INTRODUCCION AL ANALISIS DE SERIES DE TIEMPO (*)

Enrique Alduncin Abitia (**)

Una serie cronológica o serie de tiempo (1) es una sucesión de valores (observaciones) de una variable discreta cualquiera ordenada respecto a los números naturales: 1, 2, 3, ... los valores de la serie Z se denotan con subíndices Z_1, Z_2, Z_3,... y en general por Z_t. Los números naturales representan intervalos iguales y no tienen que ser necesariamente temporales, aunque es útil pensar en términos del tiempo como el dominio de la sucesión, esto es como una variable independiente implícita explicativa del ordenamiento de la serie.

Si aceptamos que en la mayoría de los fenómenos el futuro es inherentemente incierto y si se desea a través del análisis

---

(*) Recibido en Julio de 1975.

(**) Profesor de Asignatura del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Nota del Comité Editorial: Este Comité considera que los métodos expuestos en el presente artículo han sido sistematizados y desarrollados por Box G. E.P. y Jenkins G.M.

(1) El nombre de uso más general: series de tiempo es una mala traducción de " Time Series" y aún esta denominación no es acertada ya que tiende a confundir sucesión con serie, siendo esta última una suma de las sumas parciales de una sucesión donde el subíndice t varía de uno a infinito, implicando el concepto de límite.

de las series de tiempo, esto es de la historia relevante al fenómeno, hacer predicciones, una alternativa aceptable es considerar los intervalos de los futuros sucesos y considerar además las probabilidades asociadas a cada uno de estos valores. En -- otras palabras, consideraremos las Z_t que nos representan o nos reflejan un fenómeno de la realidad como variables aleatorias. Luego pronóstico en este sentido técnico es muy diferente a su uso común equivalente al de profecía, ya que en el primer sentido únicamente nos dice que sucesos pueden ocurrir y con que probabilidad y en el mejor de los casos que suceso tiene la mayor probabilidad de ocurrencia y en que intervalo con cierta probabilidad lo podemos situar. Una profecía en cambio supone un conocimiento exacto y sin variación del futuro, es determinista e implica un solo futuro en contraposición con la pluralidad de - futuros y sus variaciones que se consideran en predicción.

La naturaleza de los pronósticos no sólo es incomprendida - en el sentido mencionado, sino que también frecuentemente el -- proceso de preparar y efectuar pronósticos está divariado del - proceso de tomar decisiones. Los pronósticos pueden ser más o - menos precisos dependiendo de las técnicas y métodos que se emplean en su elaboración, esto implica una función de costo y su uso en la toma de decisiones, implica un beneficio, por lo tanto el problema de predicción y toma de decisiones, esto es el problema de predicción y control debe ser considerado como una unidad.

Los pronósticos dan un marco de referencia para actuar con mayor información. Es conveniente que el hombre de acción tome sus decisiones en base a expectativas racionalmente planteadas y que complemente así su información no cuantificable y su juicio personal.

La relación entre predicción y control resulta clara en la anécdota que se atribuye a un famoso filósofo historicista Alemán, del que se decía "Ha profetizado el fin del Mundo y ahora está haciendo todo lo posible para que así sea".

Conociendo los futuros posibles y la probabilidad de su ocurrencia se puede actuar sobre ellos tratando de optimizar la - estrategia que produzca la mayor utilidad.

Este proceso será más efectivo si además se sabe de que manera están relacionadas entre sí las distintas variables que definen el problema que se está resolviendo.

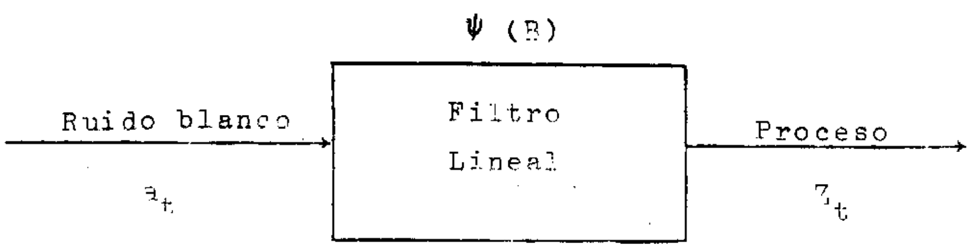
La precisión del pronóstico también depende del plazo a que se quiera predecir, mientras más lejos del presente mayor incertidumbre y las curvas que limitan los intervalos de confianza - (intervalos donde con una probabilidad dada usualmente muy alta y centrados en el valor pronosticado, se encontrará el valor -- real cuando este ocurra) se abrirán más y más hasta llegar a un punto en que el intervalo sea tan grande que el pronóstico ya - no sea de utilidad.

El plazo también determina la técnica para efectuar el pronóstico. Para largo plazo (de 5 ó 6 años en adelante) generalmente basta con ajustar y extrapolar una curva que indique la tendencia de la serie y que refleje los supuestos teóricos de su comportamiento futuro.

En este caso es cierta la frase "Predecir es extrapolar", si bien para los plazos mediano y corto (hasta 4 años y menos) el futuro se puede ver como una "caja negra" que genera sucesos de acuerdo a cierta distribución probabilística, siendo lo importante descubrir esta distribución.
O sea que el pronóstico se puede hacer encontrando un proceso estocástico que genere la serie que se desea analizar y usando las observaciones de la serie como valores iniciales, generar nuevos valores de manera aleatoria a través del proceso estocástico; claramente en este caso predecir no es extrapolar.

Un método que sintetiza la mayoría de técnicas útiles en el análisis de series cronológicas y que tiene el enfoque anterior es el establecido por Box y Jenkins [1],[2],[3],[4] , los modelos estocásticos que emplean se basan en la idea que en una serie de tiempo los valores sucesivos están muy correlacionados con respecto al tiempo (esto es, son altamente de pendientes) y pueden ser considerados como generados por una serie de adiciones aleatorias independientes a_t que son elementos de una cierta distribución probabilística fija con -- "media cero". Un proceso con las anteriores características se denomina ruido blanco o interferencia aleatoria. En particular la sucesión de variables aleatorias independientes e - idénticamente distribuidas con media cero pueden tener una - distribución normal aunque no necesariamente.

El ruido blanco a_t que es un proceso sencillo y conocido se transforma a través de un filtro lineal* en el proceso - Z_t como se muestra gráficamente:



El filtro lineal representado por $\psi(B)$, aplicado a a_t - produce Z_t, en símbolos: $\psi(B)\ a_t = Z_t$

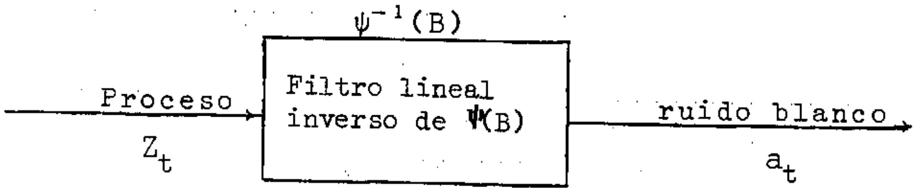
---

* Un filtro lineal es una función matemática lineal, el nombre proviene de una analogía con un filtro lineal (dispositivo físico que transforma de cierta manera una corriente eléctrica que pasa a través de él) de uso común en electrónica e ingeniería eléctrica. Similar origen -- tiene el término ruido blanco y otros de frecuente uso.

Más adelante se verá qué forma matemática tiene el operador $\psi(B)$ el cual se llama función de transferencia, lo que importa notar ahora es que $\psi(B)$ tiene inverso $\psi^{-1}(B)$, esto es que la identidad $\psi^{-1}(B)\ \psi(B) = 1$ es cierta, por lo que aplicando $\psi^{-1}(B)$ a la ecuación $\psi(B)a_t = Z_t$ produce:

$$\psi^{-1}(B)\psi(B)a_t = \psi^{-1}(B)Z_t, \text{ o sea } a_t = \psi^{-1}(B)Z_t$$

ecuación que implica el que la serie Z_t que representa un proceso complejo se pueda estudiar a través de un proceso estocástico simple y conocido como es a_t, gráficamente se tiene:

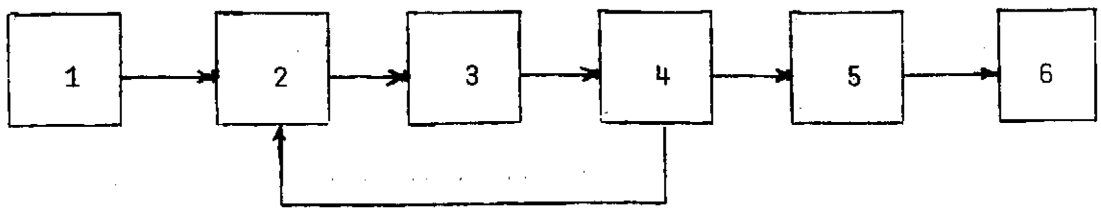


El método que implementa la idea anterior es iterativo y necesita que la serie tenga una historia de al menos 50 observaciones*. Este método se puede explicar por el siguiente diagrama; donde cada cuadro representa una etapa del proceso que

---

* Se pueden utilizar series con menos observaciones pero dando lugar a una pluralidad de modelos, hecho que no produce inconveniencias graves.

se explica a continuación:



Donde:

1: Postula una clase muy general de modelos, útil para la gran mayoría de las aplicaciones.

2: Identifica una subclase de la clase general utilizando las observaciones y la información que se tenga de la serie.

3: Estima los parámetros del modelo sugerido en la etapa de identificación.

4: Diagnostica si el modelo es adecuado: bondad de ajuste, se compara con otros modelos similares o sobreparametrizados (que incluyen más parámetros), se analizan los residuos con análisis espectral, etc. En resumen se pregunta: ¿Es el modelo adecuado para representar la serie? Si la respuesta es negativa se regresa a la etapa de identificación nuevamente, ahora con mayor información para seleccionar la subclase correcta. Si la respuesta es afirmativa se procede a:

5: Pronóstico, utilizando el modelo y

6: Control, sabiendo qué puede pasar y con qué probabilidad, actuar en la dirección que optimiza la estrategia que produce la mayor utilidad.

Las técnicas econométricas clásicas de la predicción se basan en el análisis de regresión y sus variaciones, las cuales producen modelos que corresponden a una subclase de la clae general que consideran Box y Jenkins, buenas exposiciones de los métodos clásicos se encuentran en Johnston [5], Malinvand [6], Saracho y Escobedo [7], Wonnacott [8], etc.

Aunque frecuentemente en la práctica se violan los supuestos básicos de estas técnicas produciendo relaciones falsas entre series y conclusiones erróneas. Por lo cual se deben trabajar estas técnicas dentro del marco establecido por el método de Box y Jenkins, principalmente en lo referente a las etapas de diagnóstico e identificación.

Como se mencionó anteriormente el análisis de una serie debe estar relacionado con el uso de la información que se desea obtener de ella, así como de la forma y el número de observaciones que tenga la serie. Cuando se desean comparar distintos valores de una serie ó cuando se desea tener una interpretación sencilla y un pronóstico operativo en corto tiempo, es útil usar la idea de descomponer la serie cronológica en -

componentes o factores, la estructura puede tener varios supuestos, por ejemplo que ésta tiene una estructura multiplicativa de la forma: Z = TGSI. Donde Z representa los datos originales, T el factor de tendencia a largo plazo ó tendencia secular, G el factor de movimientos cíclicos, S el factor de movimientos estacionales e I el factor de variaciones irregulares ó aleatorias. En Lange[9], Stuart y Kendall [10], Soto Baez y Reyes M. [11], se encuentran las técnicas y métodos para efectuar este tipo de análisis. Solamente para calcular el factor de tendencia se debe evitar el empleo de "promedios móviles", ya que como se ha demostrado, puede introducir en la tendencia una oscilación espurea que no esté realmente presente en la serie.

También las técnicas agrupadas bajo el nombre genérico de Análisis Espectral son de gran utilidad en el análisis de series cronológicas, la idea fundamental en que se basan es suponer la serie como una suma de senoides o, cosenoides de la forma: $A_n \cos(2\pi nt/T + \xi_n)$, donde A_n son las amplitudes de las cosenoides correspondientes a las frecuencias n/T, donde T es el pediodo, ξ_n es una componente aleatoria de la fase con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Simbólicamente se tiene:

$$Z_t = A_o + A_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \xi_1\right) + A_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + \xi_2\right) + - - -$$

Otra forma equivalente a la anterior de representar a la - serie Z_t como una suma de senoides y cosenoides con diferentes frecuencias es a través del análisis de Fourier, donde Z_t tiene la forma:

$$Z_t = A_o + \sum_{n=1}^{q} (A_n \cos 2\pi nt/T + B_n \operatorname{sen} 2\pi nt/T) + e_n$$

Donde el número de observaciones es impar e igual a $N = 2q + 1$; B_n son las amplitudes asociadas a la senoide y e_n representa una interferencia o error agregado a la suma de senoides y cosenoides con una cierta distribución, por lo demás se usa la misma notación de la ecuación anterior.

Como se ve el supuesto básico de este tipo de análisis es suponer que la serie tiene un comportamiento cíclico.

La mayor desventaja en esta clase de análisis es que es del tipo no-paramétrico, esto es se requiere estimar un conjunto - infinito o muy grande de coeficientes de la función representativa, en vez de un pequeño número como es usual en estadística, lo cual reduce la eficiencia de la estimación. También su empleo se basa en la estacionalidad de la serie en el sentido que una parte de ella debe ser similar a otra parte cualquiera en diferentes intervalos de tiempo, sin importar que tan separados estén.

O sea que la serie no se afecta por desplazamientos respecto al tiempo. Es por estos motivos que su uso es más efectivo en el análisis de residuos* de una serie y para comprobar si permanecen componentes periódicos y con qué frecuencias.

Las referencias relevantes son Jenkins [12], Jenkins y -- Watts [13], Box, Jenkins y Bacon [14] y Granger y Hatanaka -- [15], este último dedicado a series económicas y aplicaciones, si bien efectúa correcciones estacionales inapropiadas.

Como se ha visto existen una gran variedad de técnicas y métodos para analizar series cronológicas, así como para predecir sus valores futuros, las técnicas que se mencionan no - son todas las existentes, pero sí las que han demostrado ser las más útiles en la práctica. El empleo de una o de otra o - de varias de ellas, depende, como se ha visto, de varios factores, todas tienen sus limitaciones y sus ventajas, de tal - modo que en muchos casos unas técnicas complementan a otras.

Todas las técnicas anteriores son posibles gracias a las computadoras electrónicas que procesan información a gran velocidad, en muchos casos se cuentan con programas que hacen - del análisis un proceso simple y rutinario, de modo que el -- usuario no tiene que ser un especialista y sólo necesita en--

---

* Por residuos se denomina a la diferencia entre la serie original y un -- modelo adecuado a ella.

tender las ideas de fondo y saber interpretar los resultados.

Para concluir se debe recordar que cualquier método científico del que se espere mucho, puede producir un uso poco crítico del mismo. En especial los métodos econométricos y estadísticos deben ser considerados como una herramienta analítica útil pero que puede producir conclusiones falsas y resultados erróneos si no son sus técnicas utilizadas con gran cuidado, sentido común y guiados sus pasos por una buena teoría basada en la observación y la reflexión.

EL METODO DE G.E.P. BOX Y G.M. JENKINS

En esta sección se amplían las ideas básicas en las cuales se cimienta este método de análisis. Se desarrolla el modelo general a partir de dos modelos estocásticos comunes, así como el modelo dinámico entre dos variables, después éste modelo cuando tiene asociado una interferencia o error y las nociones sobre su control. Se termina la sección con la discusión del modelo dinámico entre varias variables y los modelos periódicos. Ya se han dado las referencias relevantes para el lector que desee profundizar en el tema. Necesariamente se usará un poco más del simbolismo matemático en esta sección, pero no más allá del álgebra elemental.

En la introducción se vió que la serie Z_t se puede represen tar como $Z_t = \psi(B)A_t$, donde $\psi(B)$ es la función de transferencia de un filtro lineal y A_t es ruido blanco. La forma matemática - de $\psi(B)$ proviene de la representación de Z_t como una suma ponde rada de adiciones aleatorias A_t, esto es como:

$$Z_t = A_t + \psi_1 A_{t-1} + \psi_2 A_{t-2} + \ldots = \sum_{j=o}^{\infty} \psi_j A_{t-j}, \quad \text{donde}$$

$\psi_o = 1$ y las ψ_j son los pesos que se da a las A_t.

El uso del simbolismo matemático hace más simple el razonamiento y en particular el uso de operadores hace más simple el simbolismo matemático, por lo cual se usan extensivamente. Un - operador de gran utilidad es el de desplazamientos hacia atrás u operador retraso B, que operado en Z_t produce la Z_t anterior, esto es Z_{t-1}, en símbolos $EZ_t = Z_{t-1}$, igualmente operado en A_t - se tiene $BA_t = A_{t-1}$. En general $B^q Z_t = Z_{t-q}$ y $B^2 A_t = B(B\ A_t) = B\ A_{t-1} = A_{t-2}$. El operador de diferencias ∇, que dado A_t produce su diferencia con A_{t-1} esto es $\nabla A_t = A_t - A_{t-1}$ puede ser re-- presentado en función de B, ya que $(1-B)A_t = A_t - BA_t = A_t - A_{t-1}$ entonces $\nabla = (1-B)$. Como se ve el álgebra de los operadores es semejante al álgebra común, lo cual facilita aún más su uso.

Volviendo a la ecuación $Z_t = A_t + \psi_1 A_{t-1} + \psi_2 A_{t-2} + \ldots$ usando el operador retrazo B se tiene:

$Z_t = A_t + \psi_1 BA_t + \psi_2 B^2 A_t + \ldots = \psi(B) A_t$, esto es, la función de transferencia $\psi(B)$ es el polinomio en B:
$1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \ldots = \psi(B)$, lo cual permite escribir esta ecuación en forma clara, concisa y elegante. Si la sucesión ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... es finita o infinita, pero convergente se dice que el filtro lineal es estable y el proceso Z_t estacionario*.

Para postular la clase general de modelos de la primera etapa del método, es conveniente ver primero dos tipos de modelos que han sido de gran utilidad en la práctica.

Modelos Autoregresivos (AR).

En esta clase de modelos el valor actual del proceso se expresa como una combinación lineal de los valores pasados del proceso más una adición aleatoria A_t. Si $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$ donde μ es un parámetro que determina el nivel del proceso (que puede ser medido por "la media") tenemos:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + A_t$$

tilizando el operador retraso B, se puede escribir:

$$\tilde{Z}_t - \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} - \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} - \ldots - \phi_p \tilde{Z}_{t-p} = A_t$$

* Estacionario en el sentido que no lo afectan corrimientos en t, esto es su distribución no depende de t pero sí de sus diferencias $t_2 - t_1$, $t_p - t_{p-1}$, etc.

$$(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p) \tilde{Z}_t = A_t, \text{ si } \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$$

se tiene $\phi(B) \tilde{Z}_t = A_t$, de modo que el proceso autoregresivo se puede escribir en forma muy simple con el operador $\phi(B)$ y contiene p + 2 parámetros μ, ϕ_1, ..., ϕ_p y σ^2 la varianza -- del ruido blanco A_t.

El modelo autoregresivo es un caso especial del modelo - de filtro lineal, ya que $\phi(B)Z_t = A_t$ implica $Z_t = \phi^{-1}(B)A_t$ que es equivalente a $Z_t = \psi(B)A_t$ si $\Psi(B) = \phi^{-1}(B)$.

Modelo de Medias Móviles (MM) ó Promedios Móviles (PM). En esta clase de modelos el valor actual del proceso se expresa como una combinación lineal de las adiciones aleatorias pasadas más la adición aleatoria actual A_t. Por lo que el -- nombre de medias móviles o promedios móviles no es el adecuado ya que los coeficientes de la combinación lineal pueden o nó sumar uno. La representación matemática del anterior enunciado es:

$$Z_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2} - \ldots - \theta_q A_{t-q} =$$

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q)A_t = \theta(B)A_t, \text{ esto es}$$

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q) = \theta(B) \text{ por lo que } Z_t = \theta(B)A_t.$$

Este modelo tiene q + 2 parámetros:

$\mu, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ y σ^2

Ahora bien un proceso autoregresivo de primer orden es - equivalente a un proceso de promedios móviles infinito y al revés, ya que: $(1 - \phi_1 B) Z_t = A_t$, esto es $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + A_t$ implica $Z_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} A_t$, pero $(1 - \phi_1 B)^{-1} = 1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \ldots$ entonces $Z_t = (1 + \phi_1 B^1 + \ldots) A_t$, de tal modo que $\theta_i = -\phi_1^i$, $i=1, \ldots$

Por lo que si se unen los dos procesos en uno solo se -- puede esperar que el modelo mixto represente series de tiempo que ocurren en la práctica con un número mínimo de parámetros.

Así por ejemplo, si se tiene un proceso de medias móviles infinito, se puede usar en su lugar un proceso autoregresivo con un solo parámetro. Este principio de frugalidad ó ahorro de parámetros es muy importante no sólo por las facilidades - que se introducen en la estimación sino también porque se reducen las posibilidades de error, la estimación es más eficiente y la interpretación del proceso estocástico a que da lugar es más simple.

Modelos Mixtos Autoregresivos y de Promedios Móviles (AR-PM)

Este modelo como la unión de los dos anteriores se puede escribir como: $\phi(B)Z_t = \theta(B)A_t$, o sea desarrollando los operadores: $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p)Z_t =$

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_p B^q)A_t$$

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \ldots - \phi_p Z_{t-p} =$$

$$A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2} - \ldots - \theta_q A_{t-q},$$ de modo que el valor actual del proceso está dado por:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2} - \ldots - \theta_q A_{t-q} + A_t$$

El modelo mixto tiene p + q + 2 parámetros:

$$\mu,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_p,\ \theta_1,\ \ldots,\theta_q \text{ y } \sigma^2 .$$

Desde luego los parámetros de los anteriores modelos tienen que satisfacer ciertas condiciones para asegurar que representan procesos estacionarios*.

Modelos no estacionarios

La mayoría de los procesos en la realidad no son esta-- cionarios, sin embargo pueden tener comportamiento homogéneo

---

* Que los pesos del proceso equivalente representado en la forma --- $Z_t = \psi(B)\ A_t$ formen una sucesión convergente cuando $|B| < 1$. Para más detalles ver referencias en especial (4).

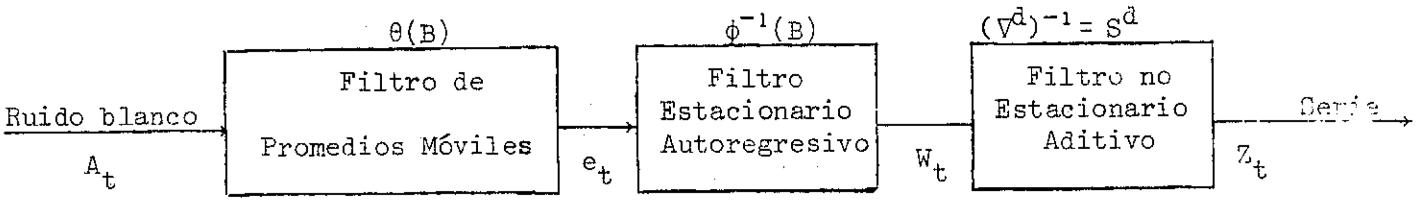
de cierto tipo, por ejemplo una serie puede tener variaciones en su tendencia respecto a un cierto nivel, pero cuando se analizan los comportamientos de la serie en cada tendencia, estos pueden ser semejantes.

Se ha visto que diferenciando un cierto número de veces -- una serie no estacionaria, esta presenta comportamiento estacionario. Así una serie no estacionaria por tener una tendencia, diferenciándola una vez resulta estacionaria, una serie - no estacionaria en tendencia y en variaciones de esta tendencia, resulta estacionaria si se toman segundas diferencias, etc. De modo que para tomar en cuenta este tipo de procesos es necesario añadir un término no estacionario al modelo mixto $\phi(B)Z_t = \theta(B)A_t$ en la parte autoregresiva, esto es consideraremos un -- operador más generalizado que incluya d diferencias de la serie original, tantas como sean necesarias para volver el proceso - estacionario. Como se vió $\nabla Z_t = (1 - B)Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ agregando este término tenemos $\psi(B) = (1 - B)^d \phi(B) = \phi(B)(1 - B)^d$ como el operador autoregresivo generalizado, entonces el modelo toma la forma:

$\psi(B)Z_t = \theta(B)A_t$ o sea $\phi(B)(1 - B)^d Z_t = \theta(B)A_t$ ó equivalentemente si $W_t = \nabla^d Z_t = (1 - B)^d Z_t$ se puede considerar el modelo $\phi(B)W_t = \theta(B)A_t$, como estacionario.

Este proceso se denomina *Autoregresivo Integrado y de Promedios Móviles* (*ARIPM*) de orden (p,d,q) siendo p el orden del operador autoregresivo, d el número de diferencias efectuadas en la serie original para obtener la estacionalidad y q el orden del operador de promedios móviles. Este modelo es muy general y capaz de representar la mayoría de series que se presentan en la práctica, adelante se verá qué modificaciones son necesarias para incluir periodicidades en este modelo.

Se puede pensar de la serie Z_t como generada por ruido blanco A_t que ha pasado a través de una serie de filtros lineales como se muestra en el siguiente esquema:



Donde la entrada al primer filtro es ruido blanco, su función de transferencia es el operador $\theta(B)$ y su salida es $e_t = \theta(B)A_t$, esto es una medida móvil de adiciones aleatorias independient ó ruido blanco de la forma: $e_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2} - \dots - \theta_q A_{t-q}$

El segundo filtro tiene por entrada al proceso e_t, su función de transferencia es $\phi^{-1}(B)$, de modo que su salida es $W_t = \phi^{-1}(B)e_t$ esto es $W_t = \phi_1 W_{t-1} + \dots + \phi_p W_{t-p} + e_t$ o sea un proceso autoregresivo en W_t más un error e_t. El tercer filtro tiene por entrada este último proceso W_t y función de transferencia

$(\nabla^d)^{-1} = S^d$* de modo que su salida es $Z_t = (\nabla^d)^{-1} W_t$ o sea - $Z_t = S^d W_t$, que es la serie original Z_t.

Como se ve el modelo general que se utiliza en la primera etapa tiene la forma: $\psi(B) Z_t = \phi(B) \nabla^d Z_t = \theta(B) A_t$, y sirve para analizar una serie Z_t de la cual se conozcan suficientes datos. Pero el problema más importante si se desea llegar a la etapa de control es el de saber cuál es la relación dinámica que existe entre varias variables. Se comenzará con la - relación dinámica entre dos variables, una considerada como - dependiente y la otra como independiente.

Modelos Dinámicos entre dos Variables

Cuando las variables son contínuas las relaciones dinámicas se pueden representar por medio de una ecuación diferencial con coeficientes constantes de la siguiente forma:**

$$(1 + A_1 D + A_2 D^2 + \dots + A_r D^r)\, Y(t) = (b_0 + b_1 D + \dots + b_s D^s) X(t - T)$$

donde D es el operador diferencial d/dt, las A_s y las b_s son

* $(\nabla^d)^{-1}(\nabla^d) = I$ y como ∇ es el operador diferencia, ∇^{-1} debe de ser el operador aditivo denotado por S. Si $\nabla = (1 - B)$ entonces $S = (1 - B)^{-1} = 1 + B + B^2 + \dots$

** Cuando las variables se escriban en mayúsculas representan la desviación de su medida, así $Y_t = y_t - \mu_y$ y $X_t = x_t - \mu_x$

los coeficientes y T es un parámetro que mide el retraso puro - entre la entrada X y la salida Y, esto es el tiempo que tarda - en sentirse en Y un cambio en X la variable instrumental. De modo similar cuando las observaciones de las variables son discretas se puede substituir el operador $D = d/dt$ por el operador de diferencias $\nabla = 1 - B$, obteniendo una ecuación similar a la anterior:

$$(1 + h_1 \nabla + h_2 \nabla_2 + \dots + h_r \nabla^r)\, Y_t =$$

$$(n_0 + n_1 \nabla + \dots + n_s \nabla^s)\, X_{t-b}$$

o sea en función de B:

$$(1 + S_1 B + S_2 B^2 + \dots + S_r B^r)\, Y_t =$$

$$(w_0 - w_1 B - \dots - w_s B^s)\, X_{t-b} =$$

$$(w_0 B^b - w_1 B^{b+1} - \dots - w_s B^{b+s})\, X_t$$

o sea

$$\delta(B)\, Y_t = w(B)\, B^b\, X_t = \Omega(B) X_t$$

Pensando nuevamente en términos de un filtro lineal se tiene la siguiente relación entre X_t y Y_t:

$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \dots = v(B)\, X_t$$

donde la función de transferencia $v(B)$ se puede expresar como el cociente de dos polinomios en B. Comparando la ecuación anterior con $\delta(B)\ Y_t = \Omega(B)\ X_t$, o sea $Y_t = \Omega(B)/\delta(B)\ X_t$, lo que implica:

$$v(B) = \Omega(B)\ /\ \delta(B) = \delta^{-1}\ (B)\Omega(B)$$

La sucesión v_0, v_1, v_2, ... generada por la función de transferencia se llama la función de impulso respuesta, si esta sucesión es convergente cuando $|B|<1$ se dice que el filtro es estable. A un cambio efectuado en X esto es a un cierto impulso, la respuesta en Y está dada por los pesos de la función de impulso respuesta; por ejemplo, si el retraso puro $b = 2$ los pesos de las v_s típicamente serían: $v_0 = v_1 = 0$, $v_2 = .25$, $v_3 = .35$, $v_4 = .35$, $v_5 = .10$, $v_6 = .05$ y $v_n = 0$ para $n \geq 7$. Esto es, la función de impulso respuesta dice en cuanto tiempo y en que forma una variación en X se ve asimilada en una variación en Y.

El problema de estimar la relación dinámica entre dos variables se ve complicado en la práctica por la presencia de una interferencia o ruido que oculta la verdadera relación entre X y Y de modo que hay que considerar el modelo:

$$Y_t = v\ (B)\ X_t + N_t$$

donde X_t y N_t(el ruido) son independientes. N_t en particular puede ser representado por un modelo de la forma $\varphi(B)N_t = \theta(B)A_t$, donde A_t es ruido blanco, entonces $N_t = \varphi^{-1}\ (B)\theta(B)A_t = \psi(B)A_t$.

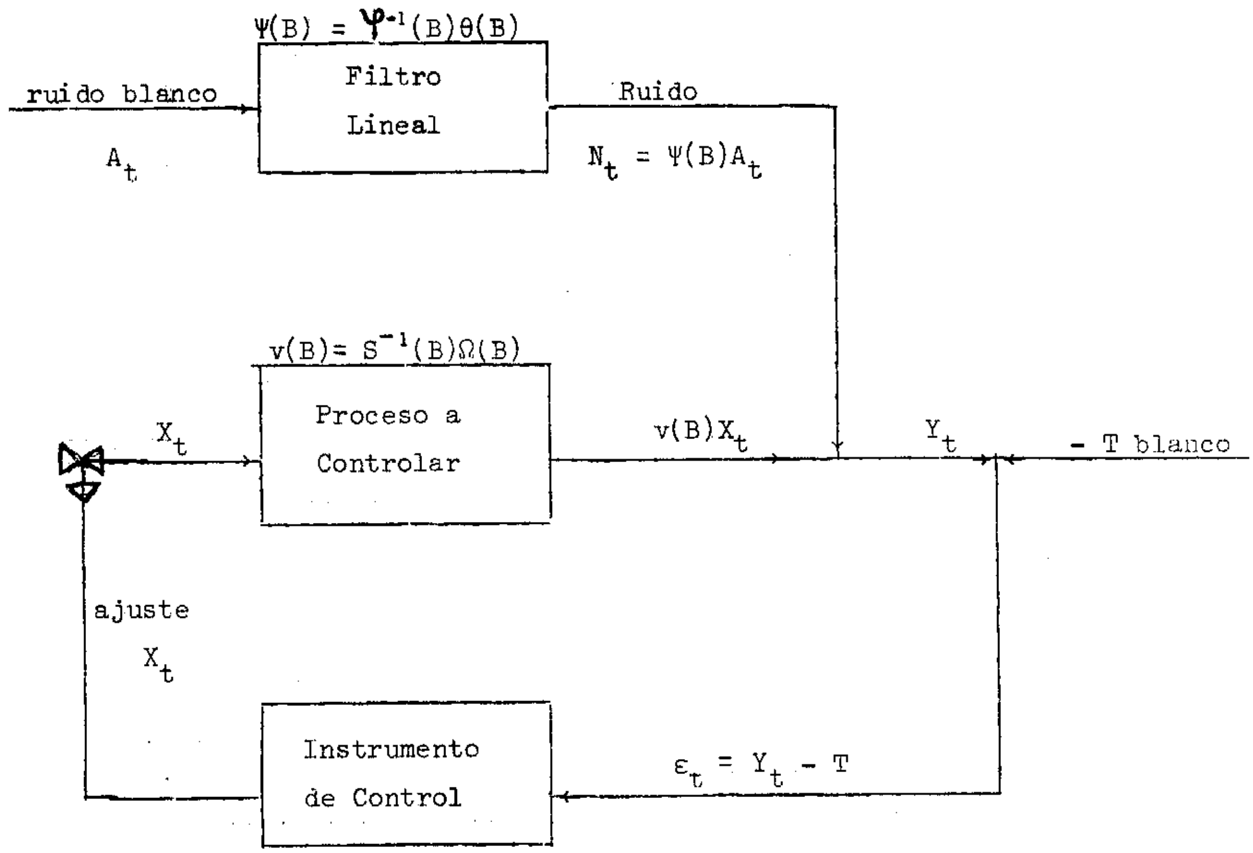
Entonces la relación entre las dos variables es:

$$Y_t = v(B)\ X_t + \psi(B)\ A_t =$$

$$S^{-1}\ (B)\,\Omega\,(B)\ X_t + \varphi^{-1}(B)\ \theta(B)\ A_t$$

de modo que en la práctica hay que estimar dos funciones de -- transferencia, aquella que describe al ruido: $\psi^{-1}(B)\theta(B)$ y --- aquella que describe la relación dinámica: $v(B) = S^{-1}\ (B)\Omega(B)$.

En el siguiente diagrama se representan las ideas anteriores:



La parte superior del diagrama representa la formación del ruido a través de ruido blanco pasado por un filtro lineal. La parte media del diagrama representa la suma del ruido o interferencia con la relación dinámica entre X y Y de tal modo que produce la Y_t observada: $Y_t = v(B)X_t + N_t$. La etapa inferior del diagrama representa la etapa de control del proceso que se explicará a continuación.

El proceso de control es un intento por compensar los disturbios que afectan a un sistema. Así supóngase que se desea mantener el valor de Y_t a un valor fijo óptimo T, a este valor se le llama blanco. La diferencia entre Y_t y T, produce un error $\varepsilon_t = Y_t - T$. El proceso de control tratará de minimizar ε_t, o sea tratará que las desviaciones de Y_t respecto al valor deseado T sean mínimas. Para este fin se pueden pronosticar las desviaciones del blanco que ocurrirían si no se aplicara ningún - control y después calcular el ajuste necesario en la variable instrumento o independiente X_t para calcular la desviación.

Para hacer el pronóstico de la desviación es necesario conocer las funciones de transferencia $\Psi(B)$ y $v(B)$ del ruido y de la relación dinámica respectivamente.

La ecuación de control puede ser una función de los ajustes efectuados en el pasado, el ajuste actual $x_t = X_t - X_{t-1}$, y -- los errores ε_t, en simbolismo matemático se tiene:

$$x_t = \eta_1 X_{t-1} + \eta_2 X_{t-2} + \ldots + m_0\ \varepsilon_t + m_1 \varepsilon_{t-1} + m_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

donde η_1, η_2, ..., m_0, m_1, ... son constantes. Desde luego el control puede ser más sofisticado que el tipo de control descrito anteriormente, una primera generalización sería considerar al blanco fijo T, en vez de constante como una función de t de cierto tipo, etc.

Modelos Dinámicos entre varias variables

El tratamiento del problema de varias variables es una extensión lógica del tratamiento del problema de dos variables.

La idea básica que se maneja es utilizar los residuos de los modelos que se ajustan a cada serie, a estos residuos se les denomina series pre-blanqueadas. Así por ejemplo si la serie Z_t se puede representar por el modelo estocástico $\varphi(B)Z_t = \theta(B)\alpha_t$, entonces $\alpha_t = \theta^{-1}(B)\ \varphi(B)Z_t$ es la serie pre-blanqueada.

Para cada una de las variables independientes pre-blanqueadas se determinan los coeficientes de la correlación cruzada con la variable dependiente pre-blanqueada, estos coeficientes son directamente proporcionales a la función de impulso respuesta v(B).

Después del análisis de éstos coeficientes se determina -- cual de las variables independientes tiene la mayor influencia sobre la variable dependiente, se ajusta el modelo dinámico que relaciona éstas dos variables y se obtienen los residuos que a su vez determinarán al efectuar las correlaciones cruzadas con las variables independientes pre-blanqueadas restantes cual -- tiene la mayor influencia sobre los residuos del primer modelo, se ajusta un modelo entre la variable independiente de mayor - influencia y los residuos del primer modelo obteniéndose a su vez nuevos residuos. Se repite el proceso con todas las variables independientes pre-blanqueadas restantes, tratándolas entonces en un orden de influencia decreciente en la variable dependiente.

Por último se combinan todo este conjunto de modelos dinámicos con dos variables, eliminando las series residuales obtenidas en cada etapa del proceso y se vuelven a estimar los parámetros del modelo integrado para tener un mejor ajuste.

Modelos Estacionales

Se entiende por serie estacional aquella que se repite con un cierto período o cuasiperíodo, por ejemplo usualmente si los datos de la serie son mensuales el período será de un año, esto debido a las fluctuaciones ocacionadas por el movimiento de translación de la tierra alrededor del Sol. La mayoría de las series económicas mensuales tienen esta periodicidad. El modelo que se ha visto es capaz de tomar en cuenta cualquier fenómeno - estacional o períodico agregándole factores multiplicativos.

Se considerará nuevamente la idea de fondo de este método, - que consiste en comparar una observación dada, en una serie con un cierto período conocido, no con la anterior o anteriores a -- ella, sino con las observaciones situadas a un número múltiplo - del período. Esto es si se quiere comparar diciembre de un año - dado, no sólo debe ser comparado con noviembre, sino que también con los datos de diciembre de los años pasados. Esto implica ajustar un modelo no estacional a los datos Z_t, Z_{t-12}, Z_{t-24}, ..., - Z_{t-k12}. Para efectuar esta selección de la serie original debe - usarse el operador $(1 - B^s) = \nabla_s$, donde $S = 12$ es el período, - de modo que el modelo puede escribirse:

$$\Phi\ (B^s)\ \nabla_s^D\ Z_t = \Theta\ (B^s)\ \alpha_t$$

Donde $\Phi(B^s)$ es un operador autoregresivo en S, esto es tiene la forma $1 + \Phi_1 B^s + \Phi_2 B^{2s} + \ldots + \Phi_p B^{ps}$, $\Theta(B^s)$ es un operador de medias móviles en S, de la forma $1 - \theta_1 B^s - \theta_2 B^{2s} - \ldots - \theta_Q B^{Qs}$, D es el número de diferencias que es necesario tomar para lograr que el proceso sea estacionario en el sentido que no le afecten desplazamientos respecto al tiempo. Se tiene α_t y no A_t ruido - blanco, porque en general los errores de este modelo estarán co rrelacionados. Si se ajusta un modelo a las α_t se tendrá:

$$\phi(B)\ \nabla^d\ \alpha_t = \theta(B)\ A_t$$

que es el modelo de Box y Jenkins que ha aparecido anterior-- mente. Además comunmente los parámetros de los modelos que re presentan los datos de cada mes respecto a un mes dado se pue den asumir aproximadamente iguales, por lo que basta con ajus tar uno de ellos. Así substituyendo la última ecuación en la penúltima se tiene un modelo multiplicativo estacional:

$$\Phi_p(B)\ \Phi(B^s)_P\ \nabla^d \nabla_s^D\ Z_t = \Theta_q(B)\ \Theta_Q(B^s)\ A_t$$

Las letras minúsculas representan aquella parte del modelo que describe las variaciones mensuales, y las letras mayúscu- las representan las variaciones que tienen lugar anualmente.

El modelo se denomina de orden (p, d, q) X $(P, D, Q)_s$ y - cada letra representa el grado del polinomio correspondiente a cada factor ó el número de diferencias y s el período. Del mismo modo se pueden construir modelos más generales. Otra -- forma de tomar en cuenta el comportamiento periódico de una - serie estacional es a través del operador autoregresivo. Ya - que este operador aplicado a Z_t e igualado a cero produce la función de pronóstico eventual, si se consideran soluciones de la ecuación característica asociada a este operador que sean - complejas, producirán una función de pronóstico que sea una -- combinación de senoides y cosenoides. Como ejemplo se puede -- considerar una serie mensual con período anual. Considerando un operador autoregresivo de segundo orden que produzca raíces -- complejas, se tendrá una función de pronóstico en forma de una senoide con frecuencia y amplitud, que se irán adaptando a los datos de la serie. Un operador de este tipo puede ser:

$$\Phi(B) = (1 - 3B + B^2)$$

ya que la solución de esta ecuación de diferencias produce una senoide como se puede comprobar.

BIBLIOGRAFIA.

Las siguientes referencias y comentarios pueden ser de utilidad al estudioso que se inicie en el tema. En ellas encontrará a su vez más referencias si desea profundizar y adentrarse más en algún tópico.

[1] G.E.P. BOX Y G.M. JENKINS, *"Some recent advances in Forecasting and Control I"*. Applied Stat. 17, 91, 1968. Introducción a las ideas de Box y Jenkins en forma rápida y clara.

[2] G.E.P. BOX Y G.M. JENKINS, *"Discrete Models for Forecasting and Control"*. Encyclopedia of Linguistics and Control, 162. Pergamon Press 1969. Un libro interesante donde se reproduce casi en la misma forma el artículo anterior.

[3] G.E.P. BOX Y G.M. JENKINS, *"Time Series Analysis, Forecasting and Control"*.Holden- Day 1970. El método de Box y Jenkins, implementado, numerosos ejemplos, fácil lectura, un libro muy completo.

[4] G.E.P. BOX, G.M. JENKINS Y D.W. BACON, *"Models for Forecasting and nonseasonal time Series"*. *"Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series"* Ed. B. Hamls 271, John Wiley N.Y. 1967. Además

de las ideas del artículo de 1968, artículos importantes en métodos espectrales, se utilizan matemáticas no elementales. Para el lector más especializado.

[5] **J. JOHNSTON,** *"Econometric Methods"*. Mc. Graw-Hill,1963.

[6] **MALINVAND E.,** *"Métodos Estadísticos de la Econometría"*. Dunod 1964. Añil, Barcelona. Un texto de econometría avanzada, casi enciclopédico. Se utilizan - matemáticas elevadas. Un buen texto.

[7] **SARACHO A. Y ESCOBEDO G.** ,*"Métodos de Pronóstico de Variables Financieras"*. Documento del Depto. de - Estudios Económicos del Banco de México, S.A. -- J (A) 70/16. Exposición clara del análisis de regresión e incluye un interesante modelo econométrico de 25 ecuaciones.

[8] **R.J. WONNACOTT Y T.H. WONNACOTT,** *"Econometrics"*. John - Wiley & Sons. 1970. Texto de econometría tipo -- Johnston aunque más didáctico, posiblemente remplace a éste.

[9] **O. LANGE,** *"Introducción a la Econometría"*. Fondo de Cultura Económica, México 1968. Texto introductorio, casi no utiliza matemáticas. A pesar del gran número de errores tipográficos se puede leer con - gran provecho por el principiante.

[10] **M.G. KENDALL Y A. STUART**, *"The Advanced Theory of Statistics"*. En tres volúmenes Griffin 1961, 63, 66. La Biblia de la estadística, el tercer volumen - incluye los métodos más usuales en el análisis - de series de tiempo, no incluye el método de Box y Jenkins.

[11] **L. SOTO BAEZ Y L. REYES M.**,*"Análisis de Series Cronológicas, Ajuste por variaciones estacionales e irregulares"*. Documento del Departamento de Estudios Económicos del Banco de México, S.A. 16 de Julio, 1966. Estudio didáctico de fácil lectura, con - ejemplos centrados en la práctica.

[12] **JENKINS G.M. Y WATTS D.G.**, *"Spectral Analysis and its -- Applications"*. Holden-Day 1968. Texto moderno para ingenieros y científicos, incluye capítulos - en Probabilidad y Estadística, así como diagramas de flujo para los programas de las técnicas que expone.

[13] **JENKINS, G.M.**, *"Some examples of and Comments on Spectral Analysis"*. También publicado con el título de "A *Survey of Spectral Analysis*" .Applied Stat. Vol.- XIV, 1, 1965. Introducción con un mínimo de matemáticas a las técnicas de Análisis Espectral.

[14] G.W.J. **GRANGER Y HATANAKA**, "*Spectral Analysis of Economic Time Series*". Princeton U. Press, Princeton 1964. Texto menos claro que el de Jenkins y Watts pero con aplicaciones a economía. Leer teoría en este último y aplicaciones en Granger y Hatanaka.