

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7103>

# Nim-O-Do: Un juego para todos

Criel Merino

Instituto de Matemáticas  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Ciudad de México, México  
merino@matem.unam.mx

y

Verónica E. Ruiz

Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca  
Oaxaca, México  
veronica.ruizpa@gmail.com

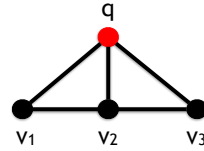
## 1. Preliminares

Una *gráfica*  $G$  es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito no vacío y  $E$  un subconjunto, posiblemente vacío, de parejas no ordenadas de elementos en  $V$ . A los elementos de  $V = V(G)$  se les llama *vértices* y a los de  $E = E(G)$ , *aristas*. Si la pareja  $\{a, b\}$  está en  $E$ , decimos que  $a$  y  $b$  son *adyacentes* o *vecinos*. Al conjunto de vértices adyacentes a un vértice dado  $v$ , lo llamamos su *vecindad*, que denotaremos por  $N(v)$  y la cardinalidad de  $N(v)$  será el *grado del vértice*, que denotamos  $d(v)$ . A la gráfica  $G$  la llamamos *conexa*, si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  existe una  $u$ - $v$  trayectoria, o sea, una sucesión finita  $u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$  que cumple que para toda  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ .

Una forma de representar una gráfica es dibujando por cada vértice  $v \in V$ , un punto en el plano, y por cada par de vértices vecinos, una curva uniendo los puntos respectivos. En esta representación, una gráfica es conexa, si es conexa topológicamente como subconjunto del plano.

Otra forma de representar una gráfica  $G = (V, E)$ , con  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , es por medio de la  $(n + 1) \times (n + 1)$  matriz  $L(G) = L$ , llamada

$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Figura 1.  $L^q(K_4 \setminus e)$ .Figura 2.  $K_4 \setminus e$ .

la *matriz laplaciana* de  $G$ , y que esta definida de la siguiente manera.

$$L_{i,j} = \begin{cases} d(v_i), & \text{si } i = j, \\ -1, & \text{si } \{i, j\} \in E, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La *matriz laplaciana reducida* de  $G$ ,  $L^q(G)$ , se obtiene de  $L(G)$  al borrar la columna y el renglón correspondiente al vértice  $q$ .

En los juegos que describimos a continuación, el tablero es una gráfica conexa y las posiciones del juego son pilas de fichas en los vértices. Es natural asociar a cada posición del juego un vector de enteros no negativos que llamamos configuración del juego. Además, es conveniente que el lector tenga en mente algunas gráficas, por ejemplo, *la gráfica completa*  $K_n$ , que consiste de  $n$  vértices y cada par de vértices es vecino; o *la gráfica estrella*  $S_{n+1}$ , que consiste de  $n+1$  vértices donde un vértice fijo es vecino a todos los demás y ningún otro par de vértices son vecinos. La gráfica  $K_3$  aparece en la figura 5, mientras que  $S_3$  aparece en la figura 3. En la figura 2 tenemos las representaciones en el plano de la gráfica  $K_4 \setminus e$ , la gráfica  $K_4$  donde borramos la arista  $\{v_1, v_3\}$ , con vértices  $q, v_1, v_2$  y  $v_3$ . En la figura 1 tenemos la matriz laplaciana reducida de esta gráfica.

Una arista  $e$  en una gráfica conexa  $G$  se llama *punte* si al borrarla de  $G$  se obtiene una gráfica no conexa. La gráfica estrella tiene la propiedad de que todas sus aristas son puentes. Una gráfica con esta propiedad se le llama árbol. Una propiedad básica de las gráficas conexas es la siguiente: Si  $G$  es conexa con  $m$  aristas y  $n$  vértices, entonces existe un conjunto de  $m - n + 1$  aristas de  $G$  que se pueden borrar y obtener una gráfica conexa con el mismo conjunto de vértices de  $G$  que es un árbol. Esta nueva gráfica se le llama un árbol generador de  $G$  y las gráficas conexas que no son árboles tienen varios árboles generadores, por ejemplo, la gráfica  $K_3$  tiene 3 árboles generadores, correspondientes a borrar cada una de las tres aristas de la gráfica.

La teoría de gráficas es vasta en definiciones e invitamos al lector a libros como [10, 15] para saber más sobre el tema.

Para el estudio de uno de nuestros juegos es necesario saber que a los enteros no negativos  $\mathbb{N}$  se les puede dar una estructura de grupo

usando la *suma Nim* (también conocida como suma diádica, bitxor o digital). Para calcular la suma Nim de  $a$  y  $b$ ,  $a \oplus b$ , tomamos las representaciones binarias de  $a$  y  $b$  con el mismo número de bits para proceder a sumar dígito a dígito módulo 2 sin acarreo. Por ejemplo, 3 y 5 tienen representación binaria con 3 bits  $011_2$  y  $101_2$ , respectivamente. Sumando los tres pares de dígitos modulo 2 obtenemos la representación binaria  $110_2$  que corresponde a 6, o sea,  $3 \oplus 5 = 6$ . Esta operación es abeliana con la propiedad que  $x \oplus x = 0$  y  $x \oplus 0 = x$  para toda  $x \in \mathbb{N}$ . En particular, al ser un grupo, para dos enteros  $p$  y  $q$ , existe un único entero  $r$  tal que  $p \oplus r = q$ .

## 2. Los tres juegos

El juego Nim es descrito por la Enciclopedia británica como un «antiguo juego de origen oscuro en el que dos jugadores se alternan para eliminar objetos de diferentes pilas, y gana aquel que elimina el último objeto». O sea, en el juego hay  $n$  pilas de fichas, que etiquetamos  $1, 2, \dots, n$ , y donde la pila  $i$  tiene  $c_i$  fichas. La dinámica del juego consiste en que dos jugadores, A y B, alternativamente eligen una pila y tomen de ella tantas fichas como deseen. El jugador que tome la última ficha del tablero gana, o sea, el jugador que no pueda tomar más fichas pierde. Una formulación matemática del juego es la siguiente. Tenemos como configuración inicial un vector de enteros no negativos  $c \in \mathbb{R}^n$ ; el juego es una sucesión finita  $c = c_1, c_2, \dots, c_m = 0$  tal que  $c_i = c_{i-1} - ke_j$ , para algún  $1 \leq j \leq n$ ,  $k \leq c_{i-1}(j)$  y  $e_1, \dots, e_n$  es la base estandar de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $m$  es par, A gana, de otra forma gana B.

Por ejemplo, si tenemos tres pilas de fichas con configuración inicial  $(7,9,12)$ , el jugador A selecciona dos fichas de la primera pila y deja la configuración  $(5,9,12)$ ; ahora el jugador B toma 6 fichas de la última columna y deja la configuración  $(5,9,6)$ . Podemos continuar así obteniendo las configuraciones  $(5,3,6)$ ,  $(5,3,2)$ ,  $(1,3,2)$ ,  $(1,1,2)$ ,  $(1,1,0)$ ,  $(0,1,0)$  y  $(0,0,0)$ . Como hay 10 movimientos, A gana. Note que después de cada tiro de A, las entradas en la configuración resultante tienen suma Nim cero, por ejemplo  $5 \oplus 9 \oplus 12 = 0$ .

Ahora veamos el juego de fichas. El tablero es una gráfica conexa  $G$  con  $n + 1$  vértices uno de los cuales es  $q$ . Sobre cada vértice tenemos un cierto número de fichas, excepto por el vértice  $q$  que es especial y no guarda fichas. La dinámica del juego es la siguiente: el jugador escoge un vértice con al menos tantas fichas como su número de vecinos y lo *dispara*, o sea, distribuye a cada vecino una ficha. Si el vértice  $q$  recibe alguna ficha, esa ficha se pierde. Ocasionalmente el tablero tendrá pocas fichas y no habrá vértices que se puedan disparar. En este caso hay una

regla especial que solo se aplica en esta situación y que llamaremos *disparar* a  $q$ : se pone una nueva ficha a cada vértice vecino de  $q$  y se trata de reanudar el juego, si no es posible se repite esta operación tantas veces como sea necesario para que se pueda continuar con el juego. Este es un juego para un solo jugador y nunca termina.

Una formulación matemática del juego es la siguiente. Tenemos una gráfica conexa  $G$  con  $n + 1$  vértices etiquetados  $q, v_1, \dots, v_n$  y como configuración inicial un vector de enteros no negativos  $c \in \mathbb{Z}^n$ . Las configuraciones donde  $c(i) < d(v_i)$ , para todas las  $i$ , se llaman *estables*.

Los renglones de  $L^q$  son los vectores  $l_1, \dots, l_n$  correspondientes a los vértices  $v_1, \dots, v_n$ . Cada uno de estos vértices define una regla: se puede sumar el vector  $-l_i$  a una configuración  $c$  del juego si  $c - l_i \geq 0$ . Tenemos una regla especial para el vértice  $q$  en caso de que ninguna de las  $n$  reglas anteriores se pueda aplicar, y consiste en sumar a  $c$  el vector que es la suma de todos los renglones de  $L^q$ ,  $\sum l_i$ . Observe que este último vector es no negativo y tiene al menos una entrada positiva. Entonces la dinámica del juego de fichas hasta el momento  $k$ , dado  $G$ ,  $q$  y  $c$ , se describe por medio de una sucesión de vértices, no necesariamente distintos,  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , donde cada vértice representa la aplicación válida de su regla después del disparo de los anteriores vértices, a la cual llamamos *sucesión legal*. Además, llamamos a una sucesión legal *propia* si no contiene a  $q$ .

Debido a que el juego está perdiendo fichas a través de  $q$ , por ser  $G$  conexa, cualquier configuración al final se volverá estable y se tendrá que usar la regla especial cierto número de veces para continuar. Por otro lado, el número de configuraciones estables es finito (de hecho igual a  $\prod_{i=1}^n d(i)$ ), por lo que algunas configuraciones estables se repetirán en este juego infinito. A estas configuraciones las llamamos *críticas*.

Como ejemplo usemos el tablero de la figura 2 con configuración inicial  $(3,5,1)$ . Podemos elegir a  $v_1$  o  $v_2$  para disparar. Digamos que disparamos el vértice  $v_1$ , o sea, sumamos el vector  $(-2,1,0)$  a  $(3,5,1)$  y obtenemos  $(1,6,1)$ . Ahora solo podemos disparar el vértice  $v_2$  y obtener la configuración  $(1,6,1)+(1,-3,1)=(2,3,2)$ . Podemos continuar y obtener la sucesión legal  $(v_1, v_2, v_1, v_3, v_2)$ . Al final de esta sucesión de disparos obtenemos la configuración estable  $(1,2,1)$ . Después de disparar  $q$ , obtenemos  $(2,3,2)$  y continuamos disparando. Ahora podemos disparar  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  y obtenemos nuevamente la configuración  $(1,2,1)$ . Por lo cual esta última configuración es crítica. Por otro lado, la configuración  $(0,0,0)$  es estable pero no crítica, ya que tenemos que disparar  $q$  dos veces para llegar a la configuración no estable  $(2,2,2)$ , y desde esta configuración ninguna sucesión de disparos puede llegar a  $(0,0,0)$ .

El juego de fichas tiene la propiedad abeliana que consiste en que si hay dos vértices  $v_i$  y  $v_j$  distintos que puedan ser disparados desde la

configuración  $c$ , entonces disparar  $v_i$  y luego  $v_j$  llega a la misma configuración que si disparamos primero  $v_j$  y luego  $v_i$ . El juego de fichas tiene una propiedad aún más general que se prueba en [6, 7]. En nuestro juego de fichas, tomamos dos sucesiones legales propias de tamaño arbitrario  $X$  y  $Y$  con la intención de construir una nueva sucesión legal a partir de estas. Sea  $y$  el vector representativo de la sucesión  $Y$ , o sea, la entrada  $i$  es igual al número de veces que aparece el vértice  $i$  en  $Y$ . El vector  $y$  nos da el número de veces que debemos borrar el vértice  $i$  de la sucesión  $X$ . O sea, construimos una nueva sucesión de vértices, denotada  $X \setminus Y$ , como sigue: si en  $X$  hay más de  $y(i)$  apariciones del vértice  $i$ , los primeros  $y(i)$  de ellos se eliminan, y si hay menos que  $y(i)$  ocurrencias, todos ellos se eliminan.

**Lema 2.1** (Propiedad abeliana del juego de fichas). *Dado  $G$ ,  $q$  y  $c$ , sean  $X$  y  $Y$  sucesiones legales propias con vectores representativos  $x$  y  $y$ . Entonces la sucesión  $Z = (Y, X \setminus Y)$  es también legal para  $c$ , y su vector representante  $z$  tiene valor en la entrada  $i$ ,  $z(i) = \max\{x(i), y(i)\}$ .*

Por ejemplo, usando la configuración (3,5,1) del ejemplo anterior, tenemos las sucesiones legales  $X=(v_1, v_2, v_1)$  y  $Y=(v_2, v_3, v_2)$ , que nos llevan a las configuraciones (0,4,2) y (5,0,1), respectivamente. En este caso,  $X \setminus Y=(v_1, v_1)$  y  $(Y, X \setminus Y)=(v_2, v_3, v_2, v_1, v_1)$ .

Para el lector interesado, la propiedad anterior se circunscribe en la teoría de greedoides, véase [8], y su relación con el juego de fichas se puede consultar en [18]. Con este resultado se prueba en [6] lo siguiente.

**Teorema 2.1.** *Para una gráfica conexa  $G$  con vértice especial  $q$  y configuración inicial  $c$ , el juego de fichas llega a una configuración crítica única  $\sigma = \sigma(c)$ .*

Las configuraciones críticas tienen muchas propiedades y han producido cierta fascinación en diversas comunidades matemáticas por su relación con la física, la geometría algebraica y la combinatoria [3, 13, 17]. Por ejemplo, si definimos una relación sobre las configuraciones del juego donde dos de ellas,  $c_1$  y  $c_2$ , están relacionadas si y solo si  $c_1 - c_2 \in \langle L^q(G) \rangle$ , el espacio generado por los renglones de la matriz reducida laplaciana, obtenemos una relación de equivalencia. Precisamente, el número de clases de equivalencia es  $\det(L^q(G))$ , que por el famoso teorema de Kirchhoff, véase [5], es igual al número de árboles generadores de la gráfica que sirve como tablero. El teorema anterior implica que hay una configuración crítica por cada una de las clases de equivalencia. Que el número de configuraciones críticas coincida con el número de árboles generadores de la gráfica  $G$  no es accidente. Una hermosa biyección se puede encontrar en [6]. Extendiendo el ejemplo tenemos que las configuraciones críticas tienen una estructura natural de grupo

abeliano cuya operación consiste en definir la operación binaria  $c_1 \odot c_2$ , para las configuraciones críticas  $c_1$  y  $c_2$ , como la única configuración crítica  $\sigma(c_1 + c_2)$ , donde la suma  $c_1 + c_2$  es la estándar de  $\mathbb{Z}^n$ . Este grupo abeliano es isomorfo a  $\mathbb{Z}^n / \langle L^q(G) \rangle$ . Por ejemplo, si nuestra gráfica es  $K_4 \setminus e$  las configuraciones críticas son  $(1,2,1)$ ,  $(0,2,1)$ ,  $(1,1,1)$ ,  $(1,2,0)$ ,  $(0,2,0)$ ,  $(0,1,1)$ ,  $(1,0,1)$  y  $(1,1,0)$ . Es fácil checar que  $(1,1,1)$  es el elemento neutro del grupo y que  $(0,1,1)$  genera el grupo, por lo que este grupo es isomorfo a  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ .

El origen del juego de fichas en las matemáticas se remonta a 1991, con el trabajo en Bjöner, Lovasz y Shor [9], pero hay indicios de las primeras instancias del juego en [1, 20]. En 1996, N. Biggs modificó ligeramente el juego de fichas, al que llamó el juego del dólar, véase [6, 7]. En física, en 1988, Bak, Tang y Wiesenfeld [2] introdujeron la criticalidad auto-organizada y un modelo de pilas de arena en retículas con condiciones de contorno. Esto motivó a Dhar a definir el modelo de pilas de arena [14] que es equivalente al juego de fichas.

Desafortunadamente, el juego de fichas no es un juego particularmente emocionante. El tercer juego que presentamos es un juego de estrategia para dos o más jugadores, que combina ambos juegos anteriores y cuya estrategia, aún para dos jugadores, no es trivial.

Nim-O-Do es un juego matemático de estrategia en el que dos, o más, jugadores se turnan para elegir un vértice  $v$  en una gráfica conexa  $G$  con un vértice marcado como  $q$ . En cada turno, un jugador debe disparar el vértice elegido al menos una vez, pero luego tantas veces como el jugador quiera, siempre que se cumplan las reglas del juego de fichas. Esto también se aplica a la regla especial de disparar  $q$ . Si el juego está en una configuración estable no crítica, el único vértice que puede dispararse es  $q$ , de acuerdo con las reglas del juego de fichas, o sea, no puede disparar una vez que se alcanza una configuración no estable. El objetivo del juego es llegar a la configuración crítica. Asumimos que el jugador siempre elige un vértice que puede ser disparado, de lo contrario, pierde. También asumimos que el juego nunca empieza en una configuración crítica.

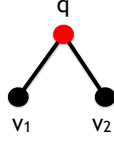
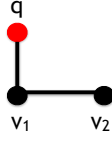
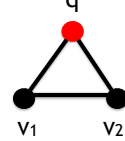
Por ejemplo, para los jugadores A y B, utilicemos el tablero de la figura 2 con configuración inicial  $(0,3,8)$ . El jugador A comienza disparando 3 veces  $v_3$  y obtiene  $(0,6,2)$ ; entonces B dispara  $v_2$  dos veces y obtiene  $(2,0,4)$ ; A dispara  $v_3$  y obtiene  $(2,1,2)$ ; B dispara  $v_1$  para obtener  $(0, 2, 2)$ ; ahora A tiene una sola opción y dispara  $v_3$  para llegar a  $(0,3,0)$ ; finalmente B también tiene una sola opción y dispara  $v_2$  para llegar a la configuración crítica  $(1,0,1)$  y ganar. La definición del juego Nim-o-Do aparece en la tesis de licenciatura de la coautora de este trabajo, [19].

### 3. Estrategias en tableros pequeños

En esta sección presentamos ejemplos de estrategias para el juego de Nim-O-Do en las tres únicas gráficas conexas con tres vértices, uno de los cuales está etiquetado como vértice especial  $q$ . Para la gráfica  $S_3$ , en la figura 3, la matriz  $L^q(S_3)$  es la identidad de  $2 \times 2$  y solo hay una configuración crítica,  $(0, 0)$ . En este caso, Nim-O-Do es el clásico juego del Nim con dos pilas de fichas, y a partir de la configuración  $(x, y)$ ,  $x < y$ , siempre se puede llegar a la configuración  $(x, x)$  mediante disparar el vértice  $v_2$   $y - x$  veces. Similarmente si  $y < x$ . A partir de la configuración  $(x, x)$  nunca se puede llegar a una configuración de la forma  $(x', x')$ . O sea, el primer jugador tiene una estrategia ganadora si la configuración inicial es  $(x, y)$  con  $x \neq y$ , de otra forma, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

Para la gráfica  $P_3$ , en la figura 4, la matriz  $L^q(P_3)$  tiene renglones  $(2, -1)$  y  $(-1, 1)$  y la única configuración crítica es  $(1, 0)$ . En este caso, a partir de la configuración  $(x, y)$ , con  $y > 0$ , siempre se puede llegar a la configuración  $(x + y, 0)$  mediante disparar el vértice  $v_2$   $y$  veces. A partir de la configuración  $(x, 0)$ , con  $x \geq 2$ , nunca se puede llegar a una configuración de la forma  $(x', 0)$ . Finalmente, de la configuración  $(0, 0)$ , en un solo disparo se llega a la configuración crítica  $(1, 0)$ . O sea, el primer jugador tiene una estrategia ganadora si la configuración inicial es  $(x, y)$  con  $y > 0$ , o es la configuración  $(0, 0)$ , de otra forma, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

Para la gráfica  $K_3$ , en figura 5, la matriz  $L^q(K_3)$  tiene renglones  $(2, -1)$  y  $(-1, 2)$  y hay tres configuraciones críticas, a saber,  $\sigma_1 = (1, 0)$ ,  $\sigma_2 = (0, 1)$  y  $\sigma_0 = (1, 1)$ . El primer problema al que se enfrenta un jugador es determinar cuál es la configuración crítica final a partir de la configuración  $(x, y)$ . En este caso, esto tiene una respuesta fácil, y se puede verificar que si  $x - y \equiv i \pmod{3}$ , entonces  $(x, y)$  llegará a  $\sigma_i$ . Supongamos que a la configuración  $(x, y)$  le corresponde la configuración crítica  $\sigma_0$ , o sea,  $x \equiv y \pmod{3}$ . A partir de una configuración  $(x, y)$ , con  $x = y + 3k$  para alguna  $k > 0$ , siempre se puede llegar a una configuración de la forma  $(x', x')$  mediante disparar el vértice  $v_1$   $k$  veces. El caso en que  $y = x + 3k$  con  $k > 0$  es similar. A partir de la configuración  $(x, x)$ , o sea  $x = y$ , con  $x \geq 2$ , nunca se puede llegar a una configuración de la forma  $(x', x')$ . Finalmente, de la configuración  $(0, 0)$ , en un solo disparo se llega a la configuración crítica  $(1, 1)$ . O sea, el primer jugador tiene una estrategia ganadora si la configuración inicial es  $(x, y)$  con  $x \neq y$ , o es la configuración  $(0, 0)$ , de otra forma, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora. Las estrategias para las configuraciones cuya configuración crítica es  $\sigma_1$  o  $\sigma_2$  son similares.

Figura 3.  $S_3$ .Figura 4.  $P_3$ .Figura 5.  $K_3$ .

## 4. Una estrategia general

Una estructura similar a una gráfica es una gráfica dirigida, o digráfica,  $D$  que consiste de un conjunto finito no vacío  $V$  y de un subconjunto de pares ordenados  $F \subseteq V \times V$ . Los elementos de  $V$  son los vértices y los de  $F$  son las flechas. Así, un par ordenado  $(u, v)$  es representado por una flecha que sale de  $u$  y llega a  $v$ . Una  $u - v$ -trayectoria dirigida en una digráfica  $D = (V, F)$  es una sucesión de vértices distintos de la forma  $u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$  que cumple que para toda  $0 \leq i \leq k - 1$ ,  $(u_i, u_{i+1}) \in F$ . Nuestras digráficas estarán coloreadas en flechas, o sea, tendremos un  $m$ -conjunto  $C$  y una función de  $F$  a  $C$ . Diremos que la digráfica  $D$  es monocromática si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color. Utilizamos las siglas t.d.m. para referirnos al nombre trayectoria dirigida monocromática o a su plural.

Para una digráfica  $m$ -coloreada  $D = (V, F)$ , decimos que un subconjunto  $S$  de vértices es *independiente por t.d.m.* si para cualesquiera dos vértices de  $S$  no existe una t.d.m. entre ellos. Por otra parte, decimos que un subconjunto  $S$  de vértices es *absorbente por t.d.m.* si para cada vértice  $v \notin S$  existe una t.d.m. de  $v$  a un vértice de  $S$ . Finalmente, el concepto fundamental para analizar nuestros juegos es el de núcleo. Un conjunto  $N \subseteq V$  es un *núcleo por t.d.m.* si es independiente y absorbente por t.d.m.

Tomemos cualquier tablero de Nim-O-Do con una configuración inicial, o sea, una gráfica  $G$  simple con  $n + 1$  vértices, con vértice especial  $q$  y  $c \in \mathbb{Z}^n$ . Creamos la digráfica coloreada por flechas,  $H_{G,c}$  tal que sus vértices son todas las configuraciones posibles del juego. Ponemos una flecha con color  $v \xrightarrow{c} c'$  si y solo si  $c'$  se obtiene de  $c$  al disparar el vértice  $v$  y  $c$  no es crítico. Para evitar confusiones, el vértice de  $H_{G,c}$  correspondiente a la configuración  $s$  se denotará como  $A(s)$ .

Observe que las configuraciones estables no críticas pueden ser vértices de  $H_{G,c}$ , y si este es el caso, una flecha coloreada  $q$  estará presente en la digráfica. De forma más explícita tenemos el siguiente lema.

**Lema 4.1.** *Para una gráfica  $G$  con vértice especial  $q$ , configuración inicial  $c$  y configuración crítica correspondiente  $\sigma$ , tenemos que todas*



las trayectorias en  $H_{G,c}$  desde  $A(c)$  a  $A(\sigma)$  usan  $q$ , o bien, ninguna de ellas usa  $q$ .

*Demostración.* Supongamos que hay dos trayectorias  $P$  y  $P'$  de  $A(c)$  a  $A(\sigma)$  en  $H_{G,c}$  tal que  $P$  tiene una flecha con color  $q$  y  $P'$  no. Entonces,  $P$  pasa por el vértice  $A(c')$  correspondiente a una configuración estable no crítica  $c'$ . Sea  $P''$  la subtrayectoria en  $P$  de  $A(c)$  a  $A(c')$ . Las sucesiones de colores (de vértices de  $G$ ) en las flechas de  $P''$  y  $P'$ , son ambas sucesiones legales propias, pero  $P''$  no se puede extender por  $P'$ , ya que  $P'$  no contiene una flecha con color  $q$ , lo que nos lleva a contradecir el lema 2.1.  $\square$

El siguiente lema es de suma importancia para lo que sigue e incluimos su demostración por completud, pero asume un mayor conocimiento de la teoría de las gráficas.

**Lema 4.2.** *La digráfica  $H_{G,c}$  es acíclica.*

*Demostración.* Del lema anterior, podemos decir que las flechas coloreadas  $q$  en  $H_{G,c}$ , si hay alguna, son puentes de la gráfica subyacente. Por lo tanto, si  $H_{G,c}$  tiene un ciclo dirigido, este se encuentra en las componentes conexas que se obtienen al borrar estos puentes; y además, ninguna de las configuraciones que aparecen en este ciclo son configuraciones estables. A los colores de las flechas en este ciclo en  $H_{G,c}$  le corresponde una sucesión  $\mathcal{S}$  de vértices en  $G$  que se puede repetir un número infinito de veces para hacer un juego donde no se utilice el vértice  $q$ . Veamos que esto no es posible.

Como  $G$  es conexa, debe existir una trayectoria de  $q$  a algún vértice  $v$  en  $\mathcal{S}$ . Entonces existe un vértice  $u$  vecino de  $v$  que no está en la sucesión  $\mathcal{S}$ . Por lo que cada vez que disparamos  $v$ , este pierde fichas que no recupera del disparo de los otros vértices en  $\mathcal{S}$ . Al final, no habrá suficientes fichas en los vértices de la  $\mathcal{S}$  para continuar con el juego. Por lo tanto, no existe tal sucesión infinita de disparos que no incluya el vértice  $q$ .  $\square$

La noción clásica de núcleo en digráficas corresponde a los núcleos por t.d.m. cuando la digráfica tiene todas sus flechas coloreadas con colores distintos. O sea, en una digráfica  $D$ , un conjunto  $N$  de vértices es independiente si no hay flecha entre ningún par de elementos en  $N$ ; un conjunto  $N$  de vértices es absorbente si para todo  $v \notin N$ , hay un  $u \in N$  tal que  $(v, u)$  es una flecha de  $D$ ; finalmente, un conjunto  $N$  de vértices es núcleo, si es independiente y absorbente. No toda digráfica tiene núcleo, y aún si lo tiene, no necesariamente es único. Pero, si  $D$  no tiene ciclos dirigidos, entonces  $D$  posee núcleo y es único, véase [4].

Después de consultar con la Dra. Hortensia Galeana pudimos obtener un método para encontrar el núcleo de  $H_{G,c}$ . Para una digráfica

coloreada por flechas  $H = (V, F)$ , la cerradura por t.d.m es la digráfica  $\mathcal{C}(H) = (V, \mathcal{C}(F))$ , donde hay una flecha  $(u, v) \in \mathcal{C}(F)$  si y solo si hay una t.d.m. de  $u$  a  $v$ . De  $\mathcal{C}(H)$  podemos extraer información sobre  $H$  con la ventaja de que las digráficas han sido más estudiadas. Por ejemplo,  $H$  es acíclica si y solo si  $\mathcal{C}(H)$  es acíclica. Y más importante,  $H$  tiene núcleo por t.d.m si y solo si  $\mathcal{C}(H)$  tiene núcleo.

**Teorema 4.1.** *La digráfica  $H_{G,c}$  tiene un único núcleo por t.d.m.*

*Demostración.* Sabemos del lema 4.2 que  $H_{G,c}$  es acíclica, por lo que  $\mathcal{C}(H_{G,c})$  es acíclica. Entonces,  $\mathcal{C}(H_{G,c})$  tiene un único núcleo y por tanto  $H_{G,c}$  tiene un único núcleo por t.d.m.  $\square$

Una vez probado el teorema anterior, podemos decir que la estrategia ganadora para el juego del Nim-O-Do en cualquier gráfica  $G$  y configuración inicial  $c$  esta dada por el núcleo por t.d.m. en  $H_{G,c}$ , es decir, los elementos de tal núcleo son las configuraciones o posiciones deseables para el juego.

**Teorema 4.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexa,  $c$  una configuración y  $N$  el núcleo por t.d.m. en  $H_{G,c}$ . En el juego Nim-O-Do, el jugador que realiza el primer movimiento tiene una estrategia ganadora si y solo si  $A(c)$  no está en  $N$ . De lo contrario, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.*

*Demostración.* La estrategia es la siguiente: Dados  $H_{G,c}$  y  $N$ , si  $A(c)$  no está en  $N$ , por la propiedad de absorbencia por t.d.m., existe una t.d.m.  $P$  con color  $v$  a un vértice  $A(c')$  en  $N$ . En el juego, disparamos el vértice  $v$  las veces que aparezca en  $P$  para llegar a  $c'$ . El segundo jugador no puede ir de  $A(c')$  a un vértice en  $N$ , por la propiedad de independencia por t.d.m., por lo que al final de su jugada estaremos en la misma situación que al inicio. Como la configuración crítica siempre está en el núcleo, el primer jugador tiene una estrategia ganadora.

Si al inicio  $A(c)$  no está en  $A$ , los papeles se invierten y el segundo jugador tiene la estrategia ganadora como se describe antes.  $\square$

En la figura 6 presentamos la digráfica  $H_{K_4 \setminus e, (0,3,8)}$  con el núcleo por t.d.m. marcado en recuadros. Cada vértice  $A(c)$  de la digráfica los etiquetamos con la configuración  $c$  para mayor claridad. Las flechas hacia abajo corresponden al color  $v_2$ , las flechas apuntado al suroeste corresponden al color  $v_1$  y las flechas al sureste corresponden al color  $v_3$ . Este núcleo da una estrategia ganadora para el jugador que inicia el juego. El primer jugador dispara  $v_3$  hasta llegar a la configuración  $(0,6,2)$  que está en el núcleo, el segundo jugador ahora puede ir a  $(0,7,0)$  disparando  $v_3$ , a  $(1,3,3)$  disparando  $v_2$  una vez, o  $(0,2,4)$  disparando  $v_2$  dos veces. El los dos primeros casos, el primer jugador puede llegar a

$(1,4,1)$ , mientras que en el tercer caso, puede llegar a  $(2,2,0)$  que también están en el núcleo. Y así sucesivamente hasta que el primer jugador llegue a  $(1,0,1)$ , la configuración crítica correspondiente.

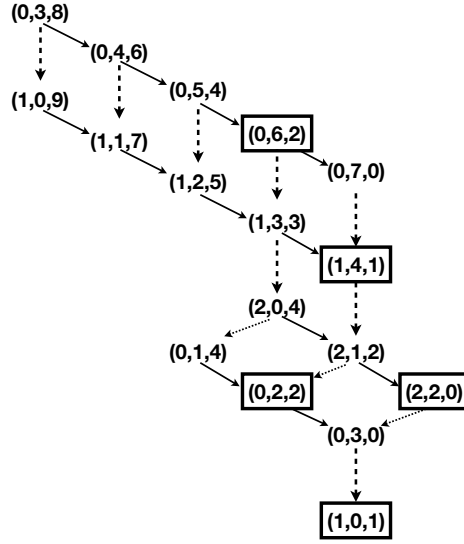


Figura 6. Un ejemplo de la digráfica  $H_{K_4 \setminus e, (0,3,8)}$  con el núcleo marcado.

### Nim-O-Do para $S_n$ : el juego Nim

Cuando la gráfica  $G$  es  $S_n$ , la estrella con  $n + 1$  vértices, el juego Nim-O-Do es equivalente al juego Nim. En este caso  $H_{S_n, c}$  es la digráfica isomorfa a la retícula  $D_r$ , la retícula de divisores de  $r$ , para algún  $r \in \mathbb{Z}$ , donde  $r = \prod_{1 \leq i \leq n} p_i^{c(i)}$  y cada  $p_i$  es un primo. Observe que dirigimos  $r' \xrightarrow{v_j} r''$  si y solo si  $r'/r'' = p_j$  para algún  $1 \leq j \leq n$ . Otra forma de obtener la digráfica  $H_{S_n, c}$  es tomando como vértices todas las  $n$ -tuplas  $(b_1, \dots, b_n)$  con  $0 \leq b_i \leq c(i)$ . Colocamos una flecha con color  $v_j$   $(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{v_j} (b'_1, \dots, b'_n)$  si y solo si existe un índice  $j$  tal que  $b'_j = b_j - 1$  y  $b'_i = b_i$  para todos  $i \neq j$ .

Usando la segunda representación de  $H_{S_n, c}$  del anterior párrafo, tomemos el conjunto de vértices  $N$  con suma Nim igual a cero, o sea, los  $(b_1, \dots, b_n)$  con  $b_1 \oplus \dots \oplus b_n = 0$ . En 1901, Charles L. Bouton probó en [11] que el conjunto  $N$  es el núcleo por t.d.m. de  $H_{S_n, c}$ . Claramente,  $N$  es independiente por t.d.m., ya que para cada  $i$ ,  $b_1 \oplus \dots \oplus b_n = b_i \oplus (b_1 \oplus \dots \oplus b_{i-1} \oplus b_{i+1} \oplus \dots \oplus b_n) = 0$  y  $b_i$  es la única solución para esta última ecuación. Por lo cual no podemos disminuir  $b_i$  para obtener otro elemento de  $N$ . A continuación damos la prueba de que es absorbente, esta prueba aparece en [4].

**Proposición 1.** *Si  $(b_1, \dots, b_n) \notin N$ , existe un índice  $j$  y un entero  $z > 0$  tal que  $(b'_1, \dots, b'_n) \in N$ , donde  $b'_i = b_i$  para todos  $i \neq j$  y  $b'_j = b_j - z$ . En particular, hay una t.d.m. en  $H_{S_n, c}$  del vértice  $(b_1, \dots, b_n)$  al vértice  $(b'_1, \dots, b'_n) \in N$ .*

*Demostración.* Sea  $0 < p = b_1 \oplus \dots \oplus b_n$  y sea  $r$  el único entero tal que  $p \oplus r = 0$ . Sea  $k_0$  el dígito en base 2 más a la izquierda en  $p$  diferente de 0. Entonces, debe existir un  $j$  tal que  $b_j$  tiene el  $k_0$  dígito en base 2 diferente de 0. Además, como  $p \oplus r = 0$ , el dígito más a la izquierda en  $r$  diferente de 0 es  $k_0$ . Invitamos al lector a que compruebe que para el entero  $q = b_j \oplus r$ , se tiene que  $q < b_j$ . Ahora, basta tomar  $z = b_j - q$ .  $\square$

## 5. Conclusiones

Dada una configuración  $c$  en una gráfica  $G$  con un vértice marcado como  $q$ , encontrar la configuración crítica correspondiente no es un problema trivial. Sin embargo, hay un algoritmo que produce la configuración crítica en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada, si la gráfica es simple. Este algoritmo se describe en [16]. Para algunas familias de gráficas esta búsqueda es más rápida, por ejemplo, el trabajo [12] proporciona un algoritmo de complejidad aritmética lineal para calcular la configuración crítica de una configuración general en la gráfica completa  $K_n$ . Aquí el tamaño de una gráfica o digráfica será el número de aristas o flechas que esta tenga.

Decidir si dos configuraciones son equivalentes es un problema similar. Pero para algunas gráficas este problema de decisión es mucho más fácil. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado de [12]

**Lema 5.1.** *Dos configuraciones  $u$  y  $v$  son equivalentes en  $K_n$  si y solo si para  $1 \leq i, j \leq n - 1$ ,  $u(i) - u(j) \equiv v(i) - v(j) \pmod{n}$*

Por lo tanto, podemos asumir que los jugadores pueden calcular, para una configuración del juego Nim-O-Do, la configuración crítica correspondiente en tiempo polinomial en el tamaño de  $G$  y la suma de las entradas de  $c$ . El tiempo y memoria necesarios para calcular  $H_{G, c}$  es proporcional a su número de vértices, que es a lo más  $\nu(c) = \prod_i c(i)$ . El cálculo de la cerradura por t.d.m de una digráfica coloreada se puede realizar en tiempo polinomial en el tamaño de la digráfica. Además, encontrar el núcleo en esta digráfica acíclica es también computable en tiempo polinomial en su tamaño. Por lo tanto, para una configuración fija dada  $c$  en una gráfica fija general  $G$  con un vértice marcado como  $q$ , encontrar una estrategia es computable en tiempo polinomial en el tamaño de  $G$  y  $\nu(c)$ . Sin embargo, para una gráfica fija  $G$  con un vértice marcado como  $q$ , encontrar una estrategia para todas las configuraciones

posibles es un problema más interesante. Hemos dado esta estrategia para gráficos con tres vértices, y hay una estrategia para cualquier gráfica  $S_n$  con el vértice central marcado como  $q$ . Sería muy interesante encontrar una estrategia para gráficas completas o para cualquier otra familia de gráficas.

## Bibliografía

- [1] R. Anderson, L. Lovász, P. Shor, J. Spencer, É. Tardos y S. Winograd, «Disks, balls, and walls: analysis of a combinatorial game», *Amer. Math. Monthly*, vol. 96, núm. 6, 1989, 481–493, <http://dx.doi.org/10.2307/2323970>.
- [2] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld, «Self-organized criticality», *Phys. Rev. A (3)*, vol. 38, núm. 1, 1988, 364–374, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.38.364>.
- [3] M. Baker y S. Norine, «Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph», *Adv. Math.*, vol. 215, núm. 2, 2007, 766–788, <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>.
- [4] C. Berge, *Graphs and hypergraphs*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York., 1976, Translated from the French by Edward Minieka, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6.
- [5] N. L. Biggs, *Algebraic graph theory*, 2.<sup>a</sup> ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [6] ———, «Chip-firing and the critical group of a graph», reporte técnico LSE-CDAM-96-03, Centre for Discrete and Applicable Mathematics, London School of Economics, London, January 1996.
- [7] ———, «Chip-firing and the critical group of a graph», *J. Algebraic Combin.*, vol. 9, núm. 1, 1999, 25–45, <http://dx.doi.org/10.1023/A:1018611014097>.
- [8] A. Björner y G. M. Ziegler, «Introduction to greedoids», en *Matroid Applications*, ed. N. White, Cambridge Univ. Press, 1992, 284–357.
- [9] A. Björner y L. Lovász, «Chip-firing games on directed graphs», *J. Algebraic Combin.*, vol. 1, núm. 4, 1992, 305–328, <http://dx.doi.org/10.1023/A:1022467132614>.
- [10] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
- [11] C. L. Bouton, «Nim, a game with a complete mathematical theory», *Ann. of Math. (2)*, vol. 3, núm. 1-4, 1901/02, 35–39, <http://dx.doi.org/10.2307/1967631>.
- [12] R. Cori y Y. Le Borgne, «On computation of Baker and Norine’s rank on complete graphs», *Electron. J. Combin.*, vol. 23, núm. 1, 2016, Paper 1.31, 47.
- [13] S. Corry y D. Perkinson, *Divisors and sandpiles*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, An introduction to chip-firing.
- [14] D. Dhar, «Self-organized critical state of sandpile automaton models», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, núm. 14, 1990, 1613–1616, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1613>.
- [15] R. Diestel, *Graph theory*, 5.<sup>a</sup> ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer, Berlin, 2018, Paperback edition of [ MR3644391].
- [16] J. Heuvel, «Algorithmic aspects of a chip-firing game», *Combin. Probab. Comput.*, vol. 10, núm. 6, 2001, 505–529, <http://dx.doi.org/10.1017/S0963548301004886>.
- [17] C. J. Klivans, *The mathematics of chip-firing*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2019.
- [18] C. Merino, «The chip-firing game», *Discrete Math.*, vol. 302, núm. 1-3, 2005, 188–210, <http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2004.07.033>.
- [19] V. E. Ruiz Pacheco, «Tres juegos combinatorios: Juego de fichas, Are-Nim y Nim-O-Do.», Tesis de Licenciatura, Diciembre 2019.
- [20] J. Spencer, «Balancing games», *J. Combinatorial Theory Ser. B*, vol. 23, núm. 1, 1977, 68–74.