establece directamente a partir del método de escalas múltiples. Este resultado es conocido en la teoría de cavidades resonantes [8], sin embargo, nunca se ha usado el método de escalas múltiples para derivarlo en este contexto, permitiendo una mejor comprensión de la situación.

Finalmente, se da una estimación para el error que se comete al usar el método aproximado. Esta estimación involucra una nueva identidad de energía para la ecuación de onda obtenida usando el método de los multiplicadores.

Siendo este un artículo expositivo y un ejemplo del método se ha tomado mucho cuidado en la discusión de las motivaciones y en el desarrollo bastante detallado de los cálculos.

Varios de los resultados son nuevos en este contexto: por ejemplo la estimación de energía y el uso del método de escalas múltiples para problemas de frontera móvil.

Finalmente quiero agradecer a los doctores J. Ize, A.A. Minzoni y F. Sabina las fructíferas observaciones y discusiones sobre este problema.

I N D I C E

- I. Planteamiento del problema y descripción del método de solución.
- II. El problema del péndulo de longitud variable.
 - II. 1). Solución exacta y su desarrollo asintótico.
 - II. 2) Solución usando el método de escalas múltiples.
 - II. 3). Invariante adiabático para el péndulo.
- III. Problema de la cuerda con longitud variable.
 - III. 1). Solución exacta en un caso particular.
 - III. 2). Solución por el método de escalas múltiples.
 - III. 3). Ejemplos numéricos.
- IV. Estimación del error.

Apéndice

Referencias

1. Planteamiento del problema y descripción del método de solución.

Se tiene una cuerda de longitud l , que inicialmente está fija en los extremos a y b , y está vibrando. Su desplazamiento transversal es $u(x,t)$ en el punto x y al tiempo t . Al considerar que estos desplazamientos son pequeños tenemos que u satisface la ecuación de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1)$$

donde los subíndices indican derivadas parciales con respecto a la variable correspondiente y c es la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda.

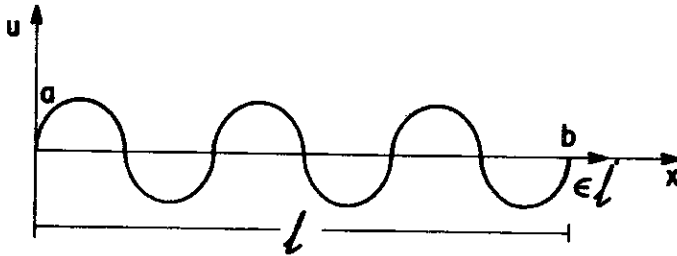


FIG. 1

Las condiciones iniciales del problema son:

$$u(x,0) = \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \quad , \quad u_t(x,0) = 0$$

donde n es el número de nodos, y las condiciones de frontera son $u(0,t)=0$ $u(\ell,t) = 0$ es decir la cuerda está fija. La solución de este problema clásico es bien conocida, usando por ejemplo el método de separación de variables proponiendo una solución $u = X(x)T(t)$ como producto de dos funciones una en x , otra en t , encontramos que la constante de separación es $\nu = \frac{n\pi}{\ell}$ y la solución es

$$u = \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{cn\pi}{\ell} t$$

(En el caso de datos iniciales arbitrarios, desarrollándolos en series de

Fourier, la solución será una serie con término general de la misma forma que en el problema que consideramos aquí). Ahora, ¿qué pasa si movemos la frontera? es decir, ¿si movemos la cuerda en el extremo b? En primer lugar, el problema ya no se puede resolver por separación de variables, ya que la longitud de la cuerda va a cambiar y la constante de separación " deja de ser constante.

Para plantear el problema consideramos un movimiento en la frontera de la forma

$$\ell(\tau) = \ell_0 + \delta f(\tau) \quad (2)$$

donde ℓ_0 es la longitud inicial cuando $t=0$, $f(\tau)$ es la perturbación en el lado b, y δ su amplitud. Tendremos esperanza de resolver el problema cuando el cambio de longitud en la cuerda es lento. Esto se refleja en la variable $\tau = \epsilon t$; donde ϵ es pequeño.

Debido a que el cambio es lento y por analogía con otros sistemas mecánicos, esperamos la existencia de invariantes adiabáticos. Estos invariantes son combinaciones de las variables dinámicas que permanecen prácticamente constantes durante el movimiento. La palabra adiabático, que viene del griego, quiere decir impenetrable, se toma de la termodinámica cuando se efectúan procesos adiabáticos, es decir sin transferencia de calor, siendo estos procesos lentos; la analogía está hecha con la lentitud del cambio.

Para resolver el problema se propone una solución parecida a la que se obtiene por separación de variables, de forma tal que cuando $\epsilon \rightarrow 0$ la solución tienda a la del problema sin perturbar. La solución propuesta es el desarrollo asintótico dado por:

$$u(x,t) = F(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell(\tau)} + \epsilon u_1 + \dots \quad (3)$$

y se satisfacen condiciones iniciales y condiciones de frontera. Sustituyendo (3) en la ecuación de movimiento (1) y después de agrupar términos de mismo orden en ϵ , a primer orden queda:

$$F''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{\ell^2(\tau)} F(t) = 0 \quad (4)$$

la cual resolveremos por el método de escalas múltiples. Esta ecuación puede establecerse en otro contexto como lo veremos a continuación.

II. El problema del péndulo de longitud variable.

Se estudia el movimiento de un péndulo cuya longitud cambia lentamente. La ecuación de este movimiento [3] es:

$$\frac{d}{dt} (\ell^2 \theta') = -g \ell \operatorname{sen} \theta$$

o sea:

$$\ell \theta'' + 2\epsilon \theta' + g \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (5)$$

donde ℓ su longitud varía linealmente como $\ell = \ell_0 + \epsilon t$, ℓ_0 es la

longitud inicial para $t=0$, g es la aceleración de la gravedad, θ el ángulo formado con la vertical, ε es un parámetro pequeño que es proporcional a la velocidad a la cual se acorta o alarga el péndulo. La situación se ilustra en la fig. 2.

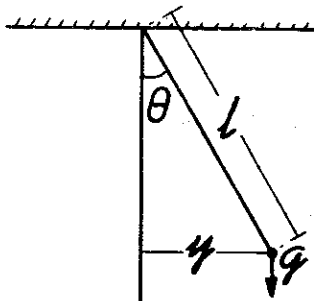


FIG. 2

Si tomamos $y = l\theta$, es decir, oscilaciones pequeñas, se tiene que $y' = l\theta' + \varepsilon\theta$, $y'' = l\theta'' + 2\varepsilon\theta'$ por lo que (5) se puede reescribir como:

$$l(\theta'' + \frac{2\varepsilon\theta'}{l} + \frac{g}{l}\theta) = y'' + \frac{g}{l}y = 0$$

y vamos a resolver la ecuación

$$y'' + \frac{g}{l_0 + \varepsilon t}y = 0 \tag{6}$$

esto es, cuando l varía linealmente.

II. 1) Solución exacta y su desarrollo asintótico.

Para resolver (6) hacemos el cambio de variable

$z = l_0 + \varepsilon t$ y tomamos $\frac{d}{dt} = \varepsilon \frac{d}{dz}$; $\frac{d^2}{dt^2} = \varepsilon^2 \frac{d^2}{dz^2}$, por lo que (6) nos

queda como

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{g}{\epsilon^2 z} y = 0 \quad (7)$$

Por otra parte, nos fijamos en la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{2(\alpha - \beta \nu) + 1}{z} \frac{du}{dz} + \{ \beta^2 \gamma^2 z^{2\beta - 2} + \frac{\alpha(\alpha - 2\beta \nu)}{z} \} u = 0 \quad (8)$$

cuya solución sabemos [9] que está dada por

$$u = z^{\beta \nu - \alpha} C_{\nu}(\gamma z^{\beta}) \quad (9)$$

C es una función Cilíndrica de orden ν ; podemos igualar los coeficientes de (7) y (8) para obtener los valores de los índices α, β, γ , y ν así

$$2(\alpha - \beta \nu) + 1 = 0 \quad 2\beta - 2 = -1, \quad \alpha(\alpha - 2\beta \nu) = 0 \quad \text{y} \quad \beta^2 \gamma^2 = \frac{g}{\epsilon^2};$$

de estas cuatro ecuaciones, con cuatro incógnitas, que se resuelven fácilmente, obtenemos los valores para las dos soluciones, una con $\alpha=0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon}$ y $\nu = 1$, y la otra con $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon}$, $\nu = -1$. Ahora, podemos escribir, sustituyendo estos valores en (9) la solución de (7) como :

$$y = A z^{1/2} C_1\left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} z^{1/2}\right) + B z^{1/2} C_{-1}\left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} z^{1/2}\right) \quad (10)$$

escribiendo estas funciones cilíndricas en términos de las funciones Bessel usuales, a partir de las relaciones

$$C_1 = nJ_1 + mY_1, \quad C_{-1} = nJ_{-1} + mY_{-1} \quad [9 \text{ pag. } 83] \quad (11)$$

y considerando $J_{-1} = -J_1$ y $Y_{-1} = -Y_1$, [9 pags. 15 y 59] la solución

(10), en términos de $\ell(\epsilon t)$ es :

$$\dot{y} = \ell^{1/2} (C J_1(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \ell^{1/2}) + D Y_1(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \ell^{1/2})) \quad (12)$$

con C y D coeficientes constantes. Como estamos interesados en el comportamiento de y cuando $\epsilon \rightarrow 0$ encontramos el desarrollo asintótico de y. Para ello, usamos los desarrollos asintóticos de $J_1(z)$ y $Y_1(z)$ con argumento $z = \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \ell^{1/2}$, que tienen la forma

$$J_1(z) \sim (\frac{2}{\pi z})^{1/2} [\cos(z - \frac{3}{4}\pi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (1, 2m)}{(2z)^{2m}} - \text{sen}(z - \frac{3}{4}\pi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (1, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}}] \quad (13)$$

y

$$Y_1(z) \sim (\frac{2}{\pi z})^{1/2} [\text{sen}(z - \frac{3}{4}\pi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (1, 2m)}{(2z)^{2m}} - \cos(z - \frac{3}{4}\pi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (1, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}}] \quad (14)$$

donde $(1, m) = \Gamma(\frac{3}{2} + m) / m! \Gamma(\frac{3}{2} - m)$, [9, pag. 199]

Con el fin de comparar con resultados posteriores es conveniente escoger

$$C = A (\frac{\pi \sqrt{g}}{\epsilon})^{1/2} \cos(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \ell_0^{1/2} - \frac{3\pi}{4} + \frac{\theta_0}{\epsilon}) \quad (15)$$

$$D = A \left(\frac{\pi \sqrt{g}}{\epsilon} \right)^{1/2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \ell^{1/2} - \frac{3\pi}{4} + \frac{\theta_0}{\epsilon} \right) \quad (16)$$

con A y θ_0 dependientes de ϵ . Así, el desarrollo asintótico de la solución lo obtenemos, sustituyendo (13), (14), (15) y (16) en (12) y reemplazando z por su valor, obtenemos:

$$y \sim \ell^{1/4} A \left[\cos \left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} (\ell^{1/2} - \ell_0^{1/2}) - \frac{\theta_0}{\epsilon} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (1, 2m) \epsilon^{2m}}{(4\sqrt{g})^{2m} \ell^m} \right. \\ \left. - \operatorname{sen} \left(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} (\ell^{1/2} - \ell_0^{1/2}) - \frac{\theta_0}{\epsilon} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (1, 2m+1) \epsilon^{2m+1}}{(4\sqrt{g})^{2m+1} \ell^{m+1}} \right] \quad (17)$$

Examinemos ahora en detalle la fórmula (17) En primer lugar notamos que la serie obtenida para y no es convergente. Para probarlo usaremos el criterio de Cauchy; es decir, queremos probar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \right| > 1$$

El término α_m está dado por

$$\alpha_m = \frac{(-1)^m (1, 2m) \epsilon^{2m}}{(4\sqrt{g})^{2m} \ell^m}$$

y dividiendo dos términos consecutivos de la serie ,

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} = - \frac{(1, 2m+2) \epsilon^2}{(4\sqrt{g})^2 (1, 2m) \ell} \quad (18)$$

que reescribiendo (18) en términos de funciones Γ , usando la relación

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ nos queda

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} = - \frac{\epsilon^2}{16g\ell} \frac{(3/2 + 2m + 1)(3/2 + 2m)(3/2 - 2m - 1)(3/2 - 2m - 2)}{(2m+1)(2m+2)}$$

$$= - \frac{\epsilon^2}{16g\ell} \frac{((2m + 1)^2 - 9/4)(2m + 3/4)(2m + 1/2)}{(2m+1)(2m+2)}$$

la serie es alterna, pero $|\alpha_{m+1}| > |\alpha_m|$ para m grande, no tenemos convergencia.

Nos preguntamos pues qué utilidad tiene esta serie divergente.

Como estamos interesados en representar a la función $y(t)$ para ϵ pequeño vemos [9 , pag. 209] que al truncar las series en $m=q$ el error que se comete es menor y del mismo signo que el término $q+1$ y tiende a cero si $\epsilon \rightarrow 0$. Es decir la aproximación mejora como una función de ϵ y no de m . Es por esto que la falta de convergencia de la serie como función de m no es relevante para nuestro problema. Este tipo de convergencia se llama asintótica.

II. 2). Solución por el método de escalas múltiples.

Queremos una solución que sea válida para tiempos grandes [7] y suponemos que existe una representación asintótica de la solución a la ecuación (6), $y(t)$ dada por

$$y(t) = y_0(\tau, \eta) + \epsilon y_1(\tau, \eta) + \dots$$

Nos hemos dado cuenta que en el problema existen dos tiempos, uno lento con

el cual varía la longitud, y otro rápido, el de la oscilación; $\tau = \epsilon t$ es el tiempo lento, la solución exacta nos sugiere que y_0 se tome como:

$$y_0(\tau, \eta) = A(\tau) \cos \frac{\theta(\tau)}{\epsilon} \quad (19)$$

y queremos además que $y_1 = 0(1)$; $\eta = \frac{\theta(\epsilon t)}{\epsilon}$ se toma así para que la frecuencia de oscilación ω sea de $0(1)$, $\omega = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta(\epsilon t)}{\epsilon} \right) = \dot{\theta}$, donde $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau}$

Esta aproximación

$$y(t) = A(\tau) \cos \frac{\theta(\tau)}{\epsilon} + \epsilon \bar{y}_1(t) \quad (20)$$

se sustituye en nuestra ecuación (6).

Antes de dar el resultado es útil notar la forma de y' , y'' , etc. que están dadas por

$$y'(t) = \epsilon \dot{A} \cos \frac{\theta}{\epsilon} - A \dot{\theta} \sin \frac{\theta}{\epsilon} + \epsilon \bar{y}'_1 \quad \text{donde } \dot{A} = \frac{d}{d\tau} A(\tau), \quad \tau = \epsilon t \quad (21)$$

$$y''(t) = \epsilon^2 \ddot{A} \cos \frac{\theta}{\epsilon} - 2\epsilon \dot{A} \dot{\theta} \sin \frac{\theta}{\epsilon} - \epsilon A \ddot{\theta} \sin \frac{\theta}{\epsilon} - A \dot{\theta}^2 \cos \frac{\theta}{\epsilon} + \epsilon \bar{y}''_1$$

Substituimos ahora (21) en (6) y agrupando términos de potencias iguales de ϵ , obtenemos

$$Ly = \left(\frac{g}{\ell} - \dot{\theta}^2 \right) A \cos \frac{\theta}{\epsilon} + \epsilon (L\bar{y}_1 - (2\dot{A}\dot{\theta} + A\ddot{\theta}) \sin \frac{\theta}{\epsilon} + \epsilon^2 \ddot{A} \cos \frac{\theta}{\epsilon}) = 0 \quad (22)$$

donde, $Ly = y'' + \frac{g}{\ell} y$

Una manera de satisfacer (22) es igualando a cero los

coeficientes de las varias potencias de ϵ independientemente. Obtenemos así a primer orden

$$\dot{\theta}^2 = g/l \quad \text{de donde}$$

$$\theta(\tau) = \theta_0 + 2\sqrt{g} (\ell^{1/2} - \ell_0^{1/2}) = \theta_0 + \tilde{\theta} .$$

Igualando a cero los términos de orden ϵ tenemos

$$\bar{y}_1'' + g/l \bar{y}_1 = (2\dot{A}\dot{\theta} + A\ddot{\theta}) \text{ sen } \theta/\epsilon \quad (23)$$

que nos da una ecuación para \bar{y}_1 en términos de A y θ . Observamos que el lado derecho de (23) tiene la misma frecuencia que la del oscilador ya que $\dot{\theta}^2 = g/l$. Es decir, \bar{y}_1 representa una oscilación forzada a la frecuencia natural. Por esto, para evitar su crecimiento debemos de tomar

$$2\dot{A}\dot{\theta} + A\ddot{\theta} = 0. \quad (24)$$

En el caso contrario, el lector puede convencerse resolviendo (23) por variación de parámetros que \bar{y}_1 crece y en este caso la aproximación

$$y = y_0 + \epsilon \bar{y}_1$$

ya no es buena, ya que el término $\epsilon \bar{y}_1$ que era pequeño inicialmente crece con el tiempo hasta comparar con y_0 . Este proceso se llama el de eliminación de términos seculares y para su descripción completa referimos al lector a los libros de Lin y Siegel [5 , pag. 329)] y Nayfeh [7 , pag. 25].

Integrando (24) tenemos

$$A^2 \dot{\theta} = \text{constante}$$

de donde

$$A(\tau) = A_0 \ell^{1/4} \quad (25)$$

donde A_0 es una constante arbitraria. Finalmente tenemos

$$y_0 = A_0 \ell^{1/4} \cos(\theta/\epsilon + \theta_0/\epsilon).$$

Buscamos ahora una solución para \bar{y}_1 en la forma

$$\bar{y}_1 = y_1 + \epsilon \bar{y}_2 \quad \text{con} \quad y_1 = A_1(\tau) \cos \frac{\theta_1}{\epsilon}$$

entonces: $L(y) = \epsilon \left(\frac{g}{\ell} - \dot{\theta}_1^2 \right) A_1 \cos \frac{\theta_1}{\epsilon} + \epsilon \left\{ L\bar{y}_2 - (2\dot{A}_1 \dot{\theta}_1 + A_1 \ddot{\theta}_1) \sin \frac{\theta_1}{\epsilon} + \ddot{A} \cos \frac{\theta}{\epsilon} \right\} + \epsilon^2 \ddot{A} \cos \frac{\theta}{\epsilon}$; procediendo de manera análoga, obtenemos

$\dot{\theta}_1^2 = \frac{g}{\ell}$ como lo hicimos para y_0 , pudiendo nuevamente resolver ahora para $\theta_1 = \theta + \text{cte}$, esta constante se escoge de tal manera que tengamos una relación sencilla entre $\cos \frac{\theta_1}{\epsilon}$ y $\sin \frac{\theta}{\epsilon}$ para poderlos agrupar, y comparar así con la solución exacta. Tomamos pues

$$\theta_1 = \theta + \frac{\pi\epsilon}{2},$$

por lo tanto, $\cos \frac{\theta}{\epsilon} = \sin \frac{\theta_1}{\epsilon}$, $\cos \frac{\theta_1}{\epsilon} = -\sin \frac{\theta}{\epsilon}$; que en $L(y)$, esto nos permite obtener la ecuación para A_1 , de los términos en ϵ^2

$$2\dot{A}_1 \dot{\theta} + A_1 \ddot{\theta} - \ddot{A} = 0 \quad (26)$$

multiplicando por $\dot{\theta}$ y sustituyendo por su valor obtenido anteriormente se tiene

$$2\dot{A}_1 \frac{g}{\ell} - \frac{A_1 g}{2\ell^2} = \ddot{A} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

de donde

$$\dot{A}_1 - \frac{A_1}{4\ell} = \frac{\ddot{A}}{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} = (A_1 \ell^{-1/4})' \ell^{1/4}$$

es decir

$$(A_1 \ell^{-1/4})' = \frac{1}{2\sqrt{g}} \ell^{1/4} \ddot{A} \quad (27)$$

ahora, reemplazando A por su valor (25) y derivando dos veces con respecto a τ , nos queda

$$\ddot{A} = -\frac{3}{4^2} A_0 \ell^{-7/4}$$

por lo que en (26) e integrando obtenemos, escogiendo la constante de integración como θ ,

$$A_1 \ell^{-1/4} = \frac{3}{16} \frac{A}{\sqrt{g}} \ell^{-1/2}$$

de donde

$$A_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{A}{\sqrt{g}} \ell^{-1/4}$$

Ahora ya podemos obtener ϵy_1 ,

$$\epsilon y_1 = \epsilon A_1 \cos \frac{\theta_1}{\epsilon} = -A \ell^{1/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0 + \tilde{\theta}}{\epsilon}\right) \frac{(-1)^0 (1,1)\epsilon}{4\sqrt{g}\ell^{1/2}}$$

donde $(1,1) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) / \Gamma\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{3}{4}$

Escogemos $\bar{y}_2 = A_2(\tau) \cos \frac{\theta_2}{\epsilon} + \epsilon \bar{y}_3 = y_2 + \epsilon \bar{y}_3$, quedando para $L y$,

$$Ly = \varepsilon^2 \left[\left(\frac{g}{\ell} - \dot{\theta}_2^2 \right) A_2 \cos \frac{\theta_1}{\varepsilon} + \varepsilon (Ly_3 - (2\dot{A}_2 \dot{\theta}_2 + A_2 \ddot{\theta}_2) \sin \frac{\theta_2}{\varepsilon} + \ddot{A}_1 \cos \frac{\theta_1}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 \ddot{A}_2 \cos \frac{\theta_2}{\varepsilon} \Big]$$

y repetimos este procedimiento, escogiendo nuevamente $\dot{\theta}_2^2 = \frac{g}{\ell}$, integramos y tomamos la constante de integración como $\frac{\varepsilon\pi}{2}$, de manera que nos queda

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\varepsilon\pi}{2}$$

y por lo tanto,

$$\cos \frac{\theta_1}{\varepsilon} = \sin \frac{\theta_2}{\varepsilon}, \quad \cos \frac{\theta_2}{\varepsilon} = -\cos \frac{\theta_1}{\varepsilon};$$

la ecuación para obtener A_2 es:

$$2\dot{A}_2 \dot{\theta} + \dot{A}_2 \ddot{\theta} - \ddot{A}_1 = 0$$

que resolvemos en forma análoga a (26), obteniendo

$$(A_2 \ell^{-1/4})' = \frac{1}{2\sqrt{g}} \ell^{1/4} - \ddot{A}_1$$

ya conocemos A_1 , lo reemplazamos por su valor, integramos en el tiempo pudiendo así obtener A_2 , dado por:

$$A_2 = A \ell^{1/4} \frac{(-1)^1 (1,2)}{(4\sqrt{g})^2} \frac{1}{\ell}$$

$$\text{donde } (1,2) = \frac{\Gamma(3/2 + 2)}{2\Gamma(3/2 - 2)} = \frac{15}{2^5}$$

así, ya podemos escribir el tercer término del desarrollo,

$$\epsilon^2 y_2 = -A \ell^{1/4} \cos\left(\frac{\theta_0 + \hat{\theta}}{\epsilon}\right) \frac{(-1)^1 (1,2)}{(4\sqrt{g})^2} \frac{1}{\ell} \epsilon^2$$

Para encontrar los siguientes términos, usaremos inducción, si queremos obtener A_{2m} y A_{2m+1} , suponiendo que conocemos A_{2m-1} , escogemos

$$\dot{\theta}_{2m}^2 = \frac{g}{\ell} \text{ que nos da } \theta_{2m} = \theta_{2m-1} + \frac{\epsilon\pi}{2}$$

$$\text{por lo que } \cos \frac{\theta_{2m}}{\epsilon} = (-1)^m \cos \frac{\theta}{\epsilon}$$

$$\dot{\theta}_{2m+1}^2 = \frac{g}{\ell} \text{ que nos da } \theta_{2m+1} = \theta_{2m} + \frac{\epsilon\pi}{2}$$

$$\text{por lo que } \cos \frac{\theta_{2m+1}}{\epsilon} = -(-1)^m \text{sen } \frac{\theta}{\epsilon}$$

$$\text{y } \cos \frac{\theta_{2m}}{\epsilon} = \text{sen } \frac{\theta_{2m+1}}{\epsilon} ; \quad (28)$$

las ecuaciones para A_{2m} y A_{2m+1} estarán dadas por

$$2\dot{A}_{2m} \dot{\theta} + A_{2m} \ddot{\theta} - \ddot{A}_{2m-1} = 0$$

$$2\dot{A}_{2m+1} \dot{\theta} + A_{2m+1} \ddot{\theta} - \ddot{A}_{2m} = 0 \quad (29)$$

y suponiendo que A_{2m-1} esta dada por,

$$A_{2m-1} = \frac{A \ell^{1/4} (1, 2m-1)}{(4 \sqrt{g})^{2m-1}} \frac{1}{\ell^{m-1/2}} \quad (30)$$

siguiendo el mismo procedimiento que se llevó a cabo para encontrar A_1 , y A_2 , de (28) y (29) encontramos al poner el valor de θ , para A_{2m} y A_{2m+1}

$$(A_{2m} \ell^{-1/4})' = \frac{1}{2 \sqrt{g}} \ell^{1/4} \ddot{A}_{2m-1} \quad (31)$$

y

$$(A_{2m+1} \ell^{-1/4})' = \frac{1}{2 \sqrt{g}} \ell^{1/4} \ddot{A}_{2m}$$

enseguida, derivando (30) dos veces con respecto a τ ,

$$\dot{A}_{2m-1} = \frac{-A(1, 2m-1)}{(4 \sqrt{g})^{2m-1}} (m-3/4) \ell^{-m-1/4}$$

$$\ddot{A}_{2m-1} = \frac{A(1, 2m-1)}{(4 \sqrt{g})^{2m-1}} (m-3/4) (m+1/4) \ell^{-m-5/4}$$

sustituimos en (31), integramos en el tiempo, obteniendo A_{2m} ,

$$A_{2m} = - \frac{A \ell^{1/4}}{(4 \sqrt{g})^{2m}} \frac{(1, 2m-1) (2m+1/2) (m-3/4)}{m} \ell^{-m} \quad (32)$$

por otra parte, la expresión $(1, 2m-1)$ en términos de funciones Γ es

$$(1, 2m-1) = \frac{\Gamma(3/2+2m-1)}{(2m-1)! \Gamma(\frac{3}{2} - 2m+1)} = \frac{1}{(2m-1)!} \frac{\Gamma(3/2 + 2m)}{(\frac{3}{2} + 2m-1) (\frac{3}{2} - 2m) \Gamma(\frac{3}{2} - 2m)}$$

$$= - \frac{m(1, 2m)}{(2m+1/2)(m-3/4)} \quad (33)$$

que sustituimos en (32), por lo que

$$A_{2m} = \frac{A \ell^{1/4}}{(4\sqrt{g})^{2m}} (1, 2m) \ell^{-m}$$

Este valor nos permite encontrar A_{2m+1} , de (31), siguiendo nuestro procedimiento de derivar este valor dos veces con respecto a τ , sustituirlo en la ecuación correspondiente e integrarlo en el tiempo

$$A_{2m+1} = \frac{A \ell^{1/4}}{(4\sqrt{g})^{2m+1}} \left[\frac{-2(m-1/4)(m+3/4)(1, 2m)}{m+1/2} \right] \ell^{-m-1/2} \quad (34)$$

La expresión $(1, 2m+1)$ escrita en términos de funciones Γ es la siguiente

$$(1, 2m+1) = \frac{\Gamma(3/2 + 2m+1)}{(2m+1)! \Gamma(\frac{3}{2} - 2m - 1)} = \frac{-(2m-1/2)(3/2 + 2m)(1, 2m)}{(2m+1)}$$

que es igual a la que se tiene dentro del paréntesis cuadrado de (34) la cual finalmente queda como:

$$A_{2m+1} = \frac{A \ell^{1/4}}{(4\sqrt{g})^{2m+1}} \frac{(1, 2m+1)}{\ell^{m+1/2}} \quad (35)$$

Utilizando las ecuaciones (28), (33) y (35) vemos que la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m(t, \varepsilon t)$$

obtenida por el método de escalas múltiples coincide con el desarrollo asintótico de la solución exacta obtenida en (17). Esto nos prueba que

el método de escalas múltiples efectivamente nos da un desarrollo asintótico de la solución al problema (7). Con $m=0$ tenemos la solución a orden uno que nos da una muy buena aproximación a la solución exacta ya que el error es proporcional a ϵ^2 cuando ϵ es pequeña.

II. 3). Invariante adiabático para el péndulo.

El haber encontrado la solución exacta nos indicó la forma de la solución para el método aproximado. Ahora, el hecho de que se recupere el desarrollo de la solución exacta nos da confianza para usar el método y resolver el caso con una $\ell(\epsilon t)$ general. Proponemos una solución de la forma

$$y(t) = A(\epsilon t) \cos \frac{\theta(\epsilon t)}{\epsilon} + \epsilon y_1 + \dots \quad (36)$$

que representa una oscilación con amplitud modulada $A(\epsilon t)$ y fase $\theta(\epsilon t)/\epsilon$. Sustituimos (36) en la ecuación del movimiento del péndulo

$$y'' + \frac{g}{\ell(\epsilon t)} y = 0$$

resultando de agrupar términos de potencias iguales en ϵ , que a orden uno tenemos la ecuación para encontrar θ

$$[-\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}] A \cos \frac{\theta}{\epsilon} = 0$$

quedando que

$$\dot{\theta}(\epsilon t) = [g/\ell(\epsilon t)]^{1/2}$$

De los términos a orden ϵ , se tiene la ecuación para encontrar $A(\epsilon t)$, en la forma

$$A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta} = 0 \quad (37)$$

Integrando (37) obtenemos

$$A^2\dot{\theta} = \text{cte} \quad (38)$$

La ecuación (38) tiene una interpretación interesante que es la siguiente: nos dice que el producto $A^2\dot{\theta}$ es prácticamente una constante del movimiento, como A^2 está relacionado con la energía $E(t)$ por la fórmula

$$E(t) \frac{1}{2} y'^2(t) + \frac{1}{2} \omega^2 y^2(t) = \frac{1}{2} A^2\dot{\theta}^2 + O(\epsilon) \quad (39)$$

vemos que el cociente

$$E/\omega$$

es constante a orden uno. Este cociente es un invariante adiabático.

El resultado es bien conocido de la mecánica clásica [4]. El recobrar este resultado conocido nos da confianza sobre la validez del método en el caso general.

III. Problema de la cuerda con longitud variable.

Consideremos ahora el problema de las modulaciones en una onda estacionaria en una cuerda cuya frontera se mueve de acuerdo con la ley $l(\epsilon t)$. El problema a resolver es

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad 0 \leq x \leq l(\epsilon t) \quad (40)$$

y las condiciones iniciales se escogen de forma tal que la solución represente un modo normal de oscilación, con la idea de resolver el caso general para series de Fourier.

III.1). Solución exacta en un caso particular.

En primer lugar escogemos una variación $\ell(\epsilon t) = \ell_0 + \epsilon t$ donde ϵ es pequeña y es la velocidad con la que se mueve la frontera. Tratamos pues de encontrar una solución de (40) en la forma

$$u = F(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell_0 + \epsilon t}$$

Obtenemos así a primer orden la ecuación

$$F'' + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{(\ell_0 + \epsilon t)^2} F = 0 \quad (41)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria se resuelve exactamente haciendo un cambio de variable, de $\ell = \ell_0 + \epsilon t$, tenemos que $d\ell = \epsilon dt$, por lo que $\frac{dF}{dt} = \epsilon \frac{dF}{d\ell}$ y $\frac{d^2 F}{dt^2} = \epsilon^2 \frac{d^2 F}{d\ell^2}$ que substituyendo en la ecuación para $F(t)$ nos queda

$$\frac{d^2 F}{d\ell^2} + \frac{k^2}{\epsilon^2 \ell^2} F = 0$$

$$\text{con } k^2 = (cn\pi)^2$$

esta es la ecuación de Euler, cuya solución conocemos, se encuentra fácilmente al hacer nuevamente un cambio de variable, $F = \ell^r$, que para este caso, $r = 1/2 \pm i\sqrt{k^2 - \frac{\epsilon^2}{4}} / \epsilon$ con $k^2 > \epsilon^2/4$ solución para el

radical positivo, quedando,

$$F = A_0 \ell^{1/2} \cos \left(\frac{\sqrt{k^2 - \epsilon^2/4}}{\epsilon} \log \frac{\ell}{\ell_0} + \phi \right) \quad (42)$$

con $|\epsilon| < 2cn\pi$, para $n > 0$. A_0 y ϕ se determinan por las condiciones iniciales a primer orden. De hecho $|\epsilon| < c$ para tener una solución única como se ve fácilmente al usar el método de las características.

III. 2) Solución por el método de dos tiempos.

Para resolver la ecuación (41) por éste método, proponemos una solución como la que empleamos en el caso del pendulo (Sec.II.2):

$$F = A(\epsilon t) \cos \frac{\theta(\epsilon t)}{\epsilon} + \epsilon F.$$

La forma de F' y F'' es la misma que (21). Se sustituye la solución propuesta en la ecuación de movimiento, se agrupan términos en la manera usual obteniendo nuevamente una ecuación de la forma de (22).

De los términos a primer orden obtenemos el valor de θ ,

$$\frac{cn\pi}{\ell} = \dot{\theta}, \text{ como } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\ell} \text{ ya que } d\ell = dt$$

integrando nos queda,

$$\theta = cn\pi \log \frac{\ell}{\ell_0} + \theta_0$$

Los términos a orden ϵ nos permiten encontrar A : multiplicamos la ecuación $2\ddot{A}\theta + A\ddot{\theta} = 0$ por A , reemplazamos $\dot{\theta}$ por su valor arriba obtenido, quedando

$$A = A_0 \ell^{1/2}$$

y la solución queda como

$$A_0 \ell^{1/2} \cos \left[\frac{cn\pi}{\varepsilon} \log \frac{\ell}{\ell_0} + \theta_0 \right]$$

Vemos así que para ε pequeña esta solución coincide a orden uno con (42) ya que

$$\begin{aligned} \cos \left[\frac{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2/4}}{\varepsilon} \log \frac{\ell}{\ell_0} + \phi \right] &= \cos \left[\frac{k}{\varepsilon} \log \frac{\ell}{\ell_0} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8k^2 \sqrt{1 - \sigma \varepsilon^2/4k^2}} \right) + \phi \right] = \\ &= \cos \left[\frac{cn\pi}{\varepsilon} \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \phi \right] \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{64k^2 (1 - \sigma \varepsilon^2/4k^2)} + \dots \right] + \operatorname{sen} \left[\frac{k}{\varepsilon} \log \frac{\ell}{\ell_0} + \phi \right] \\ &\quad \left[\frac{\varepsilon}{8k \sqrt{1 - \sigma \varepsilon^2/4k^2}} + \dots \right] \end{aligned}$$

donde $0 \leq \sigma \leq 1$,

y notando que $\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{\ell}{\ell_0}$ tiende a $\frac{t}{\ell_0}$ si ε tiende a cero.

Finalmente la solución u de (40) tiene la forma

$$u = A_0 \ell^{1/2} \cos \left(\frac{cn\pi}{\varepsilon} \log \frac{\ell}{\ell_0} + \theta_0 \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell(\varepsilon t)}$$

En este caso vemos como el método de escalas múltiples también nos provee una solución para el problema.

Estamos ahora en posición de resolver el problema cuando $\ell(\varepsilon t)$ tiene forma arbitraria:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < \ell(\varepsilon t)$$

$$u(0, t) = 0 = u(\ell(\varepsilon t), t)$$

$$u(x, 0) = A_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_0}$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

donde la condición inicial refleja el planteamiento mas general de series de Fourier.

Basándonos en la experiencia anterior, proponemos una solución de la forma:

$$u(x, t) = A(\varepsilon t) \cos \frac{\theta(\varepsilon t)}{\varepsilon} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell(\varepsilon t)} + \varepsilon u^{(1)}(x, t)$$

Queremos encontrar las funciones A, θ y $u^{(1)}$ con $A(0) = A_0$ y $\theta(0) = 0$ para satisfacer las condiciones iniciales a primer orden; por conveniencia llamamos $\tau = \varepsilon t$, $\phi = \frac{\theta(\varepsilon t)}{\varepsilon}$ y $f(x, \tau) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell(\tau)}$ Usamos la notación

\dot{B} para la derivada, aún parcial, de cualquier función B con respecto a τ . La función $u^{(1)}(x, t)$ debe satisfacer las condiciones de frontera $u^{(1)}(0, t) = u^{(1)}(\ell(\tau), t) = 0$ y las condiciones iniciales

$$u^{(1)}(x, 0) = 0$$

$$u_t^{(1)}(x, 0) = \frac{\dot{\ell}(0)}{\ell^2} A_0 n\pi x \cos \frac{n\pi x}{\ell} - \dot{A}(0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \quad (43)$$

Tenemos entonces, procediendo como se ha dicho en los casos anteriores que:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = A(\tau) f(x, \tau) \cos \phi \left[\dot{\theta}^2(\tau) - \left(\frac{cn \pi}{\ell(\tau)} \right)^2 \right]$$

$$+ \varepsilon \left\{ u_{tt}^{(1)} - c^2 u_{xx}^{(1)} - f(A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta}) \text{sen } \phi - 2\dot{f} A \dot{\theta} \text{sen } \phi \right\}$$

$$+ \varepsilon^2 \left\{ (Af)'' \cos \phi \right\} = 0$$

Es claro que de los términos a primer orden

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{cn \pi}{\ell(\tau)} \right)^2 = \omega^2(\tau) ;$$

en cuanto a la ecuación a orden ε debido a su forma, proponemos para $u^{(1)}$ una solución particular, separando variables, dada por:

$$v^{(1)}(x, t) = f_1(x, \tau) \text{sen } \phi$$

que satisface la condición inicial $v^{(1)}(x, 0) = 0$ y desde luego no tiene por que satisfacer la condición inicial de $u_t^{(1)}$ (43). La dependencia de f_1 con el tiempo se ha escogido en el modo lento en forma tal que al derivar con respecto a t tengamos un factor de ε . Además $f_1(0, \tau) = f_1(\ell(\tau), \tau) = 0$. Entonces:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -\varepsilon \left\{ f_1 \dot{\theta}^2 + c^2 f_{1xx} + f(A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta}) + 2\dot{f} A \dot{\theta} \right\} \text{sen } \phi$$

Como queremos que los términos de orden ε sean cero, debemos resolver:

$$f_{1xx} + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 f_1 = -\frac{(A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta})}{c^2} f - \frac{2A\dot{\theta}}{c^2} \dot{f}$$

que consideramos como una ecuación de segundo orden ordinaria en x , donde τ interviene como un parámetro. Como sabemos que la solución general de la ecuación homogénea es

$$\alpha_0 \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \beta_0 \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

y que $f = \sin \frac{n\pi x}{\ell}$, $\dot{f} = -\frac{n\pi x \dot{\ell}}{\ell^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell}$,

vemos que tenemos un problema de resonancia que se puede resolver ya sea por variación de parámetros o bien proponiendo una solución particular de la forma:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2) \sin \frac{n\pi x}{\ell} + (\beta_1 x + \beta_2 x^2) \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

En ambos casos se comprueba que la solución general es:

$$f_1 = \alpha_0 \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \beta_0 \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{1}{2c^2} \frac{A\dot{\theta}\dot{\ell}}{\ell} x^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{\ell x}{2n\pi c^2} (A\dot{\theta}\frac{\dot{\ell}}{\ell} + A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta}) \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

Si imponemos $f_1(0, \tau) = f_1(\ell, \tau) = 0$ tendremos $\alpha_0 = 0$ y $A\dot{\theta}\frac{\dot{\ell}}{\ell} + A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta} = -\frac{1}{A\ell} (A^2 \ell \dot{\theta}) = 0$ (44)

De donde $A^2 \ell \dot{\theta} = \text{cte}$ y reemplazando $\dot{\theta}$ por su valor obtenido anteriormente

vemos que

$$A^2 \frac{\text{cn}\pi}{\ell} \ell = A_0^2 \frac{\text{cn}\pi}{\ell_0} \ell_0, \text{ entonces } A = A_0$$

Notemos que ésta última condición no es de extrañar ya que el problema

$$v_{xx} + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 v = 0 \quad \text{con } v(0) = v(\ell) = 0$$

tiene como solución $v = v_0 \text{ sen } \frac{n\pi x}{\ell}$ entonces para encontrar una solución a:

$$f_{1xx} + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 f_1 = g(x)$$

necesitamos que $g(x)$ sea ortogonal a v según la alternativa de Fredholm [10] es decir:

$$\int_0^{\ell} g(x)v(x)dx = 0$$

En nuestro problema tenemos que

$$g(x) = -\frac{1}{c^2} (A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta}) \text{ sen } \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{2A\dot{\theta}}{c^2 \ell^2} \frac{n\pi x \ell}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

por lo que

$$\int_0^{\ell} g(x)v(x)dx = -\frac{1}{2c^2} (A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta})\ell - \frac{A\dot{\theta}\ell}{2c^2}$$

Por otra parte la misma alternativa de Fredholm indica que f_1 será única si se escoge de manera tal que

$$\int_0^{\ell} f_1(x)v(x)dx = 0$$

Aquí, para $f_1(x) = \left(\beta_0 + \frac{1}{2c^2} \frac{A \dot{\theta} \ell^2}{\ell} x^2 \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell}$

tenemos que $\beta_0 = -\frac{A_c \ell}{2c} \left(\frac{n\pi x}{3} - \frac{1}{2n\pi} \right)$

Si queremos que $u^{(1)}$ satisfaga la condición inicial apropiada hay que añadir a $v^{(1)}$ una función $w^{(1)}$ que satisfaga

$$w_{tt}^{(1)} - c^2 w_{xx}^{(2)} = 0$$

$$w^{(1)}(x,0) = 0$$

$$w_t^{(1)}(x,0) = -v_t^{(1)}(x,0) + \frac{\ell(0)}{\ell^2(0)} A_0 n\pi x \cos \frac{n\pi x}{\ell} - A(0) \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell}$$

Podemos observar que si en lugar de $u^{(1)}$ tomamos $v^{(1)}$ cometeremos un error de orden ϵ en las condiciones iniciales que a su vez induce un error de orden ϵ^2 en la diferencia de energías entre la solución exacta y la aproximada. Este es de todas maneras el error que esperamos a ese orden por lo que es suficiente tomar

$$u(x,t) = A_0 \cos \varphi \text{ sen} \frac{n\pi x}{\ell} + \epsilon f_1(x,\tau) \text{ sen} \varphi + r(x,t)$$

donde r satisface

$$r_{tt}(x,t) - c^2 r_{xx} = -\epsilon^2 \left[((\Delta f)'' + 2\dot{A}\dot{f}_1 + \ddot{\theta}) \cos \varphi \right] - \epsilon^3 \ddot{f}_1 \text{ sen} \varphi$$

$$r(0, t) = r(\ell(\tau), t) = 0$$

$$r(x, 0) = 0$$

$$r_t(x, 0) = \varepsilon \dot{\ell}(0) A_0 \frac{n\pi}{\ell_0} \left| \frac{x}{\ell_0} \cos \frac{n\pi x}{\ell_0} + \left(\frac{n\pi}{6} - \frac{1}{4n\pi} + \frac{x^2}{2\ell_0^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell_0} \right|$$

Nótese que r_t en $t=0$ precisamente compensa la diferencia $u_t^{(1)} - v_t^{(1)}$ en $t = 0$.

Para estudiar la solución es interesante examinar la energía asociada con ella. Está definido por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell(\varepsilon t)} (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx$$

tomando las derivadas parciales de (45) con respecto al tiempo y a la posición, las cuales están dadas por:

$$u_t = -A_0 \theta \sin \varphi \sin \frac{n\pi x}{\ell} - \varepsilon \left[\frac{n\pi x}{\ell^2} A_0 \cos \frac{n\pi x}{\ell} - \theta f_1 \right] \cos \varphi + 0(\varepsilon^2)$$

$$u_x = A_0 \frac{n\pi}{\ell} \cos \varphi \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \varepsilon f_{1x} \sin \varphi + 0(\varepsilon^2)$$

vemos que

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\ell(\tau)} \left[A_0^2 \left(\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} + \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right)^2 A_0^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \varepsilon (26A_0^2 \frac{n\pi \ell}{\ell^2} x \sin \varphi \cos \varphi \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} - 2\theta^2 A_0 \sin \varphi \cos \varphi \sin \frac{n\pi x}{\ell} f_1 \right.$$

$$\left. + 2c^2 A_0 \frac{n\pi}{\ell} \sin \varphi \cos \varphi \cos \frac{n\pi x}{\ell} f_{1x} \right) + 0(\varepsilon^2) \Big] dx \Big\}$$

de donde al integrar por partes el último término nos queda

$$E(t) = \frac{1}{4} A_0^2 \dot{\theta}^2 \ell + \varepsilon \dot{\theta} A_0^2 \frac{n\pi \ell}{\ell^2} \sin \varphi \cos \varphi \int_0^{\ell} x \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx + O(\varepsilon^2)$$

es decir

$$E(t) = \frac{1}{4} A_0^2 \dot{\theta}^2 \ell + O(\varepsilon) \quad (46)$$

y recordando que en el problema del oscilador armónico la energía entre la frecuencia es un invariante adiabático, vemos que en éste caso se tiene la misma situación, con (44),

$$\frac{E(t)}{\omega(t)} = \frac{1}{4} A_0^2 \dot{\theta} \ell + O(\varepsilon) = \text{cte} + O(\varepsilon)$$

Encontramos de esta forma que también aquí el cociente Energía/frecuencia permanece constante, cuando hay cambios lentos en los parámetros del sistema.

Notemos finalmente que el término en ε en la expresión de la energía coincide con el primer término del producto $-x u_t u_x \frac{\dot{\ell}}{\ell}$. Es decir, si definimos

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell(\varepsilon t)} (u_t^2 + c^2 u_x^2 + 2\varepsilon x u_t u_x \frac{\dot{\ell}}{\ell}) dx \quad (47)$$

entonces

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{4} A_0^2 \dot{\theta}^2 \ell + O(\varepsilon^2) \quad (48)$$

Volveremos a hablar de nuevo sobre esto en la última parte.

Terminaremos esta sección desarrollando otra manera, más sistemática, de obtener el resultado.

Proponemos un desarrollo para u de la forma:

$$u(x,t) = A(\varepsilon t) \cos \varphi \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell(\tau)} + \varepsilon u^{(1)}(\varphi, \tau, x) + r(x,t)$$

donde resaltamos a propósito la dependencia de u en los dos tiempos, el rápido t o equivalentemente φ , y el lento τ . Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= A(\tau) f(x,\tau) \left(\dot{\theta}^2(\tau) - \left(\frac{cn\pi}{\ell(\tau)} \right)^2 \right) \cos \varphi + \\ &\varepsilon \left\{ \dot{\theta}^2 u_{\varphi}^{(1)} - c^2 u_{xx}^{(1)} - \left[f(A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta}) + 2\dot{f}A\dot{\theta} \right] \operatorname{sen} \varphi \right\} + \\ &\varepsilon^2 \left\{ (Af)'' \cos \varphi + 2u_{\varphi\tau}^{(1)} \dot{\theta} + u_{\varphi}^{(1)''} \ddot{\theta} + \varepsilon u_{tt}^{(1)} \right\} + r_{tt} - c^2 r_{xx} \end{aligned}$$

y las condiciones de frontera

$$u^{(1)}(\varphi, \tau, 0) = u^{(1)}(\varphi, \tau, \ell(\tau)) = 0$$

Para las condiciones iniciales tenemos

$$u^{(1)}(0, \tau, x) = 0$$

y nos queda por determinar $u_{\varphi}^{(1)}$. Esto es de esperarse ya que como vimos antes $u^{(1)}$ puede escogerse de dos maneras que dan una diferencia de orden ε en las condiciones iniciales. Podemos escoger $u^{(1)}$ incluyendo $w^{(1)}$ o no. Optamos por obtener el mismo resultado anterior por otro camino.

Para r tenemos que:

$$r_{tt} - c^2 r_{xx} = -\varepsilon^2 \left[(Af)'' \cos \varphi + 2u_{\varphi\tau}^{(1)} \dot{\theta} + u_{\varphi}^{(1)''} \ddot{\theta} + \varepsilon u_{\tau\tau}^{(1)} \right]$$

$$r(0, \tau) = r(\ell, \tau) = 0$$

$$r(x, 0) = 0$$

$$r_{\tau}(x, 0) = -\epsilon \left[\frac{\dot{\ell}(0)}{\ell_0^2} A_0 \sin \frac{n\pi x}{\ell_0} - \dot{A}(0) \cos \frac{n\pi x}{\ell_0} - u_{\varphi}^{(1)}(0, \tau, x) \right]$$

Tenemos nuevamente de los términos a primer orden que

$$\dot{\theta}^2(\tau) = \left(\frac{c n \pi}{\ell(\tau)} \right)^2 = \omega^2(\tau)$$

y de los términos a orden ϵ :

$$\dot{\theta}^2(\theta) u_{\varphi\varphi}^{(1)} - c^2 u_{xx}^{(1)} = [f(x, \tau)(A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta}) + 2\dot{f}(x, \tau) A\dot{\theta}] \sin \phi \quad (49)$$

donde τ es un parámetro.

Como la ecuación homogénea tiene por solución

$$\sin \frac{n\pi x}{\ell(\tau)} \sin \varphi \quad \text{o} \quad \sin \frac{n\pi x}{\ell(\tau)} \cos \varphi$$

es de esperarse que el lado derecho pueda forzar en resonancia al modo normal $\sin \frac{n\pi x}{\ell(\tau)}$. Para investigar esto examinamos el comportamiento de la proyección de $u^{(1)}$ a lo largo del modo normal que nos interesa. Para esto multiplicando esta ecuación (49) por $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$ e integrando en x entre 0 y ℓ vemos que

$$\int_0^{\ell} (u_{\varphi\varphi}^{(1)} + u^{(1)}) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{2\dot{\theta}^2} [(A\ddot{\theta} + 2\dot{A}\dot{\theta})\ell + A\dot{\theta}\ell] \sin \varphi$$

usando $f(x,) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}$ como lo habíamos denotado antes.

Ahora, si llamamos

$$b(\varphi) = \int_0^{\ell} u^{(1)} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

que es la proyección deseada tenemos:

$$b''(\varphi) + b(\varphi) = \frac{1}{2A\dot{\theta}^2} (A^2\dot{\theta}^2 \ell) \cdot \text{sen } \varphi \quad (50)$$

con

$$b(0) = 0$$

$$b'(0) = \int_0^{\ell} u_{\varphi}^{(1)}(0, \tau, x) \text{sen } \frac{n\pi x}{\ell} dx .$$

Esta ecuación es la de un oscilador forzado en resonancia. Es fácil ver que su única solución es

$$b(\varphi) = -\frac{(A^2\dot{\theta}^2 \ell)}{4 A\dot{\theta}^2} (\varphi \cos \varphi - \text{sen } \varphi) + b'(0) \text{sen } \varphi$$

El término proporcional a $\varphi \cos \varphi$ es el efecto de la resonancia. Para tener una solución acotada para φ grande debemos tener $(A^2\dot{\theta}^2 \ell) = 0$. Esta condición es la misma que se obtiene usando la alternativa de Fredholm. De aquí vemos que el uso de la alternativa de Fredholm elimina los términos no acotados.

Debemos pues resolver

$$\dot{\theta}^2 u_{\varphi\varphi}^{(1)} - u_{xx}^{(1)} = A (\ddot{f}\theta + 2 \dot{f}\dot{\theta}) \text{sen } \varphi$$

para esto procedemos de manera análoga a como lo hicimos anteriormente obteniendo $v^{(1)}$ como una solución particular, verificando esto el resultado que ya se había obtenido.

Hacemos notar que en un problema diferente al estudiado en este trabajo es conveniente usar el segundo método ya que es más directo para tener control de los diferentes órdenes de magnitud.

III. 3). Ejemplos numéricos.

Con el fin de ilustrar la forma de la solución, calculamos numéricamente algunos ejemplos:

1) Frontera con movimiento senusoidal.

En este caso tomamos

$$l(\epsilon t) = l_0 + \delta \cos \frac{c}{l_0} \epsilon t$$

que corresponde a un movimiento de vaivén de amplitud δ en la frontera derecha de la cuerda. La solución a primer orden es:

$$u(x,t) = A_0 \cos \left(\frac{1}{3} \int_0^\pi \frac{cn\pi}{l_0 + \delta \cos \frac{c}{l_0} s} ds \right) \left(\sin \frac{n\pi x}{l_0 + \delta \cos \frac{c}{l_0} \epsilon t} \right)$$

Es conveniente antes de graficar $u(x,t)$ examinar su comportamiento. En primer lugar, vemos que la posición de los nodos que son los ceros de la función.

$$\sin \left(\frac{n\pi x}{l_0 + \delta \cos \frac{c}{l_0} \epsilon t} \right)$$

cambia lentamente con el tiempo y de una manera periódica. Esto se observa cuando se juega con una cuerda.

En un punto fijo x vemos que la amplitud de la oscilación - dada por

$$A_0 \left(\sin \frac{n\pi x}{l_0 + \delta \cos \frac{c}{l_0} \epsilon t} \right)$$

donde A_0 es una constante, es una función periódica cuyo periodo es --

$\frac{2 \ell_0}{\epsilon c}$, el cual es muy grande comparado con el período del modo normal libre que es $\frac{2 \ell_0}{cn}$

Finalmente la frecuencia de la oscilación para δ pequeña está dada por

$$\omega = \dot{\theta}(\epsilon t) = \frac{cn\pi}{\ell_0} \left[1 + \frac{\delta}{\ell_0} \cos \frac{c}{\ell_0} \epsilon t \right]$$

Esta es la frecuencia de la oscilación libre modulada periódicamente. Es decir el período de la oscilación completa cambia lentamente con el tiempo y también de una manera periódica.

La descripción cualitativa de la solución que hemos dado la podemos apreciar en la figura 3 para la cual se tomaron los siguientes valores:

- $c = .5\text{m/seg}$ — la velocidad de propagación de la onda en la cuerda.
- $n = 2$ el número de nodos.
- $\ell_0 = 1.0\text{m}$ la longitud inicial de la cuerda
- $\epsilon = .1$ el parámetro pequeño
- $\delta = .5\text{m}$ — amplitud de la perturbación
- t — el tiempo varía de 0 a 120 seg.
- $x = .5\text{m}$ el punto fijo, que se toma por ejemplo con este valor.

En primer lugar notamos en la figura que la amplitud de la onda cambia periódicamente como lo esperabamos. Además el cambio es lento. Se aprecia igualmente que el período (distancia entre dos ceros de la gráfica) también cambia con el tiempo. Este es el efecto de modulación en fre-

cuencia, se ve como los ceros están más separados en la parte izquierda, luego se juntan como se ve en los dos pulsos centrales, para luego volverse a separar. Si estimamos el error, es decir, la magnitud de $\epsilon u^{(1)}$ vemos que es para los parámetros dados de 0.3A0. Esto no es pequeño. La razón por lo que se escogieron estos parámetros fué para que la figura 3 cupiera en una hoja tamaño carta mostrando los efectos deseados. Si escogemos $\epsilon = .05$ tendremos la misma figura, pero extendida sobre un intervalo de tiempo más largo que no resultó conveniente.

Otro caso interesante es cuando el perfil de la frontera está dado por $l(\epsilon t) = l_0 + \delta \tanh \frac{c}{l_0} \epsilon t$. Se consideró el caso $\delta < 0$, que representa un movimiento de acercamiento que termina para tiempos suficientemente largos en $l(\epsilon t) = l_0 + \delta$. Se espera que la solución para tiempos largos sea como una oscilación libre con frecuencia natural $\frac{cn}{l_0 + \delta}$.

La solución para $\theta(\epsilon t)$ que obtuvimos de acuerdo con nuestras fórmulas es:

$$\theta(\epsilon t) = \frac{l_0}{l_0 - \delta} \left\{ cn\pi\epsilon t - n\pi\delta \log \left(\cosh \frac{cn\pi\epsilon t}{l_0} + \frac{\delta}{l_0} \sinh \frac{cn\pi\epsilon t}{l_0} \right) \right\}$$

de donde vemos que cuando t es grande

$$\theta(\epsilon t) \sim \frac{cn\pi}{l_0 + \delta} \epsilon t$$

y por ende, la frecuencia es

$$\omega(\epsilon t) \sim \frac{cn\pi}{l_0 + \delta} \quad (51)$$

En la figura 4, donde los valores tomados fueron los mismos que en el caso anterior, salvo que aquí $n = 3$. Observemos el cero en p, este es debido a que

el punto $x = \ell_0/2$ es un nodo del movimiento, ya que

$$\text{sen } \frac{3\pi}{2} \left\{ \frac{1}{1 - .5 \tanh .05t} \right\}$$

se hace cero para $\tanh .05t = .5$. El hecho de que cuando $t \rightarrow \infty$ la amplitud tiende a cero se debe a que el extremo móvil de la cuerda, donde la amplitud es cero, se vuelve el punto $\ell_0/2$. Notamos además, que la modulación en frecuencia desaparece de acuerdo con lo expresado en (51).

En la figura 5 se tiene la solución calculada para $x = \ell_0/3$. En este caso, cuando $t \rightarrow \infty$ el punto $\ell_0/3$ ya no es un nodo y el resultado es una oscilación con amplitud y frecuencia constantes.

IV. Estimación del error.

Vamos a estimar el error para el método de escalas múltiples en el caso de la cuerda vibrante. Para esto lo que se quiere ver es que la función

$$\varphi(x,t) = A_0 \cos \frac{\theta(\epsilon t)}{\epsilon} \text{sen } \frac{n\pi x}{\ell(\epsilon t)} + \epsilon u \quad (1)$$

donde

$$\theta = \int_0^T \frac{cn\pi}{\ell(s)} ds$$

es una buena aproximación a la solución del problema:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < \ell(\epsilon t) \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\ell(\epsilon t),t) = 0 \quad t > 0$$

$$u(x,0) = A_0 \text{sen } \frac{n\pi x}{\ell_0} \quad 0 \leq x \leq \ell(0)$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \ell(0)$$

Es decir, que $u-\varphi$ es pequeña para tiempos t suficientemente grandes.

Para estimar el error basta tomar la diferencia

$$r = u - \varphi$$

que satisface la ecuación (45b). Por conveniencia la reescribimos:

$$r_{tt} - r_{xx} = \varepsilon^2 h(x,t) \quad 0 < x < \ell(\varepsilon t), \quad t \geq 0$$

$$r(0,t) = r(\ell(\varepsilon t), t) = 0 \quad t \geq 0$$

$$r(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \ell(0)$$

$$r_t(x,0) = \varepsilon \ell(0) z(x) \quad 0 \leq x \leq \ell(0)$$

donde

$$h(x,t) = - \left[(Af)'' + 2\ddot{\theta}f_1 + \ddot{\theta}f_1 \right] \cos \varphi + \varepsilon^3 \ddot{f}_1 \sin \varphi$$

$$z(x) = A_0 \frac{n\pi}{\ell_0} \left[\frac{x}{\ell_0} \cos \frac{n\pi x}{\ell_0} + \left(\frac{n\pi}{6} - \frac{1}{4n\pi} + \frac{x^2}{2\ell_0^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell_0} \right]$$

y dar una cota sobre el crecimiento de r como función del tiempo.

Lo que se necesita es una estimación a priori sobre el crecimiento de la solución. Por tratarse de una ecuación de onda tratamos de estimar la energía de la solución al tiempo t en términos de la energía al tiempo $t=0$. Sin embargo, de esta manera no se obtiene la estimación deseada, ya que como la frontera es móvil aparecen términos de frontera (el trabajo realizado por el agente que mueve la frontera) que no se puede estimar en términos de la energía.

Esto nos hace pensar que en lugar de la energía $E(t)$ debemos de usar $\mathcal{E}(\tau)$, definida en (47), para acotar a priori la solución al problema. El hecho de que en $\mathcal{E}(\tau)$ aparezcan términos cruzados en $u_t u_x$ nos sugiere que debemos multiplicar la ecuación (45b) no solamente por r_t sino por $r_t + \varepsilon g(t)xr_x$. Esta observación nos lleva a usar el método de los multiplicadores [6] que es una técnica que se usa con gran éxito para determinar el decaimiento de soluciones para ecuaciones hiperbólicas, pero que se usa en el contexto de fronteras móviles por primera vez.

La idea del método es la de multiplicar la ecuación por una combinación apropiada de derivadas de la solución, de esa manera se obtiene una identidad de energía donde los términos de frontera han desaparecido.

Para obtener la identidad deseada, multiplicamos la ecuación original por

$$2(r_t + \varepsilon g(t)r_x)$$

y obtenemos

$$2(r_t + \varepsilon g(t)r_x)(r_{tt} - r_{xx}) = 2\varepsilon^2 h(r_t + \varepsilon g(t)r_x) \quad (52)$$

El primer término nos da la identidad de energía usual pero con una contribución de la frontera. Esta contribución se balancea escogiendo la $g(t)$ de manera apropiada. A priori no es claro que se pueda escoger una $g(t)$ apropiada y su determinación es la parte central de este argumento.

Vamos a proceder de la manera usual tratando de reescribir los términos del lado izquierdo de (52) como derivadas de una forma cuadrática en las variables r_t y r_x .

Así por ejemplo, un término toma la forma

$$\begin{aligned} 2\epsilon xg(t)r_x r_{tt} &= 2\epsilon xg(t)r_x r_t)_t - \epsilon xg(t)(r_t)_x^2 \\ &= 2\epsilon(xg(t)r_x r_t)_t - 2\epsilon xg'(t)r_x r_t - \epsilon(xg(t)(r_t)_x^2)_x + \\ &\quad + \epsilon g(t)(r_t)^2 \end{aligned}$$

Análogamente con los otros tres términos, obteniendo así la identidad:

$$\begin{aligned} (r_t)_t^2 + (r_x)_t^2 + (2\epsilon xg(t)r_x r_t)_t - (2r_x c^2 r_t)_x - (\epsilon g(t)x(r_x)^2)_x - \\ - (\epsilon xg(t)(r_t)_x^2)_x + \epsilon(g(t)(r_x c)^2 + (r_t)^2) - 2\epsilon g' c r_x r_t = \\ = 2\epsilon^2 h(r_t + \epsilon c xg(t)r_x) \end{aligned} \tag{53}$$

Cuando $g(t) = 0$ (53) se reduce a la identidad de energía usual.

Integrando (53) entre 0 y $\ell(\epsilon t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell(\epsilon t)} [(r_t)^2 + (c r_x)^2 + 2\epsilon xg(t)c r_x r_t]_t dx - 2c^2 r_x r_t - \epsilon g(t)x(c r_x)^2 - \\ - \epsilon c xg(t)(r_t)^2 \Big|_{\ell(\epsilon t)} + \epsilon \int_0^{\ell(\epsilon t)} (c g(t)[(c r_x)^2 + (r_t)^2] - \\ - 2c xg' r_x r_t) dx = \\ = 2\epsilon^2 \int_0^{\ell(\epsilon t)} h(r_t + \epsilon c xg(t)r_x) dx \end{aligned}$$

De aquí vemos que la forma cuadrática de la primera integral juega el papel de la energía. (En el apéndice se explica otra manera de proceder) Para esto, es conveniente renovar la derivada del integrando en favor del término que aparece al derivar el límite superior. Además, resulta conveniente elimi

nar las derivadas con respecto a t en la frontera $x = \ell(\epsilon t)$ en favor de las derivadas con respecto a x , ya que como $r(\ell(\epsilon t), t) = 0$ tenemos:

$$r_t(\ell(\epsilon t), t) + \epsilon \dot{\ell}(\epsilon t) r_x(\ell(\epsilon t), t) = 0$$

Efectuando estas manipulaciones la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\ell(\epsilon t)} [(r_t)^2 + (\epsilon r_x)^2 + 2\epsilon c x g(t) r_x r_t] dx + r_x^2(\ell(\epsilon t), t) [g(t) (-\epsilon c^2 \dot{\ell} + \epsilon^3 \dot{\ell}^2) - \\ - (\epsilon c^2 \dot{\ell} + \epsilon^3 \dot{\ell}^3)] + \epsilon \int_0^{\ell(\epsilon t)} (c g(t) [(r_x)^2 + (r_t)^2] - 2c x g' r_x r_t) dx = \\ = 2\epsilon^2 \int_0^{\ell(\epsilon t)} h(r_t + \epsilon x g(t) r_x) dx \end{aligned} \quad (54)$$

La ecuación (54) tiene, excepto por el término de frontera, la forma de la identidad de energía. Para eliminar esos términos escogemos

$$g(t) = \ell(\epsilon t) / c \ell(\epsilon t) \quad (55)$$

obteniendo así relaciones que sólo involucran integrales.

Finalmente usamos en (54) la desigualdad:

$$|2f(r_t + \epsilon c g(t) x r_x)| \leq f^2 + r_t^2 + 2\epsilon c x g(t) r_t r_x + \epsilon^2 c^2 g^2 x^2 r_x^2 \quad ;$$

e introducimos por comodidad la notación

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon x g \\ \epsilon x g & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} c g & -x g' \\ -x g' & c g \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} \epsilon^2 x^2 g^2 & \epsilon x g \\ \epsilon x g & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi^T = (c r_x, r_t)$$

$$\dot{g}(t) \leq \varepsilon(\alpha + \beta\varepsilon) g(t) + \varepsilon^2 g(t)$$

de donde

$$g(t) \leq g(0) + \varepsilon^2 \int_0^t \int_0^{\ell(\varepsilon s)} h^2(x, s) dx ds e^{\varepsilon(\alpha + \beta\varepsilon)t} \quad (57)$$

además como $\xi^T \xi \leq \gamma \xi^T A \xi$ tenemos que

$$E(t) = \int_0^{\ell(\varepsilon t)} r_t^2 + (cr_x)^2 dx \leq \gamma g(t)$$

y $g(t) \leq \delta E(t)$ Usando estas dos desigualdades en (57) tenemos

$$\int_0^{\ell(\varepsilon t)} [r_t^2 + (cr_x)^2] dx \leq \varepsilon^2 \gamma \left\{ \delta E(0) + \int_0^t \int_0^{\ell(\varepsilon s)} h^2(x, s) dx ds \right\} e^{\varepsilon(\alpha + \beta\varepsilon)t} \quad (58)$$

ya que $|\ell|$, $|\dot{\ell}|$, $|\ddot{\ell}|$ están acotadas y lo mismo $x < |\ell|$ para toda t , la función

$$\left| \int_0^{\ell(\varepsilon t)} h^2(x, t) dx \right| \leq M$$

para $0 \leq t < \infty$ donde M no depende de ε .

La ecuación (58) es la desigualdad de energía buscada. Nos acota a la solución en términos de los datos iniciales y del término no homogéneo. Debido a esta desigualdad, es conveniente medir la norma (en energía) de una solución r en la forma

$$E(\tau)r = \frac{1}{2} \int_0^{\ell(\tau)} [r_t^2 + (cr_x)^2] dx$$

Usando esta notación, la última ecuación nos dice que

$$E(\tau)r = O(\varepsilon^2 t e^{\varepsilon(\alpha + \beta\varepsilon)t})$$

de aquí vemos que $E(\tau)r$ es menor que ε para tiempos t del orden ε^{-1} Usaremos

ahora esto para ver que φ es una aproximación a orden ε , en la norma de la energía, para tiempos t del orden ε^{-1} . Esto lo vemos calculando la norma de $u-\varphi$. Tenemos

$$E(t)(u-\varphi) = E(t)(\varepsilon u^{(1)} + r) \leq 2E(t)(\varepsilon u^{(1)}) + 2E(t)r = O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^2 t e^{\varepsilon(\alpha+\beta\varepsilon)t})$$

lo que nos da el resultado deseado.

Desde luego para $t = O(\varepsilon^{-2})$ la aproximación ya no es buena. Esta situación es la usual en los métodos de escalas múltiples. Si se quiere una aproximación para $t = O(\varepsilon^{-2})$ se deben de incluir más términos en el desarrollo. En otras palabras, al incluir más términos agrandamos el intervalo de validez de la aproximación.

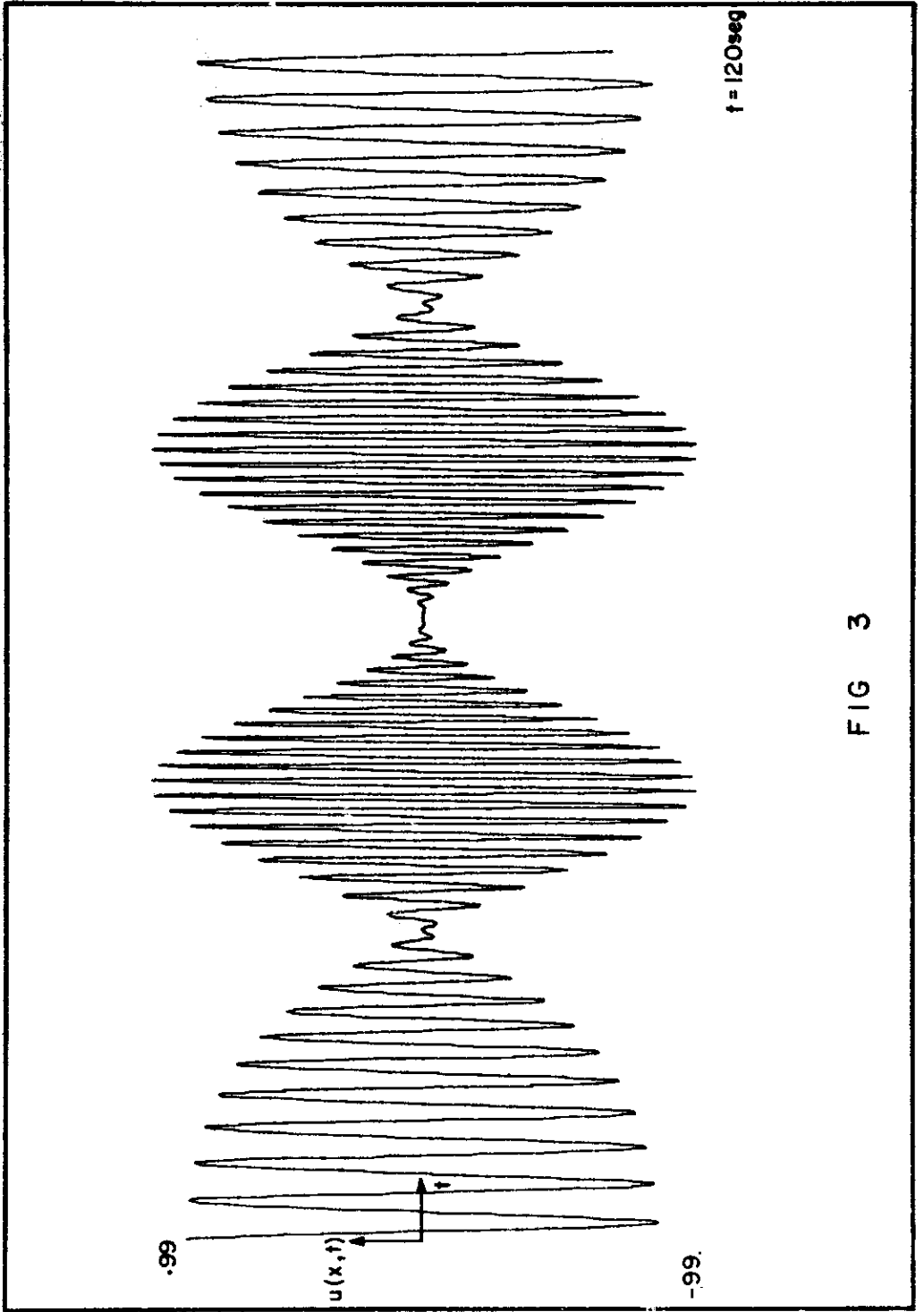
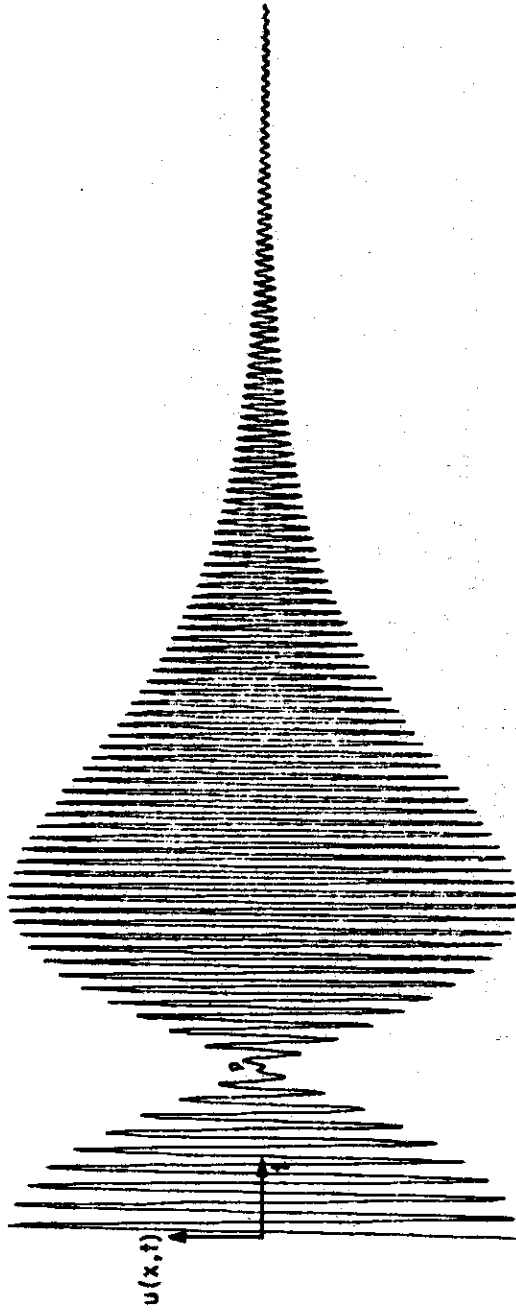
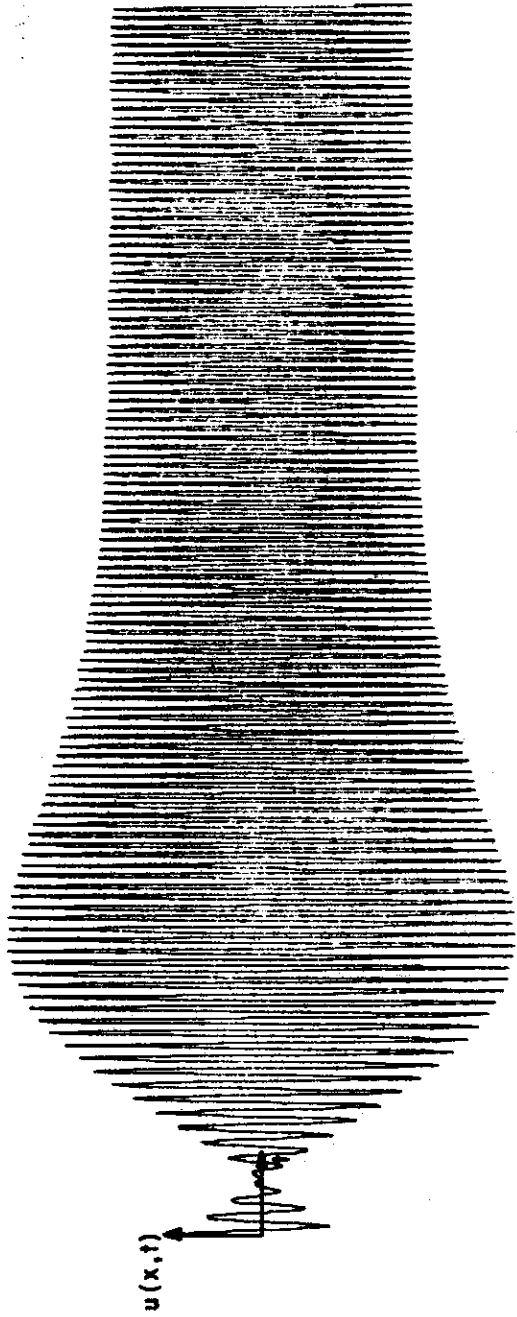


FIG 3



$t = 60$ sec

FIG 4



$t = 60 \text{ seg}$

FIG. 5

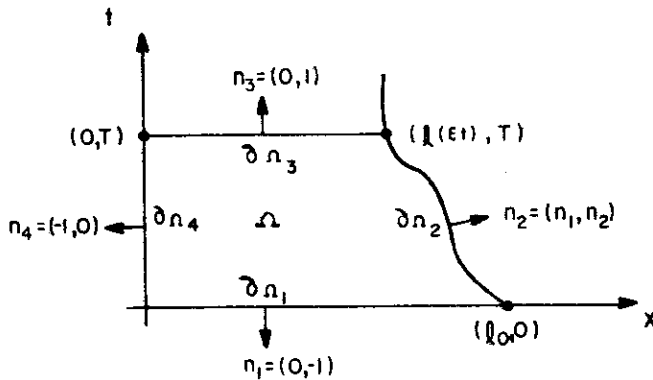
A P E N D I C E S

A.1. En la última sección de este trabajo, se llegó a encontrar una estimación del error en términos de una nueva norma de energía. Para ello se multiplicó la ecuación $r_{tt} - c^2 r_{xx} = \varepsilon^2 h(x,t)$ por $(r_t + \varepsilon c x g(t) r_x)$ que nos condujo a determinar el valor de $g(t)$ para el cual existe una cota para la energía que nos prueba la existencia de una solución. Aquí presentamos otra manera de obtener la desigualdad de energía deseada.

Para hacer ésto, partimos de la expresión:

$$\begin{aligned} & (r_t^2)_t + c^2 (r_x^2)_t + (2\varepsilon c x g(t) r_x r_t)_t - (2c^2 r_x r_t)_x - (\varepsilon c g(t) x (c r_x)^2)_x - \\ & - (\varepsilon c x g(t) r_t)_x + \varepsilon c g(t) (r_t^2 + c^2 r_x^2) - 2\varepsilon c g'(t) r_t r_x = \\ & = 2\varepsilon^2 (r_t + \varepsilon c x g(t) r_x) h(x,t) \end{aligned}$$

que integramos sobre la region Ω en el plano (x,t) , ver figura A1.



$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 l^2 + 1}}$$

$$n_2 = \frac{-\varepsilon l}{\sqrt{\varepsilon^2 l^2 + 1}}$$

Fig. A 1

es decir, tenemos que

$$\begin{aligned}
& 2\epsilon^2 \iint_{\Omega} (r_t + \epsilon c x g(t) r_x) h(x, t) dx dt = \\
& = \epsilon c \iint_{\Omega} [g(t)(r_t^2 + c^2 r_x^2) - 2\epsilon c g' r_t r_x] dx dt + \iint \nabla \cdot \underline{F} dx dt \quad (A.1.1)
\end{aligned}$$

donde $\nabla \cdot \underline{F} = [(F_1)_x + (F_2)_t]$

$$\text{con } F_1 = -[2c^2 r_t r_x + \epsilon c x g(r_t^2 + c^2 r_x^2)]$$

$$\text{y } F_2 = [r_t^2 + c^2 r_x^2 + 2\epsilon c g x r_t r_x]$$

por lo que usando el teorema de la divergencia en el segundo término del lado derecho de (A.1) tenemos

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \nabla \cdot \underline{F} dx dt = \int_{\partial\Omega} (F_1 n_1 + F_2 n_2) ds = \\
& = - \int_0^{\ell} F_2 dx + \int_0^T (F_1 - \epsilon \dot{\ell} F_2) dt - \int_{\ell(\epsilon t)}^0 F_2 dx + \int_T^0 F_1 dt
\end{aligned}$$

donde en cada una de las diferentes partes de la frontera $\partial\Omega$ el vector unitario normal con dirección hacia afuera de la región Ω y ds el elemento de arco están dados por:

$$\text{en } \partial\Omega_1 \quad ds = dx \quad \text{y} \quad n_1 = 0, \quad n_2 = -1$$

$$\text{en } \partial\Omega_2 \quad ds = \sqrt{\epsilon^2 \dot{\ell}^2 + 1} dt, \quad n_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 \dot{\ell}^2 + 1}}, \quad n_2 = \frac{-\epsilon \dot{\ell}}{\sqrt{\epsilon^2 \dot{\ell}^2 + 1}}$$

$$\text{en } \partial\Omega_3 \quad ds = -dx, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 1$$

$$\text{y en } \partial\Omega_4 \quad ds = -dt, \quad n_1 = -1, \quad n_2 = 0$$

quedándonos la expresión (A.1) como sigue:

$$\begin{aligned}
 & 2\varepsilon^2 \iint_{\Omega} (r_t + \varepsilon c x g(t) r_x) h(x, t) dx dt = \\
 & \varepsilon c \iint_{\Omega} [g(t)(r_t^2 + c^2 r_x^2) - 2\varepsilon c g' r_t r_x] dx dt - \int_0^{\ell_0} (r_t^2 + c^2 r_x^2 + 2\varepsilon c g x r_t r_x) dx \\
 & - \int_0^T [(2c^2 r_t r_x + \varepsilon c x g(r_t^2 + c^2 r_x^2) + \varepsilon \dot{\ell}(r_t^2 + c^2 r_x^2 + 2\varepsilon c g x r_t r_x)] dt \\
 & - \int_{\ell(\varepsilon t)}^0 (r_t^2 + c^2 r_x^2 + 2\varepsilon c g x r_t r_x) dx - \int_T^0 [2c^2 r_t r_x + \varepsilon c x g(r_t^2 + c^2 r_x^2)] dt \quad (A.1.2)
 \end{aligned}$$

Ahora, recordando la definición que dimos antes para la "nueva energía" (Sec. III.2, (47)).

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell(\varepsilon t)} (r_t^2 + c^2 r_x^2 + 2\varepsilon x r_t r_x \frac{\dot{\ell}}{\ell}) dx$$

podemos escribir el lado derecho de (A.1.2), y reagrupando términos, como:

$$\begin{aligned}
 & 2\varepsilon^2 \iint_{\Omega} (r_t + \varepsilon c g(t) x r_x) dx dt = \\
 & \varepsilon c \iint_{\Omega} [g(t)(r_t^2 + c^2 r_x^2) - 2\varepsilon c g' r_t r_x] dx dt - 2\mathcal{E}(0) + 2\mathcal{E}(t) - \\
 & \int_0^T [r_x^2 (-2\varepsilon^2 c \dot{\ell} + \varepsilon \dot{\ell} g c (c^2 + \varepsilon^2 \dot{\ell}^2) + \varepsilon \dot{\ell} c^2 + \varepsilon^3 \dot{\ell}^3 - 2\varepsilon^3 \dot{\ell}^2 c \dot{\ell} g)] dt = \\
 & = \varepsilon c \iint_{\Omega} [I] dx dt + 2\mathcal{E}(t) - 2\mathcal{E}(0) + \int_0^T \varepsilon r_x^2 (c^2 - \varepsilon^2 \dot{\ell}^2) (\dot{\ell} - \dot{\ell} g c) dt \quad (A.1.3)
 \end{aligned}$$

para tener solución única, $|\varepsilon \dot{\ell}| = |\frac{d\ell}{dt}| \leq c$

(como habíamos visto anteriormente el movimiento de la frontera no deberá exceder a la velocidad de propagación de la onda).

De A.1.3 tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(t) = & \mathfrak{E}(0) - \frac{\varepsilon c}{2} \iint_{\Omega} [g(t)(r_t^2 + c^2 r_x^2) - 2\varepsilon c g' r_t r_x] dx dt - \\ & - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T r_x^2 (c^2 - \varepsilon^2 \dot{\ell}^2) (\dot{\ell} - \ell g c) dt + \varepsilon^2 \iint_{\Omega} (r_t + \varepsilon c g(t) x r_x) h dx dt \end{aligned}$$

Recordamos que

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell(t)} \begin{pmatrix} c r_x \\ r_t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon x g \\ \varepsilon x g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c r_x \\ r_t \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.1.4})$$

y queremos que $\mathfrak{E}(t)$ sea positiva. Para que esta forma cuadrática sea mayor que cero necesitamos que la matriz sea positiva, esto es, si $1 - \varepsilon^2 x^2 g^2 \geq 0$ por lo que $|\varepsilon x g| \leq 1$ para cualquier punto x en $[0, \ell]$ es decir, $|\dot{\ell} g| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Podemos ahora estimar el lado derecho de (A.1.4) así:

$$\mathfrak{E}(t) \leq \mathfrak{E}(0) - \frac{\varepsilon c}{2} \iint_{\Omega} [I] dx dt + \varepsilon^2 \iint_{\Omega} (r_t + \varepsilon c g(t) x r_x) h dx dt \quad (\text{A.1.5.})$$

ya que el término

$$\int r_x^2 (c^2 - \varepsilon^2 \dot{\ell}^2) (\dot{\ell} - \ell g c) \geq 0$$

siempre que

$$\dot{\ell} - \ell g c \geq 0 \quad \text{y} \quad |\varepsilon \dot{\ell}| \leq c$$

o sea

$$\ell g \leq \frac{\dot{\ell}}{c} \leq \frac{|\dot{\ell}|}{c} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

recobrando así la condición de espacialidad sobre la frontera.

Como $\mathfrak{E}(t)$ es positiva podemos acotar el lado derecho de (A.1.5) en términos de $\mathfrak{E}(t)$ tal como lo hicimos antes, obteniendo

$$0 \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) + \varepsilon \int_0^t (\alpha + \beta \varepsilon) \mathcal{E}(s) ds + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^t \int_0^s h^2(x, s) ds .$$

A.2. Pasamos ahora a escribir los detalles que nos condujeron a obtener la desigualdad necesaria para acotar el error en términos de una "nueva energía", que habíamos definido como $\mathcal{E}(t)$ (Sec. IV). Teníamos, (Ver A.1),

$$0 \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) + \varepsilon \int_0^t (\alpha + \beta \varepsilon) \mathcal{E}(s) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^t g_1(s) ds$$

donde $g_1(s) = \int_0^{\mathcal{L}(s)} h^2(x, s) ds .$

Llamemos

$$g_2(t) = \int_0^t \mathcal{E}(s) ds$$

$$0 \leq g_2'(t) \leq g_2'(0) + \varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon) g_2(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^t g_1(s) ds \quad (\text{A.2.1})$$

esta desigualdad la multiplicamos por $e^{-\varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon)t}$

$$g_2'(t) e^{-\varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon)t} - \varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon) g_2(t) e^{-\varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon)t} \leq (g_2'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^t g_1(s) ds) e^{-\varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon)t}$$

y la reescribimos como

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-\varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon)t} g_2(t) \right] \leq \frac{d}{dt} \int_0^t \left[g_2'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^{\tau} g_1(s) ds \right] e^{-\varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon)\tau} d\tau$$

e integrando con respecto a t , tenemos

$$e^{-\varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon)t} g_2(t) - g_2(0) \leq \int_0^t \left[g_2'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^{\tau} g_1(s) ds \right] e^{-\varepsilon(\alpha + \beta \varepsilon)\tau} d\tau$$

pero $g_2(0) = 0$ quedando:

$$g_2(t) \leq \int_0^t [g_2'(0) + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^{\tau} g_1(s) ds] e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)(t-\tau)} d\tau$$

Esta desigualdad para $g_2(t)$ la sustituimos en (A.2.1)

$$0 \leq g_2'(t) \leq g_2'(0) + \epsilon(\alpha+\beta\epsilon) \int_0^t \left[g_2'(0) + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^{\tau} g_1(s) ds \right] e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)(t-\tau)} d\tau + \\ + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^t g_1(s) ds$$

pero como $g_2'(t) = \xi(t)$;

$$0 \leq \xi(t) \leq \xi(0) \left[1 + \epsilon(\alpha+\beta\epsilon) \int_0^t e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)(t-\tau)} d\tau \right] + \\ + \epsilon(\alpha+\beta\epsilon) \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^t \left[\int_0^{\tau} g_1(s) ds \right] e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)(t-\tau)} d\tau + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^t g_1(s) ds$$

integrando por partes el segundo término de la desigualdad, se tiene

$$0 \leq \xi(t) \leq \xi(0) \left[1 - e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)(t-\tau)} \Big|_0^t \right] - \frac{\epsilon^2}{2} \left[\int_0^{\tau} g_1(s) ds e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)(t-\tau)} \Big|_0^t + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^t g_1(\tau) e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)(t-\tau)} d\tau + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^t g_1(s) ds \right]$$

por lo que

$$0 \leq \xi(t) \leq \xi(0) e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)t} + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^t g_1(\tau) e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)(t-\tau)} d\tau$$

$$\text{y con } \xi(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} \epsilon^2 \ell^2(0) z^2(x) dx$$

tenemos finalmente la desigualdad buscada:

$$0 \leq \xi(t) \leq \frac{\epsilon^2}{2} \left[\int_0^{\ell_0} \ell^2(0) z^2(x) dx + \int_0^t \int_0^{\ell(t)} h^2(x,t) dx dt \right] e^{\epsilon(\alpha+\beta\epsilon)t}$$

que nos acota a $\mathcal{E}(t)$.

R E F E R E N C I A S

- [1] J. D. Cole, Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisdell, Waltham, MA. 1968.
- [2] J. L. Farah y C. Ruiz, Programa Grafo para el uso del graficador de papel HP7203A, Com. Tec. Serie Verde No. 13, 1979 IIMAS, UNAM.
- [3] J. Haag, Oscillatory Motions, Wadsworth, 1962.
- [4] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, Mechanics, Pergamon Press, (Pag. 154), 1960.
- [5] C. C. Lin y L. A. Seagel, Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences, Macmillan, 1974.
- [6] C. S. Morawetz, Notes on Time Decay and Scattering for Some Hyperbolic Problems, CBMS 19, SIAM, 1975.
- [7] A. Nayfeh, Perturbation Methods, John Wiley & Sons, 1973.
- [8] C. H. Papas y C. Borgine, Electromagnetic Waveguides and Cavity Resonators, Class notes Cal-Tech, 1972.
- [9] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1966.

REFERENCIAS GENERALES

- [10] J. Ize, Las ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones, Com. Tec. Serie Verde No. 10, 1978 IIMAS, UNAM.

- [11] G. Birkhoff y G. Rota, Ordinary Differential Equations, Blaisdell
Pub. Comp., 1969.

- [12] A. Tikhonov y A. A. Samarsky, Partial differential equations of
mathematical physics, Holden-Day, 1964.