Miscelánea Matemática **46** (2008) 1–25 SMM

Contribuciones de Leonhard Euler a la acústica

Dolores Ayala Velázquez y Pablo A. Lonngi V.
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
dav@xanum.uam.mx, plov@xanum.uam.mx

Resumen

Del vasto trabajo realizado por Euler en acústica, seleccionamos algunas de sus principales ideas relacionadas con las propiedades, producción y propagación del sonido, la voz, la armonía y su teoría músical.

1. Introducción

Leonhard Euler, quien nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia, a los 17 años se graduó de doctor habiendo estudiado anatomía, química y botánica. Su obra incluye una teoría de la música, vibraciones de cuerdas y tambores, la propagación del sonido en el aire y fenómenos relacionados con la hidrodinámica y la elasticidad. En un gran número de campos como la acústica, la ecuación y la representación de las ondas abundan expresiones como *ecuación de Euler*, *coordenadas de Euler*, *fórmula, relación o identidad de Euler* y otras, como una manifestación del extenso trabajo que realizó en distintos campos del conocimiento, desde las matemáticas hasta la filosofía.

Euler escribió sus trabajos en latín, francés y alemán y se encuentran en publicaciones como *Mémoires de lÁcadémie des Sciences de Berlin* y *Communicatione Accademia Scientiarum Petroburgo.* Afortunadamente, el sitio de internet *The Euler Archive* [1] del Dartmouth College tiene copias de algunos de estos trabajos o ligas a acervos digitalizados de esas obras, además de que algunos de ellos están traducidos al inglés. Al examinarlos, pronto se nota que en sus planteamientos establece razones entre las cantidades, usando relaciones geométricas en lugar de formular ecuaciones, y que la notación que empleaba, especialmente en los primeros trabajos, es bastante diferente de la actual. Por ejemplo, g no representa la aceleración de la gravedad, sino la distancia que un cuerpo cae en 1 segundo, o sea $\frac{1}{2}$ 9.8 m. Otras notaciones no habituales son cc por c^2, ff para una área o sección A o S (que sería f^2), B para la densidad del aire ρ_0, dds/dt^2 para la aceleración d^2s/dt^2. Para caracterizar la unidad de tiempo, emplea como referencia la longitud f de un "péndulo de segundos", del que cada media oscilación dura 1 segundo, en lugar de que su periodo sea de 1 segundo, como se entiende en la actualidad. En sus primeros trabajos no usa π sino el valor aproximado 22/7, y cuando posteriormente sí emplea el símbolo, representa el valor $\pi/2$, como observa Ian Bruce, a quien se deben las traducciones al inglés en *The Euler Archive*, quien incluyó anotaciones explicativas que son muy útiles, pero a pesar de sus esfuerzos, parece no haber conseguido mantener la cuenta correcta de esos factores en algunos resultados.

La lectura de los trabajos de Euler revelan su interés y dedicación al avance del conocimiento, así como su capacidad para aplicar los métodos desarrollados por él o los resultados obtenidos por otros investigadores como Lagrange, DÁlembert y Riccati, a los problemas relacionados con la propagación del sonido.

Para presentar algunas de las características de las aportaciones de Euler en el campo de la acústica, decidimos dividir el trabajo en dos partes: la primera relacionada con su estudio del aire y las propiedades y propagación del sonido y la segunda relacionada con la producción de la voz y la música.

2. Propiedades del aire y propagación del sonido

Aquí vamos a hablar de las propiedades del aire, la velocidad del sonido, la ecuación de onda para la propagación del sonido y las soluciones a la ecuación de onda. Después presentaremos los trabajos de Euler sobre fuentes de sonido, la acústica de la armonía y de los instrumentos musicales, la voz humana y otros resultados contenidos en el tema de la acústica.

2.1. La estructura y propiedades del aire.

Desde su trabajo inicial *De Natura et Propagatione Soni (Acerca de la naturaleza y la propagación del sonido)* [2], Euler expone un modelo de la estructura del aire que consiste de pequeños glóbulos que deben estar en un estado de compresión a causa del peso de la atmósfera. Cuantifica este peso por medio de la altura k de la columna de mercurio de un barómetro que equilibra el peso de la atmósfera y que conoce de experimentos con bombas neumáticas, con un valor entre 2.26 y 2.46 pies renanos, dependiendo del lugar y las condiciones atmosféricas, que como un pie prusiano o renano (del Rhin) es igual a 31.387 cm o 31.38355 cm, según la referencia, corresponden a un intervalo entre 70.9 y 77.2 cm Hg. También reconoce que la razón de la densidad del mercurio a la del aire está entre 10000 y 12000, para aire frío y caliente, respectivamente. Según ese modelo, la propagación del sonido en el aire se reduce a compresiones y rarefacciones que se comunican de un glóbulo a los demás, basándolo en una teoría de la elasticidad de Johannes Bernoulli, quien fue su maestro.

En *Tentamen Explicationis Phaenomenorum Aeris Ensayo de la Explicación de las Propiedades del Aire)*[3] refina y busca justificar este modelo, aparentemente incluyendo nuevas propuestas suyas y de Bernoulli, considerando ahora vesículas esféricas que contienen en su interior “materia fina” que gira en pequeños vórtices, cubierta por una membrana permeable inflada por la fuerza centrífuga generada por esa rotación, lo que origina la elasticidad de estas vesículas. Aquí manifiesta su gran habilidad al analizar y desarrollar el modelo, pero no logró satisfacer de manera convincente los datos experimentales. En efecto, reproduce resultados experimentales de Boyle para determinar la densidad de la supuesta materia fina, pero como los valores que obtiene son contradictorios, aunque se refiere a la mala precisión de los datos experimentales no deja ahí el problema, sino que continúa estudiándolo, como veremos más adelante. Resalta el hecho de que no se había establecido el concepto de presión, por lo que usa indistinta y vagamente términos como compresión, rarefacción, fuerza elástica, elasticidad y condensación. En particular, el término condensación es, en el lenguaje de la acústica contemporánea, el cambio fraccional de la densidad con respecto a su valor en equilibrio [17]. Aunque tampoco se habían establecido los conceptos básicos de la teoría cinética de los gases, en los párrafos XVII a XIX obtiene lo que sería una ecuación de estado de tipo cinético para el aire que es incorrecta. En XXVI hace una ingeniosa construcción gráfica para mostrar la dependencia de la elasticidad del aire respecto a su densidad y en XXIX muestra una gráfica de la dependencia de la densidad del aire con la altura que desafortunadamente ambas están equivocadas a causa de la ecuación de estado.

2.2. La velocidad del sonido.

Los antiguos ya sabían que el sonido se propaga en el aire, pero tenían la creencia de que los sonidos de distinta frecuencia se propagaban con velocidades diferentes. En 1624 Gassendi determinó la velocidad del sonido, demostrando que los agudos y los graves se propagan con igual velocidad. Siguieron las mediciones de Mersene (1640), Borelli y Vivianti (1655), de la Academia de Cimento; de Boyle, Roemer, Picard, Cassani y Huyghens; de Walter, Halley, Dirham, Flamsteed y Roberts, quienes encontraron valores de la velocidad del sonido entre 331 y 496 m/s.

En 1738, la Academia de Ciencias ordenó que se hiciera una determinación que dio como resultado 333 m/s, y se demostró que la velocidad del sonido es independiente de la presión y aumenta con la temperatura.

Además del modelo de la estructura del aire y las propiedades que de éste resultan, la principal motivación de Euler en estos trabajos fue la obtención de fórmulas que le permitieran explicar y conocer la velocidad del sonido y los factores que pueden cambiarla. Desde un principio, Euler identifica, usando el modelo de los glóbulos [2], que los sonidos graves y agudos se mueven con la misma velocidad y define la velocidad con que se propaga el sonido como la distancia que recorre en el tiempo en que un péndulo realiza media oscilación que dura un segundo. En un solo párrafo establece, aunque en forma bastante oscura, que la velocidad del sonido está dada por $4\sqrt{nkf}$ con $n : 1$ la razón de la gravedad específica (o razón de densidades) del mercurio a la del aire, k la altura del mercurio en el barómetro y f la longitud del péndulo que describe media oscilación en un segundo. Al tomar en cuenta los valores extremos de la presión barométrica en clima frío tormentoso y clima caliente agradable, encuentra el resultado entre los límites de 1069 y 1222 pies prusianos, 335.5 y 383.5 m en un segundo, respectivamente, valores muy razonables. Sin embargo, Bruce indica que esta expresión es equivocada y que debería tener 2π en lugar del factor 4, pero la que da como corregida también parece ser incorrecta.

En *De la Propagation du Son (De la Propagación del Sonido)* [5] Euler abandonó ya el modelo de glóbulos y vesículas y realizó un análisis más detallado sobre la propagación del sonido en una dimensión, del que nos ocuparemos más adelante, en el que encuentra como expresión para la velocidad del sonido $\sqrt{2gh}$, con $g = 15\frac{5}{8}$pies la altura que un cuerpo cae en 1 segundo y h la altura de una columna de aire suponiendo que la atmósfera es homogénea, que equivale al anterior producto nk, lo cual, con una densidad del agua 800 veces la del aire y el peso del aire balanceado por una columna de agua de 32 pies, le produce una velocidad del sonido de 894 pies en un segundo.

En el trabajo *Supplement aux Recherches sur la Propagation du Son (Suplemento a las Investigaciones sobre la Propagación del Sonido)* [6] Euler analiza la propagación del sonido en dos y en tres dimensiones, y llega a la conclusión que la velocidad del sonido es la misma que en una dimensión, $\sqrt{2gh}$, muy importante para la época porque se había debatido mucho la posibilidad de que fuese distinta.

En *Éclaircissemens plus détaillés sur la génération et la propagation du son, et sur la formation de lécho (Aclaraciones más detalladas sobre la generación y la propagación del sonido y sobre la formación del eco)* [8] reescribe la expresión para la velocidad del sonido en la forma $c = \sqrt{\frac{2ag}{b}}$, siendo b la densidad del aire "natural" en unidades en las que la del mercurio se toma igual a la unidad, a es la altura del mercurio en el barómetro y g es la altura de la caída en un segundo. Aunque la fórmula es equivalente a la de [5] y [6], la introducción explícita de la densidad del aire referida al mercurio expresa correctamente la dependencia de la velocidad del sonido con la densidad del aire.

En esa época, nadie identificó la causa de la discrepancia con el valor experimental de 1100 pies en un segundo, porque no se conocían las ecuaciones de estado de los gases ni los procesos termodinámicos a los que se pueden someter los sistemas gaseosos. Fue necesario que llegara el trabajo de Poisson [21] para comprender la diferencia entre procesos de compresión y expansión isotérmicos descritos por $PV =$ constante, y adiabáticos, es decir, sin intercambio de calor, descritos por la ecuación o ley de Poisson $PV^{\gamma} =$ constante [18, 13], donde γ es la razón de calores específicos a presión y a volumen constantes, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. La expresión para la velocidad del sonido $c = \sqrt{\frac{2ag}{b}}$, equivalente en notación moderna a $\sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}$ con P_0, ρ_0 y T_0 la presión, densidad y temperatura del gas en equilibrio, R la constante universal de los gases y M la masa molar del gas, da la velocidad del sonido para un proceso isotérmico, c_T, pero Laplace propuso que las compresiones y expansiones de las ondas acústicas son tan rápidas que hay que considerarlas como un proceso adiabático. De hecho, como la compresibilidad adiabática es igual a γP_0, la velocidad del sonido está dada por la ecuación de Laplace, con expresión $c_{ad} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$ [16], que con $\gamma = 7/5$ para el aire, correspondiente a un gas diatómico, da el resultado de 344 m/s que concuerda totalmente con el experimento.

2.3. La ecuación de onda.

En [5], Euler hace grandes avances en la descripción de la propagación del sonido:

- Identifica el estado de equilibrio como aquél en el que el aire tiene en todas partes la misma densidad y el mismo "resorte" o elasticidad;

- Enfrenta la descripción del sonido usando funciones $f(x)$ que representan la perturbación inicial, que deben ser discontinuas para satisfacer que el aire está perturbado sólo en una cierta región del espacio (de 1, 2 o 3 dimensiones) y en el resto del espacio se encuentra en equilibrio, venciendo las objeciones de que el cálculo (integral) no se les puede aplicar.

- Introduce funciones de dos variables, $y(x,t)$ con x la posición y t el tiempo, que representan la perturbación como un desplazamiento a lo largo de la dirección de propagación, lo que entendemos actualmente por *ondas longitudinales planas*.

- Analiza las fuerzas que actúan sobre una placa o capa de aire en el interior de un tubo cuya sección puede considerarse infinitesimal, considerando al tiempo $t = 0$, con el aire en equilibrio, tres puntos P, Q, R equidistantes y que a causa de la perturbación, al tiempo t se desplazan a p, q, r más o menos próximos entre sí según que el aire se haya comprimido o expandido, pero manteniéndose constante la masa del aire en esa placa. Esta forma de planteamiento es ahora habitual, *cf.* [17, 22] y la conservación de la masa en aplicaciones asociadas con fluidos recibe el nombre de *ecuación de continuidad*.

- Del análisis obtiene la ecuación de onda no lineal (recuérdese que como g representa la distancia que un cuerpo cae en un segundo,

$2g$ es una longitud)

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2y}{dt^2}=2gh\frac{d^2y}{dx^2} \tag{1}$$

- Al considerar desplazamientos muy pequeños y despreciar como Lagrange [19], a quien él cita, el término $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ comparado con la unidad, obtiene la ecuación de onda linealizada en una dimensión

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2gh\frac{d^2y}{dx^2} \tag{2}$$

  que reconoce igual a la que describe las vibraciones de una cuerda.

- Identifica y expresa la importante similitud entre el problema de propagación de sonido en una columna de aire en un tubo de longitud finita a con los extremos cerrados y una cuerda vibrante con los extremos fijos, de donde puede asegurar que la solución general en ambos casos es de la forma $y=\Phi(x+ct)+\Psi(x-ct)$, con Φ y Ψ funciones arbitrarias que para $t=0$ satisfacen que la forma inicial de la cuerda o el desplazamiento inicial del aire está puede describirse como

$$y(t=0)=\Phi(x)+\Psi(x)=\Theta(x) \tag{3}$$

- Como la velocidad de las partículas expresada en términos de Φ y Ψ es

$$\frac{dy}{dt}=c\left(\Phi'(x+ct)-\Psi'(x-ct)\right) \tag{4}$$

  donde la prima indica la derivada con respecto al argumento de cada función, al representar por $\upsilon_0=g(x)$ la velocidad en $t=0$, se obtiene que

$$\frac{\displaystyle\int g(x)dx}{c}=\Phi(x)-\Psi(x)=\frac{\Sigma\left(x\right)}{c} \tag{5}$$

  de manera que al conocer las dos funciones Θ y Σ se pueden determinar las dos funciones Φ y Ψ de la solución general.

- Al considerar las condiciones que deben satisfacer para valores negativos de x y mayores que la longitud del tubo, a, que esencialmente consisten en réplicas alternadamente negativas y positivas del pulso tanto en abscisa como en ordenada, identifica que el eco, la reflexión del pulso en los extremos, se puede interpretar como la llegada al punto de escucha de esas réplicas, explicándose así tanto los ecos simples cuanto los ecos reiterados o repetitivos.

- Con relación a la velocidad inicial de las partículas en una región, explica la paradoja de que el sonido asociado con un cierto desplazamiento inicial y que avanza con un sentido, se propague hacia adelante y no hacia atrás al anularse una de las dos funciones Φ y Ψ.
- Con gran visión plantea que para sonidos muy intensos no sea posible despreciar el término $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ en el factor $\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$ del primer miembro de la ecuación de onda no lineal (ecuación 1).

En el *Suplemento* [6], desarrolló el estudio de la propagación del sonido en dos y tres dimensiones espaciales considerando la “elasticidad” (presión) y la densidad en equilibrio y perturbadas, incorporando lo que actualmente conocemos como los tensores de esfuerzo y de deformación, y en la sección 9 introdujo el uso de la condición de diferencial exacta para funciones de dos variables (las coordenadas cartesianas en equilibrio) que había demostrado en 1734. Demostró que la velocidad del sonido en dos y tres dimensiones es la misma que para la propagación en una dimensión y al no lograr construir la solución para 2 dimensiones que represente ondas que viajan con velocidad c, en el artículo 30 plantea que es un punto que podría requerir más progresos del análisis matemático. En cambio en 3 dimensiones, al considerar la propagación del sonido desde una fuente puntual, llegó a la ecuación de onda en coordenadas esféricas para una perturbación con simetría esférica

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{2u}{V^2} + \frac{2}{V}\frac{du}{dV} + \frac{d^2u}{dV^2}, \tag{6}$$

en la que V representa el radio y u el desplazamiento al tiempo t, y al proponer $s = u/V$ obtuvo la expresión simplificada

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4}{V}\frac{ds}{dV} + \frac{d^2s}{dV^2}. \tag{7}$$

En la *Continuación* de la propagación del sonido [7], Euler regresó a esta ecuación, que para dos dimensiones tiene un 3 en lugar del 4 en el numerador del primer término del segundo miembro. Para buscar simultáneamente su solución, consideró un factor n en lugar del 3 y el 4, y eliminó el tiempo postulando una dependencia temporal periódica

$s = P\,\mathrm{sen}(\alpha t + \mathfrak{U})$ con P una función sólo de V. Con $m^2 = \alpha^2/c^2$, $q = V^n d(\ln P)/dV$ y $r = 1/V^{n-1}$, llegó a la ecuación de Riccati

$$dq - \frac{q^2 dr}{n-1} + \frac{m^2}{n-1} r^{\frac{-2n}{n-1}} dr = 0. \tag{8}$$

Con esta ecuación, Euler identificó que el caso $n = 3$ de la propagación del sonido en dos dimensiones es un caso irreducible, sin solución, mientras que el caso tridimensional $n = 4$ sí es reducible y para obtener su solución introdujo la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ y el desarrollo en serie de potencias, y encontró que la función P es de la forma

$$P = A\frac{\exp(mVi)\,(1 - mVi)}{V^3} + B\frac{\exp(-mVi)\,(1 + mVi)}{V^3} \tag{9}$$

que simplificó aplicando la *identidad, relación o fórmula de Euler* [13] a las exponenciales imaginarias

$$\exp(\pm mVi) = \cos(mV) \pm i\,\mathrm{sen}(mV) \tag{10}$$

y finalmente llegó a la solución para s y u, pero sólo reproduciremos la del desplazamiento u,

$$u = \left(\frac{E\,\mathrm{sen}(mV + \varsigma)}{V^2} - \frac{mE\cos(mV + \varsigma)}{V}\right)\mathrm{sen}\,(mtc + \mathfrak{U}) \tag{11}$$

en la que E, m, ς y $\mathfrak{U}$ son totalmente arbitrarias.

La ecuación anterior muestra lo cerca que estuvo Euler, con su gran genio, de descubrir, con algo más de medio siglo de anticipación, lo que actualmente conocemos como desarrollo en serie de Fourier [15] para una función periódica. Basta elegir la constante m igual a un múltiplo entero de 2π y sumar sobre todos los enteros, para efectivamente producir la serie de Fourier.

Para recuperar la forma de un pulso general, identificó en la ecuación anterior que el segundo numerador es la derivada con respecto a V del primero, de manera que si Φ es una función arbitraria, la solución puede escribirse como

$$u = \left\{ \begin{array}{c} \frac{A}{V^2}\Phi\,(V + ct) - \frac{A}{V}\Phi'\,(V + ct) + \\ \frac{A}{V^2}\Phi\,(V - ct) - \frac{A}{V}\Phi'\,(V - ct) \end{array} \right. \tag{12}$$

y notó que sólo la segunda línea describe una onda esférica de sonido que se expande desde un punto en el espacio de 3 dimensiones. Para el desplazamiento (x, y, z) que es solución del problema en coordenadas cartesianas, forma el producto de lo que identificamos como el correspondiente coseno director por u.

Queremos resaltar que en el párrafo 30, Euler explica, usando la solución general que encuentra al sumar las perturbaciones (x, y, z) de fuentes en distintos puntos del espacio, que con varias fuentes presentes, el sonido que llega a un punto desde cada una es el mismo que si las demás no existieran, de modo que el movimiento de las partículas será la suma del que producirían separadamente, sin ser afectados por las demás fuentes, lo cual conocemos en la actualidad como *el principio de superposición lineal.* También deduce, eliminando otra vez el tiempo, la ecuación de onda inhomogénea independiente del tiempo para la parte espacial de (x, y, z).

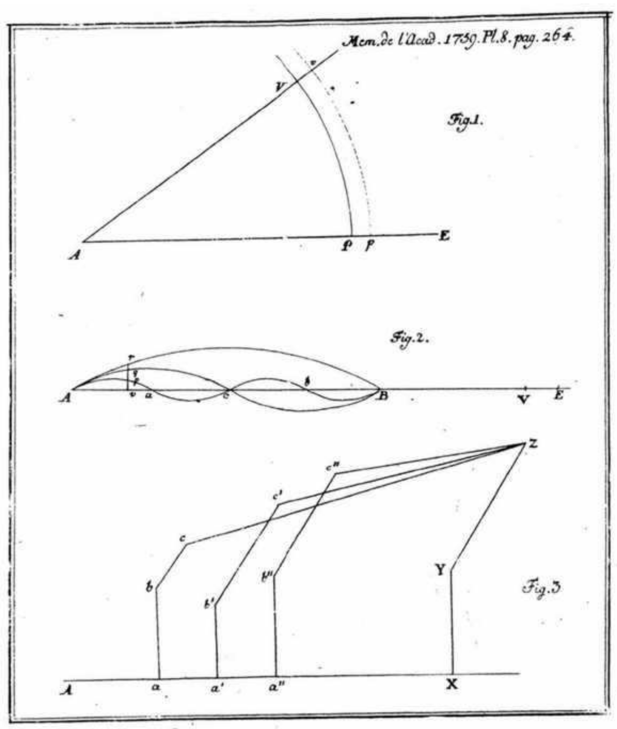


Figura 1: Continuation de Recherches sur la Propagation du Son

En [8] *Aclaraciones más detalladas sobre la generación y la propagación del sonido y sobre la formación del eco*, considera la propagación del sonido en un tubo recto de sección uniforme con una longitud infinita, finalmente habla de la presión como tal y la maneja como proporcional a la densidad y sigue aplicando el análisis y el cálculo diferencial de funciones de varias variables. Deduce la ecuación de onda para el sonido en un tubo recto (en la que hemos sustituído cc por c^2)

$$c^2 P\left(\frac{ds}{dS}\right) - c^2\left(\frac{d^2s}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = 0. \tag{13}$$

Euler reconoce que, a pesar de todos sus esfuerzos, no sabe cómo resolverla, excepto si $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ no difiere apreciablemente de la unidad, lo que implica que cada partícula de aire contenida en el tubo casi no cambia de lugar, condición que encuentra compatible para estudiar posteriormente la generación y producción de sonido en los tubos de órganos. Introduce la variable z dada por la relación $s = S + z$ y explica cuidadosamente que aunque dz/dS es despreciable comparado con la unidad, d^2z/dS^2 sí permanece. La ecuación entonces queda como

$$c^2 P - c^2\left(\frac{d^2z}{dS^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0 \tag{14}$$

Euler subraya que la última ecuación es la misma que se obtendría si $s = S + \alpha t + z$, que significa que el tubo es desplazado longitudinalmente o que el aire dentro del tubo se desplaza con movimiento uniforme. La cantidad P en el primer término de las ecuaciones (13) y (14) representa el cambio relativo en la densidad con la posición, $P = dQ/QdS$ siendo Q la densidad de la perturbación inicial. Enfatiza que difieren de las obtenidas anteriormente, ecs. (1) y (2), precisamente en el primer término, con el cual espera explicar diferentes tipos de sonido, especialmente de las vocales, y que no afecta la obtención de la solución, que puede escribirse como

$$z = \int dS \ln(\frac{Q}{C}) + \Gamma(S + ct) + \Delta(S - ct), \tag{15}$$

con Γ y Δ funciones arbitrarias y C una constante que demuestra ser igual a la densidad B en equilibrio, con lo que se puede aproximar $\ln(\frac{Q}{B}) \approx \frac{Q-B}{B}$, que es precisamente la cantidad que en el lenguaje de la acústica contemporánea, recibe el nombre de *condensación*, como ya habíamos señalado antes [17].

En la última parte de este trabajo estudia la formación del eco al considerar la propagación del sonido en un tubo semi-infinito, en los casos de que esté abierto y cerrado en un extremo, y en un tubo finito abierto en los dos extremos. Establece correctamente las condiciones en la frontera, a saber, que en un extremo abierto la densidad del aire debe ser igual a su valor en equilibrio, mientras que en un extremo cerrado la velocidad de las partículas debe ser nula. Identifica que en el tubo semi-infinito, la reflexión del sonido en el extremo, sea abierto o cerrado, da lugar a un eco simple en el interior del tubo, mientras que en el tubo finito habrá una multiplicidad de ecos. Finaliza reconociendo como una limitación de su teoría que sólo es aplicable a tubos de sección uniforme y la gran dificultad para extenderla a cavidades de una forma cualquiera, como la boca humana.

3. Producción del sonido, la voz y la música

Otros campos de la acústica explorados ampliamente por Euler fueron la música y los intrumentos musicales y llama la atención la clasificación que hizo de las fuentes de sonido, tema que tratamos a continuación.

3.1. Fuentes de sonido.

Euler identifica en [2] que en la producción del sonido, deben aplicarse vibraciones para que los glóbulos de aire puedan tener contracciones y expansiones alternadas, separadas por intervalos de tiempo cortos. Dice que se infieren tres tipos de movimientos vibratorios de las tres formas en las que el sonido se genera. La primera clase es la de los sonidos producidos por instrumentos de cuerdas, tambores, campanas, instrumentos musicales bajo el control de la lengua, etc., todos sonidos que tienen su origen en la vibración de un cuerpo sólido. Incluye también la producción de la voz humana, asemejando la amplificación de los sonidos débiles de placas por tubos con lo que ocurre con la lengua en la cavidad bucal. En esta clase de fuentes, el sonido sería generado por aire comprimido que se restaura a un estado previo, que podría ser el de equilibrio y que daría un sonido más grave a mayor volumen y más agudo con un volumen menor. Esta relación entre sonidos graves y agudos y el mayor o menor volumen de cavidades resonantes es correcta, y fue aprovechada por Helmholtz (1821-1894) para analizar sonidos musicales con los resonadores que llevan su nombre [24].

En la segunda clase coloca los sonidos como el trueno, la artillería y la explosión de pólvora que, afirma, son causados "por la restauración de aire comprimido" que inicialmente ocuparía un volumen extremadamente pequeño, de modo que Euler ubica en ella sonidos exclusivamente de tipo explosivo o impulsivo.

Finalmente, en el tercer tipo coloca las flautas y tubos de órgano, apoyándose en su conocimiento acerca de su construcción y operación así como en algunos resultados experimentales, para ofrecer una explicación del sonido que producen basada nuevamente en compresiones y rarefacciones de los glóbulos en una capa de aire contigua a la pared provocadas al soplar en el extremo del tubo o en la boquilla de la flauta. Al identificar la similitud entre la columna de aire vibrando en un tubo y una cuerda vibrante, obtiene una fórmula para la frecuencia que es correcta en cuanto a la proporcionalidad inversa con la longitud del tubo, pero que corresponde al primer armónico, no al modo fundamental. Establece que el ancho y el material del tubo no afectan la frecuencia del sonido, pero sí su calidad (que describe como *afecto* y *encanto*). Recoge y reconoce como ciertas lo que parecen ser reglas empíricas, que un tubo más ancho da un sonido más fuerte y que mientras más largo sea, requiere mayor ancho. Identifica que la nota *do* (central) de una flauta es una octava más alta que la correspondiente en un instrumento de cuerdas, pero como son la misma nota, concluye que son equivalentes para el oído porque éste no percibe ninguna disonancia.

En [4] Euler describió las características de los instrumentos de cuerdas y los metales estableciendo, por ejemplo, la relación entre la longitud de la cuerda, su grosor y la frecuencia y la calidad del sonido que emite, Euler contribuyó al conocimiento del tono y el timbre del sonido producido por esos instrumentos musicales.

3.2. Producción de la voz.

En la sección 23 de [2] explicó que para la producción de la voz, la epiglotis sostiene en su lugar la base de la lengua en el órgano del habla, cuya vibración se mantiene por el paso del aire ascendiendo a través de la tráquea. Además, el movimiento vibratorio del aire que se escapa por el extremo de la tráquea cambia en la cavidad de la boca en formas que producen los tonos bajos y altos de la voz y los diferentes efectos vocales, los que con la ayuda de la lengua, los labios y la faringe proporcionan sonidos con consonantes por la boca y también por la nariz.

En [4] Euler explicó las características del sonido y su audición con sus cualidades de producción y percepción clara, describió el instrumento sonoro de la voz formado por la cavidad torácica, la boca con las cuerdas y la lengua que se encargan de la transmisión de los sonidos de la voz para la comunicación. Continuó con el órgano auditivo que consta de la oreja, el canal auditivo y el tímpano y cómo el sonido que entra estimula la membrana timpánica que manda el sonido al nervio auditivo, que es capaz de distinguir la intensidad, timbre y frecuencia de cada sonido. En su descripción no habla del oído medio ni del oído interno, sino que se salta al nervio auditivo, al que consideró encargado de discriminar la información sonora.

En su *Meditatio de formatione vocum, (Reflexión sobre la formación de la voz)* [12], considera a la boca como el instrumento que produce los sonidos de la voz: las vocales más fáciles de percibir y las consonantes, con la combinación de la posición de la lengua, la cavidad bucal y las cuerdas vocales. Explicó detalladamente cómo se producen los diferentes sonidos de la voz, clasificando las vocales en tres categorías: femeninas, masculinas y agudas, según la forma de producirlas y dando ejemplos claros de los fonemas correspondientes en francés y alemán, explicando lo que ocurre con los diptongos y las sí labas. Distinguió los sonidos que se producen sacando el aire por la boca y por la nariz, con la lengua, los labios, el paladar y las mejillas y mostró una forma de enumerar los sonidos de las consonantes. Este trabajo puede considerarse como un breve tratado de fonología, que ilustra la capacidad de la voz de producir los diferentes sonidos que forman las palabras de cada idioma, sumamente avanzado para su época.

3.3. Las teorías y la armonía musical.

La teoría sobre la armonía estaba muy desarrollada en la Grecia clásica, y en el siglo XVII, cuando Galileo (1564-1642, Discurso) buscaba la clave matemática para descifrar la naturaleza, aún se consideraba a la música igual a las demás ciencias. En nuestros días se sigue indagando en la estructura matemática de las relaciones entre las notas musicales para encontrar información complementaria, pero ya no se considera a la música como ciencia equivalente a las matemáticas.

Para Leibniz (1646-1716), “la música es un ejercicio de aritmética secreta y el que se entrega a ella ignora que maneja números”. De Crousaz (1663-1750) escribió, en su *Tratado de lo bello* [14], que el buen gusto nos hace apreciar, por sensaciones, aquello que la razón hubiera aprobado.

Rameau (1683-1764) observó [23] que una nota musical está compuesta por un sonido fundamental y varias parciales, y que las notas que difieren por una octava son similares en cuanto a su efecto estético y pueden considerarse casi idénticas. DÁlembert (1717-1783) dio una clara presentación del trabajo cualitativo de Rameau, según el cual el grado de armonicidad es distinto del agrado o medida estética. Por ejemplo, el unísono y la octava son los más armoniosos de los intervalos pero no los más agradables. Y Bertrand Russell (1872-1970) consideraba que “el matemático puro, como el músico, es creador libre de su mundo de belleza ordenada”.

¿Qué es lo que hace que determinadas combinaciones de acordes resulten placenteras o desagradables? ¿Qué determina que dos acordes puedan conectarse con otra serie de notas que suenan al mismo tiempo? Son preguntas que no sólo los músicos, sino también teóricos de diversas disciplinas, han debatido e intentado responder durante siglos. En este contexto, destacan Descartes (1596-1650, Compendio musical), Mersenne (1588-1648, Armonía Universal, 1636), DÁlembert (la solución de la ecuación de ondas) y Euler (Nueva teoría musical).

La primera sugerencia de un patrón de tono la hizo el físico francés Joseph Sauveur alrededor del 1700, al proponer que el *do* equivaliera a 256 Hz, un patrón cómodo desde el punto de vista matemático (al ser una potencia de dos). El físico alemán Johann Heinrich Scheibler llevó a cabo la primera determinación precisa de la frecuencia de un tono, y en 1834 propuso como patrón que el *la* equivaliera a 440 Hz. En 1859, el gobierno francés decretó que el patrón para el *la* fuera de 435 Hz, según las investigaciones del físico francés Jules Antoine Lissajous, que se aceptó en muchas regiones del mundo hasta entrado el siglo XX, pero después se ha reafirmado como patrón el valor de 440 Hz.

Desde la elección de un sonido base, a partir del cual construir el resto, a la determinación del intervalo que hay entre una nota y la siguiente, la ordenación de los sonidos musicales ha sido fruto de un largo proceso, al cual Euler contribuyó de manera decisiva. En el apéndice se presenta información sobre intervalos y escalas musicales que puede ser de interés para el lector.

El *Tentamen Novae Theoriae Musicae (Tratado Nueva Teoría Musical)* [4] es una extensa obra que trata sobre sonido y audición, introduce los principios de suavidad y armonía, trata de la música en general para continuar con las consonancias y las sucesiones consonánticas. Ahí Euler explicó cómo, a partir de la idea pitagórica, se puede establecer un esquema que muestre las reglas de combinación armónica de las notas musicales y las que son agradables al oído que satisfacen las reglas de la música.

En el capítulo VIII de su tratado, que traducimos como “Géneros únicos”, Euler estableció una regla de combinación para producir los acordes de éstos, en términos de la expresión $2^n 3^m 5^p$, para generar las escalas diatónica, cromática y enarmónica[1]. Así determinó las relaciones

[1] De acuerdo con la Real Academia de la Lengua, enarmónico es uno de los tres

entre las frecuencias que corresponden a estas escalas, como se muestra en la tabla siguiente.

Diatónica:			
pitagórica	243 : 256	8 : 9	8 : 9
menor	20 : 21	9 : 10	7 : 8
mayor	27 : 28	7 : 8	8 : 9
igual	11 : 12	10 : 11	9 : 10

Cromática:			
antigua	243 : 256	67 : 76	4864 : 5427
menor	27 : 28	14 : 15	5 : 6
sinfónica	21 : 22	11 : 12	6 : 7

Enarmónica:			
antigua	125 : 128	243 : 250	64 : 81
ptolomeica	45 : 46	23 : 24	4 : 5

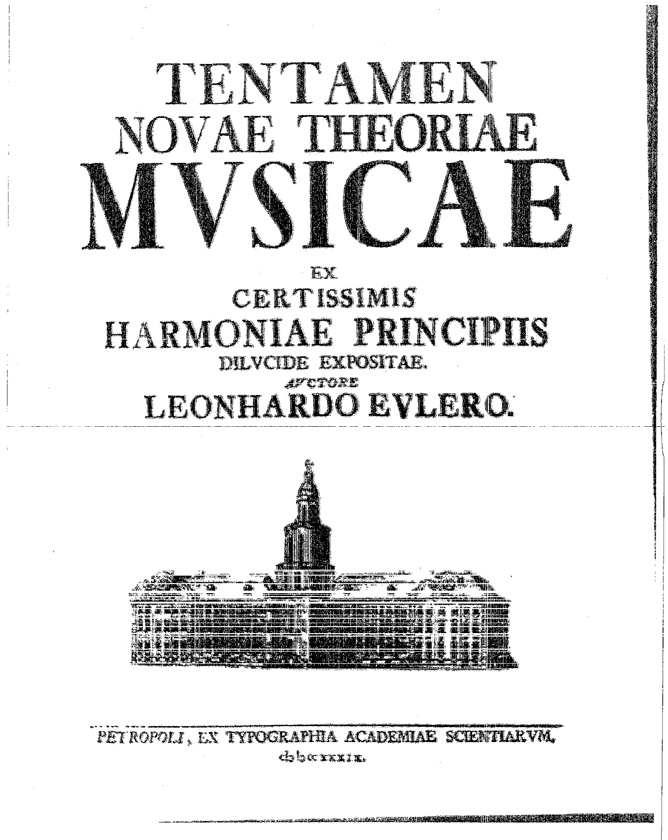
Como un tono no es exactamente dos semitonos, hay intervalos más grandes o más pequeños que otros. Esto da problemas para afinar instrumentos con intervalos fijos como el piano o la guitarra. Por esto se creó la *escala temperada*, en la que la razón entre la frecuencia de una nota y la anterior es siempre constante.

El temperamento es la forma musical de mantener notas dentro de un espacio definido, tema que Euler consideró al estudiar la consonancia y la disonancia, explicando que las primeras difieren de las segundas en que las consonancias se encuentran en proporciones más simples y preferibles al entendimiento, mientras que las disonancias corresponden a proporciones más complicadas y por tanto son más difíciles de comprender. Aclaró que las disonancias contienen proporciones perceptibles pero que no se les admite en la música. Hizo una discusión muy interesante para los expertos en música dejando una puerta abierta a nuevas formas musicales considerando nuevas armonías. Explicó que la música moderna (la del siglo XVIII) incorpora disonancias que resultarían insoportables en la música antigua.

3.4. Afinación y armonía.

La transición de la afinación pitagórica a la temperada tomó siglos, y ocurrió de una manera paralela al cambio en la relación entre música

géneros del sistema musical que procede por dos diesis o semitonos menores y una tercera mayor o dítono.


TENTAMEN
NOVAE THEORIAE
MVSICAE
EX
CERTISSIMIS
HARMONIAE PRINCIPIIS
DILVCIDE EXPOSITAE.
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO.

PETROPOLI, EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
cIↄIↄccxxxix.

Figura 2: Portada del libro *Tentamen Novae Theoriae Musicae*

y matemáticas. En 1739, en el *Tentamen* [4], Euler desarrolló una teoría de consonancia basada en la ley pitagórica: "Entre más pequeños sean los números que expresan la relación de vibración de dos notas, éstas serán más consonantes". De ésta forma, Euler estableció una ley cuantitativa para definir un criterio de armonicidad de cualquier intervalo o acorde que concuerda con los hechos observados.

En palabras de Helmholtz (1821-1894) años después, el concepto general de Euler acerca de la naturaleza del goce estético establecía que entre más fácilmente percibamos el orden que caracteriza a los objetos contemplados, nos parecerán más simples y perfectos, y los reconoceremos más fácil y gozosamente. Un orden que cueste trabajo descubrir, aunque ciertamente nos halague, asociará cierto grado de desgaste y tristeza a nuestro estado de ánimo.

En el trabajo *Du veritable Caractere de la Musique Moderne (El carácter verdadero de la Música Moderna)* [10], Euler dice que la música moderna debe satisfacer las reglas de la verdadera armonía. El oído marca los principios de la verdadera armonía aunque se emplee un gran número de disonancias. Aclara el concepto de disonancia como opuesto a la consonancia que es agradable al oído, por lo que es difícil imaginar que la disonancia pueda producirle una impresión agradable, pero que también éstas son necesarias en la música porque satisfacen las reglas de la verdadera armonía.

Se admitían tres consonancias fundamentales: la *octava*, la *quinta* y la *tercera mayor* y que todas las demás consonancias y disonancias que podían emplearse se podían componer a partir de estas tres. La *octava* contiene dos sonidos que están en la razón 1 a 2, la *quinta* dos sonidos en la razón 2 a 5 y la *tercera mayor* también dos sonidos en razón 4 a 5. Esta música no admite más que esos sonidos y sus relaciones pueden explicarse con los tres números primos 2, 3 y 5. De manera que los números apropiados para representar esos sonidos son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10,... y otros, pero los que son mayores de 5 deben excluirse, según estableció Leibnitz.

Con esos números se representan los sonidos de la música antigua que componen la *escala diatónica* y entre más pequeños son los números que se usan más simple es la música que resulta. Euler explicó cómo se construyen las *octavas* y la escala en términos de ellos.

Enseguida abordó el problema de la afinación justa de los instrumentos musicales, considerando que el oído no juzga los sonidos porque satisfagan las justas proporciones, sino por la percepción agradable y conveniente, de modo que hay que centrar la atención en las secuencias de sonido que resulten armoniosas. Continuó mostrando los acordes que se empleaban en la música moderna de su tiempo con una amplia explicación de sus atributos de armonía y desarmonía según se le combine. Explicó las reglas para combinar tonos mayores y menores, mostrando sus cualidades de armonía y su uso correcto en diferentes instrumentos. Euler también contribuyó al conocimiento de los modos y sistemas de composición y cómo estos se pueden permutar satisfaciendo las leyes de la armonía.

El microtonalismo utiliza más notas, llamadas microtonos, intervalos musicales menores que un semitono. Los teóricos del microtonalismo y de las afinaciones se basan generalmente en las matemáticas y recurren a los números primos, a la serie de Fibonacci y otras herramientas, y así se cuenta con un gran número de escalas o afinaciones alternativas, con más de 12 o menos de 12 notas, porque lo que importa no es la cantidad de notas, sino cómo elegirlas.

En *De harmoniae veris principiis perspeculum musicum repraesentatis (Verdaderos principios de la armonía para la representación especular de la música)* [11], Euler profundiza en la representación de la música tanto en sus aspectos de armonía cuanto en una representación diagramática que ayuda a la comprensión de lo que él llamó representación especular. En fin, Euler realizó una obra extraordinariamente amplia y extensa en este campo. Por ejemplo, con la consideración exhaustiva de posibilidades, se le atribuye el descubrimiento de varios sistemas y escalas microtonales o haber plantado la semilla de otros más recientes.

4. Otros resultados

Euler finaliza su primer trabajo [2] con unos anexos totalmente diferentes al tema, en los que afirma que: 1) los sistemas del cuerpo y las armonías preformadas de la mente no concuerdan con la verdad, 2) su creencia de que la atracción gravitacional de Newton explica todos los fenómenos del cielo, 3) su afirmación de que una piedra que cayera por un agujero que pase por el centro de la tierra, continuará su camino hasta el otro lado y posteriormente regresará, 4) las “intensidades de los cuerpos en movimiento”son proporcionales a la primera potencia de la masa y la segunda potencia de sus velocidades, 5) la velocidad que adquiera una esfera que baja rodando un plano inclinado es menor que la que adquiriría al caer perpendicularmente la misma altura en la razón de $\sqrt{5}$ a $\sqrt{7}$, 6) su recomendación del uso de velas anchas y bajas en los barcos porque con velas altas o colocadas muy arriba en los mástiles altos el viento causaría la volcadura del barco.

La primera afirmación nos hace sospechar si habrá pensado en lo que ahora entendemos por preconceptos o ideas previas. La segunda es un tributo adicional al genio de Newton, a quien era evidente que respetaba. La tercera es una muestra de su gran imaginación e inteligencia y es posiblemente la causa de que este “experimento pensado” se plantee como pregunta o como problema en muchos de los textos elementales de física. La cuarta nos permite identificar su descubrimiento de la energía cinética de un cuerpo, concepto que se debatía todavía en la segunda mitad del siglo XIX. Es curioso que la elaboración de la sexta le haya ganado reconocimientos, entre otros, un monumento de parte de marinos que le deben la vida y bienestar, junto con un premio en metálico nada despreciable. Con respecto a la quinta afirmación, se lo proponemos al lector para un estudio experimental y como aplicación de sus conocimientos teóricos sobre dinámica rotacional.

5. Conclusión

La obra de Leonhard Euler en el campo de la acústica en muy extensa. En el estudio de las propiedades y propagación del sonido muestra una metodología muy concreta y conveniente: la sistematización de la información y los pasos sucesivos en la comprensión y estudio de los fenómenos, que le permitieron derivar la ecuación de onda y resolverla en tres dimensiones, después de incorporar el conocimiento que él supo aprovechar o descubrir. Destaca su capacidad de mantenerse siempre actualizado no obstante la distancia de San Petesburgo a los sitios de actividad científica en Europa central. Su laborioso trabajo estableció importantes principios básicos que en la actualidad seguimos aplicando, como la ecuación de continuidad, la ecuación de onda y la obtención de soluciones de ésta. Con su trabajo realizó contribuciones extraordinarias en los diferentes campos que incursionó, reconociendo la importancia del trabajo de otros y con un profundo respeto hacia los demás investigadores. Además de inteligente, Euler debió ser un hombre muy responsable, humilde y perseverante.

En cuanto a sus aportaciones al conocimiento de la música, vemos que su extenso trabajo también fue sumamente sistemático y exhaustivo, al grado que es la base de las teorías musicales actuales y marcó un camino para investigar en éstos y otros campos del conocimiento. Aunque no tenemos ninguna pretensión de haber realizado un estudio profundo de su obra en los campos que hemos descrito, no nos queda ninguna duda de que Euler no ha sido nunca superado en productividad y habilidad para resolver problemas por medio de algoritmos ni en la importancia de sus descubrimientos y resultados.

6. Apéndice

En la época de los antiguos griegos, Pitágoras y los pitagóricos (siglo VI a C) fueron los primeros en desarrollar una división del curriculum llamado quadrivium en donde la música se consideraba una disciplina matemática que manejaba relaciones de números, razones y proporciones. El quadrivium (aritmética, música, geometría y astronomía), con el agregado del trivium (gramática, retórica y dialéctica), se convirtieron en las siete artes liberales y la posición de la música como un subconjunto de las matemáticas permaneció durante la Edad Media. Los pitagóricos construyeron un aparato llamado monocordio que se componía de una tabla, una cuerda tensa y una tabla más pequeña que se iba moviendo por la grande y que les ayudó a identificar y aprender las notas musicales (cf. [20]).

En el siglo XII, al querer separarse de la tradición pitagórica, compositores e intérpretes crearon nuevos estilos y tipos de música como el canto monódico gregoriano que poco a poco fue evolucionando en música polifónica con diferentes instrumentos y voces. Como la polifonía medieval se iba haciendo cada vez más compleja, los compositores tenían que encontrar alguna forma de indicar cómo encajaban las voces y los sonidos de los instrumentos musicales. Necesitaban un sistema de notación que mostrara los valores relativos de las notas dentro de una única línea melódica.

La creación de composiciones más complejas llevó a experimentar con afinaciones alternativas y temperamentos; los experimentos de afinación derivaron en un cambio de la afinación pitagórica llamada la afinación justa. Las nuevas afinaciones seguían utilizando las matemáticas para calcular los intervalos, pero no necesariamente seguían los principios pitagóricos. Ahora eran utilizadas de una forma práctica y no como un fin; este cambio de actitud causó desacuerdo entre los matemáticos, quienes querían una adherencia estricta a sus fórmulas, y los músicos que buscaban reglas fáciles de aplicar. De hecho, los músicos empezaron a basarse más en su oído y menos en el monocordio.

En la música es muy importante la relación que existe entre la frecuencia de los distintos sonidos, a esta relación se le llama intervalo. Los intervalos musicales pueden medirse en términos de la relación de frecuencias de los sonidos, aunque en música reciben nombres propios cuya correspondencia física depende del tipo de escala utilizada.

Una *escala* es una serie de notas ordenadas de forma ascendente o descendente, donde a la primera de las notas se la llama tónica. Los intervalos musicales más importantes, por su simplicidad y su importancia a la hora de construir la escala musical, son:

La *octava*. Cuando la cuerda medía un medio del total, el sonido se repetía, pero más agudo. La *octava* es lo que correspondería a un salto de ocho teclas blancas del piano; o mejor dicho, una *octava* es la repetición de un sonido con una cuerda con la mitad de longitud, por tanto, otra nota armoniosa. Su frecuencia es doble.

La *quinta* es otro intervalo entre notas que se obtiene con una cuerda de longitud dos tercios de la inicial. Su frecuencia es de tres medios del sonido inicial. Corresponde a un salto de cinco teclas blancas en un piano.

La *cuarta* es, como las anteriores, otro intervalo entre notas que se obtiene con una cuerda de longitud tres cuartos de la inicial. Su frecuencia es cuatro tercios de la nota inicial.

Entonces, a partir de un sonido original de frecuencia f en una cuerda de longitud L, se obtienen diferentes notas armoniosas, como se muestra en el esquema siguiente:

Nota	Frecuencia	Longitud cuerda
Original	f	L
Octava justa	$2f$	$(1/2)L$
Quinta mayor	$(3/2)f$	$(2/3)L$
Cuarta justa	$(4/3)f$	$(3/4)L$
Tercera mayor	$(5/4)f$	$(4/5)L$
Tercera menor	$(6/5)f$	$(5/6)L$

La sucesión de sonidos en una escala incrementa o disminuye la tonalidad, y debe seguir las leyes de la tonalidad a las que Euler contribuyó en forma relevante en su tratado sobre la música. Las *escalas diatónicas* se forman a partir de las distancias de tono y semitono, son las más conocidas y usadas y la mayoría de ellas están formadas por siete notas, pero las hay también de seis u ocho. Por ejemplo, al ordenar las notas *do*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, y añadir una octava nota, el siguiente *do*, se forma una escala diatónica:

Nota	Frecuencia	Razón nota anterior	Nombre
Tónica	f	1	Do
Segunda	$(9/8)\,f$	$9/8 = 1.125$	Re
Tercera	$(81/64)\,f$	$9/8 = 1.125$	Mi
Cuarta	$(4/3)\,f$	$256/243 = 1.053$	Fa
Quinta	$(3/2)\,f$	$9/8 = 1.125$	Sol
Sexta	$(27/16)\,f$	$9/8 = 1.125$	La
Séptima	$(243/128)\,f$	$9/8 = 1.125$	Si
Octava	$2f$	$256/243 = 1.053$	Do

Estas notas corresponden a las teclas blancas del piano y la octava nota es la misma que la tónica una octava más alta. Pero en una octava se utilizan 12 notas, obteniéndose las 5 notas restantes usando las cuartas para encontrar nuevas notas armoniosas, que corresponden a las teclas negras del piano, es decir, los sostenidos y los bemoles. Cuando la escala queda completa con 12 notas se llama *escala cromática*.

Por motivos en parte físicos y en parte biológicos, ya que el registro de mujeres y de hombres cuando cantan juntos difiere normalmente en esa cantidad, el intervalo de octava acaba dominando la elección de frecuencias para los acordes, de forma que lo usual en todas las culturas es que se elijan ciertas frecuencias dentro de una octava y se repitan en todas las demás.

El oído humano tiene una "construcción" tal que los sonidos cuyas frecuencias están en una proporción simple ($2:1$, $3:2$, $4:3$ etc.), al sonar juntos se perciben como un solo sonido agradable. Por otro lado, casi todos los procesos físicos que producen sonidos, además de la frecuencia principal (del tono básico o fundamental) producen también "armónicos", es decir, las frecuencias que son dos, tres, cuatro -una cantidad entera- veces más altas. El conjunto de los armónicos determina el timbre, que es único para cada instrumento musical.

Si se toma como base la frecuencia de 55 Hz que nos lleva a la frecuencia 440 Hz que es un referente musical contemporáneo, al multiplicarla por 2, 3, 4, etc., obtenemos la serie de valores

$$\{55; 110, 165; 220, 275, 330, 385; 440, 495, 550, 605, 660, 715, 770, 825; 880\}$$

Y al colocar estas frecuencias en sus octavas correspondientes y distribuir la serie en una tabla

Octava 1	55							
Octava 2	110		165					
Octava 3	220		275		330		385	
Octava 4	440	495	550	605	660	715	770	825
Octava 5	880							
	La	Si	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La

observamos que la segunda octava tiene dos notas, la tercera cuatro, y la cuarta ocho, es decir, una octava completa natural. En forma análoga se determinan las distancias entre las notas. La serie ordenada de esta manera se conoce como *escala natural.*

Referencias

[1] *The Euler Archive.* http://www.eulerarchive.com/.

[2] Leonhardus Eulerus, *De Natura et Propagatione Soni. Concerning the Nature and Propagation of Sound.* Translated & Annotated by Ian Bruce.

[3] Leonhardus Eulerus, *Tentamen Explicationis Phaenomenorum Aeris. An Essay Explaining the Properties of Air*. Translated & Annotated by Ian Bruce. Comm: Ac. Scient. Petr. Tom. II pp.347-368; Sept. 1727.

[4] Leonhardus Eulerus, *Tentamen Novae Theoriae Musicae*. Publicado originalmente como un libro por la Academia de San Petersburgo en 1739.

[5] M. Euler, *De la Propagation du Son*. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 15, 1766, pp. 185-209.

[6] M. Euler, *Supplement aux Recherches sur la Propagation du Son*. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 15, 1766, pp. 210-240.

[7] M. Euler, *Continuation des Recherches sur la Propagation du Son*. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 15, 1766, pp. 241-264.

[8] M. Euler, *Éclaircissemens plus détaillés sur la génération et la propagation du son, et sur la formation de lécho*. Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin 21, 1767, pp. 335-363.

[9] M. Euler, *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique*. Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin 20, 1766, pp. 165-173.

[10] M. Euler, *Du Veritable Caractère de la Musique Moderne*. Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin 20, 1766, pp. 174-199.

[11] Leonhardus Eulerus, *De harmoniae veris principiis perspeculum musicum repraesentatis*. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 18, 1774, pp. 330-353.

[12] Leonhardus Eulerus, *Meditatio de formatione vocum*. Opera Postuma 2, 1862, pp. 798-799.

[13] D. W. G. Ballentyne, D. R. Lovett, *A Dictionary of Named Effects and Laws*. Chapman and Hall Science Paperbacks, London, 1976.

[14] J. P. De Crousaz, *Traité du Beau*. 1714.

[15] J. B. J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*. Paris, 1822.

[16] U. Ingard and W. Kraushaar, *Introduction to Mechanics, Matter and Waves*. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1960.

[17] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens y J. V. Sanders, *Fundamentos de Acústica*. LIMUSA, México, 1988.

[18] R. Kubo, *Thermodynamics*. North-Holland, Amsterdam, 1968.

[19] M. de la Grange, *Miscellanea Physico-Mathematica*. Turin, 1759. Citado por Euler.

[20] *Relaciones entre la Música y las Matemáticas*. En www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io5/public_html/p7.html.

[21] S. D. Poisson, *Théorie Mathematique de la chaleur*. Paris, 1835.

[22] G. Porges, *Applied Acoustics*. Edward Arnold, London, 1977.

[23] J. P. Rameau, *Traité d'Harmonie*. Paris, 1722.

[24] T. Rossing, *The Science of Sound*. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1983.