Miscelánea Matemática **75** (2022) 71-86 SMM

**DOI:** https://doi.org/10.47234/mm.7506

# Una introducción a los espacios vectoriales de dimensión infinita

Alejandro Ríos Herrejón
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
chanchito@ciencias.unam.mx

## 1. Introducción

En un primer curso de álgebra lineal es común establecer la regla de que las bases de los espacios vectoriales estudiados sean conjuntos finitos. Esta convención permite hablar de las nuevas ideas que se quieren presentar (dimensión, transformaciones lineales, productos interiores, etcétera), sin la necesidad de detenerse en tecnicismos que se resuelven a menudo con las herramientas de la teoría de conjuntos que los estudiantes de licenciatura no conocen en ese punto de sus vidas académicas.

Sin embargo, para los interesados en el álgebra lineal que no saben en dónde conseguir más información, aparece la interrogante de qué sucede si la dimensión del espacio vectorial no es finita y las respuestas llegan mucho más adelante en su formación matemática.

Es por eso que, cuando comencé el quinto semestre en la Facultad de Ciencias de la UNAM, esperaba encontrar en el mapa curricular un curso de «Álgebra Lineal III» que abordara la siguiente pregunta: ¿cuáles de los resultados que son ciertos para espacios de dimensión finita lo siguen siendo cuando se deja la finitud a un lado?

En este artículo expondré, desde un enfoque conjuntista, varios aspectos de esta pregunta con la intención de motivar a alguno que otro lector para que se adentre más en el mundo de los espacios vectoriales de dimensión infinita y, con un poco de suerte, ayudar a los alumnos atraídos por el área con algunos caminos que pueden seguir para profundizar en ella.

---

*Palabras clave*: espacios vectoriales, bases de Hamel, dimensión infinita, transformaciones lineales.

Este trabajo fue elaborado con el apoyo económico del CONACYT (núm. 814282).

## 2. Conceptos preliminares

Cualquier concepto conjuntista que no aparezca definido explícitamente aquí deberá entenderse como en [3].

Utilizaremos el símbolo $\omega$ para denotar al conjunto de los números naturales, es decir, $\omega$ será el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Un *conjunto parcialmente ordenado* será una pareja $(X, \leq)$ donde $X$ es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria en $X$ que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En estas circunstancias, diremos que $x \in X$ es un *elemento maximal* de $X$ si no existe $y \in X$ distinto de $x$ tal que $x \leq y$. Además, si $Y \subseteq X$, $x$ será llamado una *cota superior* de $Y$ si $y \leq x$, siempre que $y \in Y$. Finalmente, diremos que $Y$ es una *cadena* en $X$ si para cualesquiera $y, z \in Y$ se satisface que $y \leq z$ o $z \leq y$.

El siguiente resultado es conocido como el lema de Kuratowski–Zorn. En vista de que presentar los detalles estrictamente conjuntistas no es el objetivo de este trabajo, únicamente nos limitamos a mencionar que este lema es una de las equivalencias importantes del célebre axioma de elección y recomendamos al lector interesado consultar [3, §8.3].

**Lema 2.1.** *Cualquier conjunto parcialmente ordenado y no vacío en el cual toda cadena tiene una cota superior, tiene un elemento maximal.*

Para lo que expondremos en este texto no es necesario definir con precisión qué es un número cardinal. De hecho, basta con tener la siguiente idea intuitiva: la noción de número cardinal es una generalización del concepto de número natural que permite determinar, en un sentido bien definido, cuántos elementos tiene un conjunto, independientemente de si este es finito o no.

Con esta convención en mente, si $X$ es un conjunto, el *número cardinal de* $X$, denotado por $|X|$, representará al número de elementos de $X$. Por ejemplo, es común utilizar el símbolo $\aleph_0$ para denotar al número cardinal $|\omega|$.

Una consecuencia del axioma de elección es que cualesquiera dos números cardinales son comparables, es decir, si $X$ y $Y$ son conjuntos, entonces $|X| \leq |Y|$, o bien, $|Y| \leq |X|$. Además, es posible definir operaciones aritméticas entre números cardinales que generalizan las operaciones de suma, producto y exponenciación que realizamos en el conjunto de los números naturales.

Para fines de este trabajo, los únicos hechos que necesitaremos acerca de números cardinales y aritmética cardinal los presentamos, sin demostración, en el siguiente lema.

**Lema 2.2.** *Si $X$ y $Y$ son conjuntos, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Cuando $X \subseteq Y$, $|X| \leq |Y|$.*

2. $|X| = |Y|$, *siempre que* $|X| \leq |Y|$ *y* $|Y| \leq |X|$.
3. *Si* $X \cap Y = \emptyset$, *entonces* $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.

Aquellos interesados en consultar los detalles de estos resultados, así como la definición precisa de número cardinal, se les recomienda revisar [3, Cap. 7].

## 3. Espacios vectoriales de dimensión infinita

El libro de álgebra lineal en el que nos vamos a basar es [2]. Todos los conceptos algebraicos que no sean definidos explícitamente aquí deberán entenderse como indica dicho texto.

Comenzaremos por recordar los conceptos básicos de independencia lineal y base de Hamel para un espacio vectorial. Convengamos en denotar por $F$ a un campo y por $V$ a un espacio vectorial sobre $F$. También, utilizaremos los símbolos $\vec{0}$ y $0$ para hablar de los neutros aditivos de $V$ y $F$, respectivamente.

Para un subconjunto $S$ de $V$, el símbolo $[S]$ representará al subespacio vectorial generado por $S$. Con la notación del libro [2], los símbolos $[S]$ y $\operatorname{span}(S)$ son los mismos conjuntos.

Un conjunto $S$ es *linealmente dependiente* si para algún $n \in \omega$ existen colecciones $\{v_i : i \leq n\} \subseteq S$ y $\{a_i : i \leq n\} \subseteq F \setminus \{0\}$ de tal manera que $\{v_i : i \leq n\}$ está indizada sin repeticiones y $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \vec{0}$. Diremos que $S$ es *linealmente independiente* si $S$ no es linealmente dependiente.

Una observación inmediata es que la propiedad de independencia lineal es hereditaria, es decir, si $S$ es linealmente independiente y $T$ es un subconjunto de $S$, entonces $T$ es linealmente independiente.

En matemáticas existen múltiples definiciones de base, por ejemplo, las bases de Schauder para estudiar espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita. Por esta razón, es común llamarle «base de Hamel» a las bases con las que se trabajan en los cursos básicos de álgebra lineal. Puntualmente, diremos que un subconjunto $B$ de $V$ es una *base de Hamel* para $V$ si $B$ es linealmente independiente y satisface la igualdad $[B] = V$.

Una simple observación revela que $\mathscr{F}$, la colección de todos los subconjuntos linealmente independientes de $V$, equipado con la contención directa, es un conjunto parcialmente ordenado que satisface las hipótesis del lema 2.1; por ende, una aplicación de ese resultado nos provee de un elemento maximal de $\mathscr{F}$. En resumen, existe un elemento $B \in \mathscr{F}$ que satisface la siguiente implicación: si $B' \in \mathscr{F}$ es tal que $B \subseteq B'$, entonces $B = B'$.

Este comentario es fundamental en vista del siguiente hecho.

**Proposición 3.1.** *Las bases de Hamel para $V$ son, precisamente, los elementos maximales de $\mathscr{F}$.*

*Demostración.* Comencemos por verificar que las bases de Hamel para $V$ son elementos maximales de $\mathscr{F}$. Sean $B$ una base de Hamel para $V$ y $B' \in \mathscr{F}$ de tal forma que $B \subseteq B'$. Supongamos, en busca de una contradicción, que existe $v \in B' \setminus B$. Podemos emplear que $B$ genera al espacio $V$ para hallar $n \in \omega$, $\{v_i : i \leq n\} \subseteq B$ y $\{a_i : i \leq n\} \subseteq F \setminus \{0\}$, con el conjunto de vectores indizado sin repeticiones, de tal modo que $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = v$. De esta manera, $B \cup \{v\}$ no es linealmente independiente. Así, la contención $B \cup \{v\} \subseteq B'$ nos da la contradicción $B' \notin \mathscr{F}$. Este absurdo muestra que $B$ es un elemento maximal de $\mathscr{F}$.

Para la otra implicación, supongamos que $B$ es un elemento maximal de la familia $\mathscr{F}$. Con el objetivo de ver que $B$ es una base de Hamel para $B$, y en virtud de que $B$ es un subconjunto linealmente independiente de $V$, únicamente hay que comprobar que $[B] = V$.

Ahora, en vista de que $[B]$ es un subespacio vectorial de $V$, basta con argumentar que todo elemento de $V$ pertenece a $[B]$. Supongamos por el contrario que existe $v \in V$ de modo que $v \notin [B]$. Mostraremos a continuación que $B \cup \{v\} \in \mathscr{F}$. Tomemos $\{v_i : i \leq n\} \subseteq B$ y $\{a_i : i \leq n\} \subseteq F$, con el conjunto de vectores indizado sin repeticiones, tales que $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \vec{0}$. Contemplamos los siguientes dos casos.

**Caso 1.** $v \notin \{v_i : i \leq n\}$.

En este caso, $\{v_i : i \leq n\}$ es un subconjunto del conjunto linealmente independiente $B$ y, por lo tanto, $a_i = 0$ para todo $i \leq n$.

**Caso 2.** $v \in \{v_i : i \leq n\}$.

Fijemos $j \leq n$ tal que $v = v_j$. La igualdad $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \vec{0}$ implica que $a_j v_j = -\sum_{i \neq j} a_i v_i$. Luego, si $a_j \neq 0$, tenemos que $v_j = -\sum_{i \neq j} (a_i / a_j) v_i$ con $\{v_i : i \leq n \text{ y } i \neq j\} \subseteq B$, contradiciendo que $v \notin [B]$. En consecuencia, $a_j = 0$. Lo anterior implica que la igualdad $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \vec{0}$ se convierte en $\sum_{i \neq j} a_i v_i = \vec{0}$ y, como $\{v_i : i \leq n \text{ y } i \neq j\} \subseteq B$ con $B \in \mathscr{F}$, tenemos que $a_i = 0$ para cada $i \neq j$. Esto prueba que $a_i = 0$ para toda $i \leq n$.

Por lo tanto, $B \cup \{v\}$ es linealmente independiente, es decir, es un elemento de $\mathscr{F}$. Finalmente, como $v \notin B$, se cumple que $B$ es un subconjunto propio de $B \cup \{v\}$, lo cual contradice la maximalidad de $B$. Esto garantiza que $v \in [B]$ y, por ende, que $[B] = V$, como se quería. $\square$

En [2, Cor. 1, p. 46] se comprueba que si $B$ es una base de Hamel para $V$ con $n \in \omega$ vectores, entonces cualquier base de Hamel para $V$ tiene, precisamente, $n$ vectores.

Una cuestión natural que surge cuando profundizamos en el álgebra lineal y nos alejamos de las nociones de finitud es si sucede lo mismo en general, es decir, ¿será cierto que cualesquiera dos bases para un espacio vectorial en arbitrario tienen la misma cardinalidad?

La respuesta para la interrogante anterior es que sí; no obstante, como la demostración de ese resultado es bastante técnica (un argumento combinatorio puede encontrarse en [6, Teo. 2.5, p. 23]), omitiremos incluir los detalles en el presente trabajo, pero dejaremos constancia escrita de este hecho en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.** *Si $B$ y $B'$ son bases de Hamel para $V$, se tiene que $|B| = |B'|$.*

En virtud del resultado anterior no hay riesgo de confusión al establecer el siguiente concepto: la *dimensión* de un espacio vectorial $V$, denotada por $\dim(V)$, se define como la cardinalidad de cualquier base de Hamel para $V$.

Es posible comprobar que $\aleph_0$ es el primer número cardinal que es estrictamente mayor que todos los números naturales (véase [3, Teo. 9.59]). De este modo, la frase «$V$ es de dimensión finita» puede reemplazarse por el símbolo $\dim(V) < \aleph_0$.

Los textos introductorios al álgebra lineal se limitan a trabajar con espacios vectoriales cuya dimensión satisface la desigualdad del párrafo previo. En lo que sigue expondremos algunos resultados acerca de espacios vectoriales sin restricciones en su dimensión. Además, mostraremos varios ejemplos particulares de espacios de dimensión infinita para exhibir que, en ocasiones, la intuición y la práctica que obtenemos al trabajar con espacios vectoriales de dimensión finita puede hacernos creer que las cosas son de cierta forma, cuando la realidad es que no es así.

Comencemos con un par de enunciados auxiliares que utilizaremos en repetidas ocasiones en las siguientes páginas.

**Lema 3.3.** *Si $S$ es un subconjunto linealmente independiente de $V$, entonces existe $B$, una base de Hamel para $V$, que satisface la inclusión $S \subseteq B$.*

*Demostración.* Consideremos al conjunto $\mathscr{B} = \{B \subseteq V : B \in \mathscr{F} \text{ y } S \subseteq B\}$. En vista de que $S$ es un elemento de $\mathscr{B}$, se puede verificar que $(\mathscr{B}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y no vacío. Además, un argumento rutinario muestra que $(\mathscr{B}, \subseteq)$ satisface las hipótesis del lema 2.1. Así, una aplicación de este resultado nos provee de un elemento $B$ de $\mathscr{B}$ que es $\subseteq$–maximal; en particular, $B$ es un elemento de $\mathscr{F}$ que contiene al conjunto $S$.

Nuestro objetivo ahora, en virtud de la proposición 3.1, es mostrar que $B$ es un elemento maximal de $\mathscr{F}$. Lo anterior es una tarea sencilla ya que, si $B' \in \mathscr{F}$ verifica la contención $B \subseteq B'$, entonces automáticamente $B'$ es un elemento de la colección $\mathscr{B}$. De esta manera, la maximalidad de $B$ con respecto a la familia $\mathscr{B}$ garantiza que $B = B'$. Concluimos entonces que $B$ es una base de Hamel para $V$ que extiende a $S$. $\square$

**Corolario 3.4.** *Si $W$ es un subespacio vectorial de $V$, entonces* $\dim(W) \leq \dim(V)$.

*Demostración.* Toda base de Hamel para $W$ es un subconjunto linealmente independiente de $V$. Así, si $B$ es una base de Hamel para $W$, y empleamos el lema 3.3 para hallar una base de Hamel $B'$ para $V$ que verifique la contención $B \subseteq B'$, entonces esta última inclusión se traduce, gracias al lema 2.2, en las relaciones $\dim(W) = |B| \leq |B'| = \dim(V)$. $\square$

Cuando la dimensión de $V$ es finita se puede fortalecer el corolario 3.4 en el siguiente sentido: si $V$ es un espacio vectorial con $\dim(V) < \aleph_0$ y $W$ es un subespacio propio de $V$, entonces $\dim(W) < \dim(V)$. Mostraremos que esta desigualdad estricta puede fallar si $\dim(V) \geq \aleph_0$.

Denotemos por $\mathbb{R}[x]$ al espacio de todos los polinomios con coeficientes reales en una indeterminada $x$. En vista de que $B = \{x^n : n \in \omega\}$ es una base de Hamel de tamaño $\aleph_0$ para $\mathbb{R}[x]$ (véase [2, p. 43]), tenemos enseguida que $\dim(\mathbb{R}[x]) = \aleph_0$. Por otro lado, si hacemos $B' = \{x^{2n} : n \in \omega\}$, entonces $B'$ es un subconjunto linealmente independiente de $B$; en especial, $B'$ es una base de Hamel para $[B']$ de cardinalidad $\aleph_0$. De este modo, a pesar de que $[B']$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}[x]$, sus dimensiones satisfacen las relaciones $\dim([B']) = \aleph_0 = \dim(\mathbb{R}[x])$.

Se puede utlizar la definición de von Neumann de número natural para comprobar que, como conjuntos, estos están formados por los números naturales anteriores a ellos:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ &\vdots \\ n &= \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

Este hecho permite establecer, para $n \in \omega \setminus \{0\}$, una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{R}^n$ y ${}^n\mathbb{R}$, el conjunto de todas las funciones con dominio $n$ y contradominio $\mathbb{R}$; simplemente considere la asignación $\varphi : \mathbb{R}^n \to {}^n\mathbb{R}$ determinada por

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

donde la función $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) : n \to \mathbb{R}$ está definida mediante la regla

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})(i) = x_i.$$

Así, desde un punto de vista conjuntista, pensar en los elementos de $\mathbb{R}^n$ como coordenadas es equivalente a pensarlos como sucesiones finitas de números reales.

Un resultado conocido es que si $n \in \omega \setminus \{0\}$ y pensamos en $\mathbb{R}^n$ como un $\mathbb{R}$–espacio vectorial, entonces $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Ahora, desde la perspectiva del álgebra lineal, el $\mathbb{R}$–espacio vectorial ${}^n\mathbb{R}$ (donde la suma y el producto por escalares se hacen de la manera natural como funciones) es prácticamente indistinguible de $\mathbb{R}^n$, en el sentido de que la asignación mencionada arriba es un isomorfismo lineal entre ellos. Lo previo garantiza que, para cualquier $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\dim({}^n\mathbb{R}) = n$.

El siguiente paso natural es preguntarse por el $\mathbb{R}$–espacio vectorial ${}^\omega\mathbb{R}$; esto es, el conjunto de todas las sucesiones de números reales, con las operaciones de suma y producto por escalares realizadas del modo usual. Una forma alternativa de pensar en los elementos de ${}^\omega\mathbb{R}$ (que se usa, por ejemplo, en los cursos de cálculo diferencial), es que son «coordenadas infinitas» donde las operaciones algebraicas se realizan entrada a entrada.

En estas circunstancias, es tentador pensar que la dimensión de ${}^\omega\mathbb{R}$ preservará el patrón que hemos observado hasta ahora. Dicho con más precisión, una conjetura sensata es que se verifique la igualdad $\dim({}^\omega\mathbb{R}) = \aleph_0$. El resultado que viene muestra que esta idea es incorrecta.

Antes de comenzar es necesario hacer un par de comentarios. Primero, en lo que resta del texto denotaremos por $\mathfrak{c}$ al número cardinal $|\mathbb{R}|$. Segundo, es posible demostrar que $|{}^\omega\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, sin embargo, como el argumento que sustenta esta relación es bastante elaborado (véase el párrafo posterior a la proposición 7.38 de [3]), optaremos por asumir su veracidad y la utilizaremos libremente.

**Proposición 3.5.** $\dim({}^\omega\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

*Demostración.* Lo primero que haremos será exhibir un subconjunto de ${}^\omega\mathbb{R}$ que sea linealmente independiente y de tamaño (cardinalidad) $\mathfrak{c}$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, denotemos por $\overline{s} : \omega \to \mathbb{R}$ a la función definida como $\overline{s}(n) = s^n$ (el símbolo «$s^n$» representa al número real $s$ elevado a la $n$-ésima potencia). Nuestro objetivo es verificar que $S = \{\overline{s} : s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ es linealmente independiente.

Fijemos $n \in \omega$, $\{s_k : k \leq n\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con este indizado sin repeticiones, y $\{a_k : k \leq n\} \subseteq \mathbb{R}$ de tal manera que $\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{s_k} = \overline{0}$ (note que $\overline{0}$ es el neutro aditivo de ${}^\omega\mathbb{R}$). Consideremos a la matriz $M$ de tamaño $(n+1) \times (n+1)$ definida de modo que $M_{ij} = (s_j)^i$ (observe que la primera columna de $M$ está formada por los números de la forma $M_{i0}$, con $0 \leq i \leq n$). Pongamos ahora $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ y notemos que $a \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Pensar en $a$ como vector columna nos permite trabajar con el producto de matrices $Ma$. Con esta idea presente, notemos que $(Ma)_i = \sum_{k=0}^{n} a_k(s_k)^i = (\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{s_k})(i) = 0$, donde $(Ma)_i$ es el $i$-ésimo renglón de $Ma$. Esto nos dice que $Ma = \vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos el sistema de $n+1$ ecuaciones lineales en $n+1$ indeterminadas inducido por $Mx = \vec{0}$. Lo hecho hasta aquí nos dice que $a$ es una solución del sistema $Mx = \vec{0}$. En vista de que $\vec{0}$ es una solución trivial del sistema, si logramos demostrar que este tiene una única solución, obtendríamos que $a = \vec{0}$, y esto a su vez implicaría que, para cualquier $k \leq n$, se satisface la igualdad $a_k = 0$, como queríamos.

Para probar que el sistema $Mx = \vec{0}$ tiene una única solución, [2, Teo. 3.10, p. 174] indica que es suficiente ver que $M$ es una matriz invertible. Ahora, para ver que $M$ es invertible, los resultados que aparecen en [2, p. 223] y [2, Teo. 4.8, p. 224] garantizan que basta con probar que $M^t$, la transpuesta de $M$, es invertible. Por último, la invertibilidad de $M^t$ se desprende de la inyectividad de la transformación lineal $L_{M^t}$, la transformación lineal correspondiente a la matriz $M^T$, gracias a [2, Teo. 2.5, p. 71] y a [2, Cor. 2, p. 102]. Verifiquemos entonces esto último comprobando que el núcleo de $L_{M^t}$ es trivial.

Sea $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ de tal modo que $L_{M^t}(b) = \vec{0}$. Convengamos en denotar por $b_k$ a la $k$-ésima coordenada de $b$. Tenemos que $0 = (L_{M^t}(b))_i = \sum_{k=0}^{n} b_k(s_i)^k$, para cada $i \leq n$. Esto implica que $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ es un polinomio de grado, a lo más, $n$ y satisface $p(s_k) = 0$, siempre que $k \leq n$; esto es, $p(x)$ posee $n+1$ raíces distintas. Se sigue de [7, 7.(c), p. 50] que $p(x)$ es el polinomio cero y en consecuencia, $b_k = 0$, siempre que $k \leq n$; equivalentemente, $b = \vec{0}$, tal y como se quería probar. Esto completa la demostración de que $S$ es un conjunto linealmente independiente de ${}^{\omega}\mathbb{R}$.

Lo que sigue es emplear el lema 3.3 para hallar $B$, una base de Hamel para ${}^{\omega}\mathbb{R}$, que haga cierta la inclusión $S \subseteq B$. Por último, el párrafo previo a esta proposición combinado con el lema 2.2 nos dan las relaciones

$$\mathfrak{c} = |S| \leq |B| \leq |{}^{\omega}\mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$

En suma, $|B| = \mathfrak{c}$ y, por ende, $\dim({}^{\omega}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. □

Nuestro siguiente objetivo es hablar un poco de $\mathbb{R}$–espacios vectoriales que están acompañados por una función especial, a saber, un producto interior. Con esto en mente recordemos que si $V$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial, entonces un *producto interior* (definido positivo) es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $v, w \in V$:

1. $\langle v, v\rangle \geq 0$;
2. $\langle v, v\rangle = 0$ implica que $v = \vec{0}$;
3. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$; y
4. la función que se obtiene al fijar la segunda entrada, $\langle\cdot, w\rangle : V \to \mathbb{R}$, es una transformación lineal.

Sea $V$ un $\mathbb{R}$–espacio vectorial equipado con un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Si $W$ y $Z$ son un par de subespacios vectoriales de $V$, diremos que $Z$ es un *complemento ortogonal* de $W$ si

1. $V = W \oplus Z$ (esto es, $V = W + Z$ y $W \cap Z = \{\vec{0}\}$); y
2. $\langle w, z\rangle = 0$, para cualesquiera $w \in W$ y $z \in Z$.

Una aplicación del teorema de Gram-Schmidt (véase [2, p. 344]) permite demostrar que si $W$ es un subespacio de dimensión finita de $V$, entonces $W$ admite un complemento ortogonal. Cerraremos esta sección con un ejemplo de un espacio de dimensión infinita y un subespacio de este que no tiene complementos ortogonales. Para lo que viene es recomendable tener familiaridad con el material contenido en [7, Caps. 6, 10 y 13].

En lo que resta de la sección convengamos en denotar por $V$ a $C([0,1])$, el conjunto de todas las funciones continuas del intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Argumentos de cálculo elemental muestran que $V$, con las operaciones de suma y producto por escalares efectuadas de la manera natural, es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial. Además, en [2, p. 331] viene expuesto que al definir $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mediante

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

la función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ resulta ser un producto interior en $V$.

Con el objetivo de hacer un cálculo explícito de la dimensión de $V$, concentrémonos en argumentar que $\{e^{cx} : c \in \mathbb{R}\}$ es una colección de funciones linealmente independientes, donde $e^t : [0,1] \to \mathbb{R}$ denota a la función exponencial. Notemos que, en este caso, el símbolo $\vec{0}$ representa a la función constante cero de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

Supongamos que $n \in \omega$, y sean $\{a_i : i \leq n\}$ y $\{c_i : i \leq n\}$ un par de colecciones de números reales, con esta última indizada sin repeticiones, de tal forma que

$$a_0e^{c_0x} + a_1e^{c_1x} + \cdots + a_ne^{c_nx} = \vec{0}.$$

Al derivar $n$-veces y evaluar en $x = 1$, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a_0e^{c_0} + a_1e^{c_1} + \cdots + a_ne^{c_n} &= 0\\
a_0c_0e^{c_0} + a_1c_1e^{c_1} + \cdots + a_nc_ne^{c_n} &= 0\\
a_0c_0^2e^{c_0} + a_1c_1^2e^{c_1} + \cdots + a_nc_n^2e^{c_n} &= 0\\
&\vdots\\
a_0c_0^ne^{c_0} + a_1c_1^ne^{c_1} + \cdots + a_nc_n^ne^{c_n} &= 0.
\end{aligned}
$$

Este a su vez se transforma en el sistema matricial:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ c_0 & c_1 & \dots & c_n\\ c_0^2 & c_1^2 & \dots & c_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_0^n & c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0e^{c_0}\\ a_1e^{c_1}\\ a_2e^{c_2}\\ \vdots\\ a_ne^{c_n} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}
$$

Nuestra meta ahora es denotar por $M$ a la matriz de $(n+1)\times(n+1)$ que aparece en la ecuación (1) y argumentar que es invertible. Los resultados que vienen en [2, p. 223] y [2, Teo. 4.8, p. 224] aseguran que es suficiente probar que $M^t$, la transpuesta de $M$, tiene determinante distinto de cero. Los lectores experimentados en matrices reconocerán a $M^t$ como una matriz de Vandermonde (véase [2, 22, p. 230]) y recordarán que su determinante está dado por la fórmula

$$\det(M^t) = \prod_{0\le i<j\le n} (c_j - c_i).$$

Así, como parte de nuestras hipótesis es que la colección $\{c_i : i \le n\}$ está indizada sin repeticiones, tenemos que $\det(M^t) \neq 0$ y, por ende, $M$ es una matriz invertible. De esta manera, si multiplicamos por $M^{-1}$ en ambos lados de la ecuación (1), obtenemos la igualdad

$$
\begin{pmatrix} a_0e^{c_0}\\ a_1e^{c_1}\\ a_2e^{c_2}\\ \vdots\\ a_ne^{c_n} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}
$$

que se resume diciendo que $a_ie^{c_i} = 0$, siempre que $i \le n$. Por último, como la exponencial es una función positiva, concluimos que $a_i = 0$ para cualquier $i \le n$. Esto completa la prueba de que $\{e^{cx} : c \in \mathbb{R}\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $V$.

Resta mencionar que el argumento expuesto en [6, Lema 1.12, p. 12] puede modificarse ligeramente para mostrar que $|V| = \mathfrak{c}$.

Con estos antecedentes podemos calcular la dimensión de $V$ sin dificultad: si utilizamos el lema 3.3 para hallar $B$, una base de Hamel para $V$ que extienda a $\{e^{cx} : c \in \mathbb{R}\}$, entonces

$$\mathfrak{c} = |\{e^{cx} : c \in \mathbb{R}\}| \leq |B| \leq |V| = \mathfrak{c};$$

es decir, $|B| = \mathfrak{c}$ y, por lo tanto, $\dim(V) = \mathfrak{c}$.

Ahora consideremos al subespacio $W = \{f \in V : f(0) = 0\}$. En este punto del texto, determinar la dimensión de $W$ es casi inmediato. La relación $\dim(W) \leq \mathfrak{c}$ se desprende del corolario 3.4 y el párrafo anterior. Para la desigualdad restante argumentaremos que $\{e^{cx} - 1 : c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $W$: si $n \in \omega$, y $\{a_i : i \leq n\}$ y $\{c_i : i \leq n\}$ son un par de subconjuntos de números reales, con los $c_i$ indizados sin repeticiones y distintos de cero, de tal modo que

$$a_0 \left(e^{c_0 x} - 1\right) + a_1 \left(e^{c_1 x} - 1\right) + \cdots + a_n \left(e^{c_n x} - 1\right) = \vec{0},$$

entonces derivando una vez obtenemos que

$$a_0 c_0 e^{c_0 x} + a_1 c_1 e^{c_1 x} + \cdots + a_n c_n e^{c_n x} = \vec{0}.$$

Así, como ya probamos que $\{e^{cx} : c \in \mathbb{R}\}$ es linealmente independiente, y además cada $c_i$ es distinto de cero, deducimos que $a_i = 0$, siempre que $i \leq n$. Por último, un argumento con el lema 3.3 asegura que $\dim(W) \geq \mathfrak{c}$ y, por ende, que $\dim(W) = \mathfrak{c}$.

Finalmente, afirmamos que $W$ no posee complementos ortogonales en $V$. Supongamos que $Z$ es un subespacio vectorial de $V$ de forma que, para cualesquiera $f \in W$ y $g \in Z$, se tiene la igualdad $\langle f, g\rangle = 0$. Al fijar $g \in Z$ tenemos enseguida que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xg(x)$ es un elemento de $W$; por lo tanto,

$$0 = \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 x(g(x))^2 dx.$$

A partir de que la integral definida de la función no negativa $x(g(x))^2$ sea cero, se deduce que esta función se anula en el intervalo $[0, 1]$. De este modo, $g^2$ es la función constante cero en $(0, 1]$ y, por ende, $g$ también tiene esta característica. Luego, un razonamiento que emplea continuidad asegura la igualdad $g(0) = 0$; en otras palabras, $g$ coincide con la función $\vec{0}$.

El argumento previo muestra que si $Z$ satisface la condición (2) que define a un complemento ortogonal para $W$, entonces forzosamente $Z = \{\vec{0}\}$. De este modo, como la función constante 1 es un elemento de la diferencia $V \setminus (W + Z)$, $Z$ no verifica el inciso (1) de la definición. En consecuencia, $Z$ no es un complemento ortogonal para $W$ en $V$.

## 4. Transformaciones lineales

En esta última sección mencionaremos algunos ejemplos para exhibir cómo afecta a las transformaciones lineales que la dimensión de los espacios vectoriales sea infinita.

Recordemos que si $f : V \to W$ es una transformación lineal entre $F$–espacios vectoriales, entonces el *núcleo* y la *imagen* de $f$ son, respectivamente, los conjuntos

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{v \in V : f(v) = \vec{0}\right\} \quad \text{y} \quad f[V] = \{f(v) : v \in V\}.$$

Con estas definiciones auxiliares, el teorema de la dimensión (véase [2, Theo. 2.3, p. 70]) establece que, si $\dim(V) < \aleph_0$, entonces

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(f[V]). \tag{2}$$

Una cuestión natural que puede surgir es si la igualdad (2) sigue siendo válida cuando la dimensión del espacio $V$ es infinita. Nuestra siguiente tarea será argumentar que esta expresión de aritmética cardinal se preserva independientemente de la dimensión de los espacios involucrados.

**Teorema 4.1.** *Si $f : V \to W$ es una transformación lineal entre $F$–espacios vectoriales, entonces se satisface la relación*

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(f[V]).$$

*Demostración.* Comencemos por fijar un par de bases de Hamel, $B_0$ y $B_1$, para $\mathrm{Ker}(f)$ y $f[V]$, respectivamente. Para cada $w \in B_1$, la condición $w \in f[V]$ nos permite tomar $v(w) \in V$ de tal modo que $f(v(w)) = w$.

Afirmación. $B = B_0 \cup \{v(w) : w \in B_1\}$ es una base de Hamel para $V$.

Concentrémonos primero en verificar que $[B] = V$. Como siempre, en vista de la contención $B \subseteq V$, la inclusión $[B] \subseteq V$ es inmediata. Por otro lado, si $v \in V$, entonces existen $m \in \omega$ y colecciones $\{b_j : j \leq m\} \subseteq F$, $\{w_j : j \leq m\} \subseteq B_1$, con el conjunto de vectores indizado sin repeticiones, de manera que $f(v) = \sum_{j \leq m} b_j w_j$. Luego, si ponemos $u = \sum_{j \leq m} b_j v(w_j)$, la linealidad de $f$ nos asegura que

$$\begin{aligned} f(v-u) = f(v) - f(u) &= \sum_{j \leq m} b_j w_j - f\left(\sum_{j \leq m} b_j v(w_j)\right) \\ &= \sum_{j \leq m} b_j w_j - \sum_{j \leq m} b_j f(v(w_j)) = \vec{0}; \end{aligned}$$

es decir, $v - u$ pertenece al núcleo de $f$. Así, existen $n \in \omega$ y colecciones $\{a_i : i \leq n\} \subseteq F$, $\{u_i : i \leq n\} \subseteq B_0$, con el conjunto de vectores indizado sin repeticiones, tales que $v - u = \sum_{i \leq n} a_i u_i$. Por lo tanto, obtenemos las relaciones

$$v = \sum_{i \leq n} a_i u_i + u = \sum_{i \leq n} a_i u_i + \sum_{j \leq m} b_j v(w_j),$$

con este último un elemento de $[B]$.

Veamos ahora que $B$ es un subconjunto linealmente independiente de $V$. Sean $n$ y $m$ un par de números naturales, y tomemos colecciones $\{a_i : i \leq n\}, \{b_j : j \leq m\} \subseteq F$, $\{u_i : i \leq n\} \subseteq B_0$ y $\{w_j : j \leq m\} \subseteq B_1$, con los conjuntos de vectores indizados sin repeticiones, que hagan cierta la ecuación

$$\vec{0} = \sum_{i \leq n} a_i u_i + \sum_{j \leq m} b_j v(w_j). \tag{3}$$

Nuestro objetivo es comprobar que las igualdades $a_i = 0 = b_j$ son ciertas para cualesquiera $i \leq n$ y $j \leq m$.

Con esta meta presente, notemos que una combinación de la inclusión $\{u_i : i \leq n\} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ y la linealidad de $f$ nos da las relaciones

$$\begin{aligned}\vec{0} = f(\vec{0}) &= f\left(\sum_{i \leq n} a_i u_i + \sum_{j \leq m} b_j v(w_j)\right) \\ &= \sum_{i \leq n} a_i f(u_i) + \sum_{j \leq m} b_j f\left(v(w_j)\right) \\ &= \sum_{j \leq m} b_j w_j.\end{aligned}$$

De esta forma, como $\{w_j : j \leq m\}$ está contenido en el conjunto linealmente independiente $B_1$, deducimos que $b_j = 0$, siempre que $j \leq m$. Así, la ecuación (3) se convierte en $\vec{0} = \sum_{i \leq n} a_i u_i$. Por lo tanto, podemos usar que $\{u_i : i \leq n\}$ es un subconjunto del linealmente independiente $B_0$ para garantizar que $a_i = 0$, cuando $i \leq n$. Esto completa el argumento de que $B$ es una base de Hamel para $V$.

Para finalizar, notemos que $B_0$ y $\{v(w) : w \in B_1\}$ no tienen elementos en común. En efecto, si suponemos por el contrario que existen $u \in B_0$ y $w \in B_1$ tales que $u = v(w)$, entonces, como $u \in \mathrm{Ker}(f)$, $\vec{0} = f(u) = f\left(v(w)\right) = w$; en otras palabras, el vector cero es un elemento del conjunto linealmente independiente $B_1$, un absurdo.

Así, gracias al lema 2.2 se deducen las relaciones

$$\begin{aligned}\dim(V) = |B| &= |B_0 \cup \{v(w) : w \in B_1\}| \\ &= |B_0| + |B_1| = \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + \dim\left(f[V]\right).\end{aligned}$$

$\square$

Un corolario que suele acompañar al teorema de la dimensión en su versión finita es que, si $f : V \to W$ es una transformación lineal entre $F$–espacios vectoriales que satisfacen las relaciones $\dim(V) = \dim(W) < \aleph_0$, entonces $f$ es inyectiva si y solo si $f$ es suprayectiva.

Este resultado puede fallar cuando prescindimos de la finitud. Trabajaremos una vez más en nuestro familiar espacio de sucesiones de números reales ${}^{\omega}\mathbb{R}$. Denotemos por $c_0$ al subconjunto de ${}^{\omega}\mathbb{R}$ formado por las sucesiones convergentes a 0. Observemos que las propiedades aritméticas de límites de sucesiones garantizan que $c_0$ es un subespacio vectorial de ${}^{\omega}\mathbb{R}$.

Ahora, consideremos a la función $f : c_0 \to c_0$ definida mediante la regla

$$(s_0, s_1, s_2, s_3, \dots) \mapsto (0, s_0, s_1, s_2, \dots).$$

No es difícil comprobar que $f$ es una transformación lineal inyectiva; sin embargo, la sucesión $(1, 0, 0, 0, \dots)$ es un elemento de la diferencia $c_0 \setminus f[c_0]$, lo cual muestra que $f$ no es suprayectiva.

También es posible obtener una función con las propiedades intercambiadas. Por ejemplo, la asignación de $c_0$ en $c_0$ determinada como

$$(s_0, s_1, s_2, s_3, \dots) \mapsto (s_1, s_2, s_3, s_4, \dots),$$

es una transformación lineal suprayectiva que no es inyectiva.

El hecho de que existan transformaciones lineales con estas características nos muestran, en virtud del corolario de la versión finita del teorema de la dimensión, que $\dim(c_0) \geq \aleph_0$. Además, el corolario 3.4 y la proposición 3.5 nos dan las relaciones $\dim(c_0) \leq \dim({}^{\omega}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$; por lo tanto, $\aleph_0 \leq \dim(c_0) \leq \mathfrak{c}$. No presentaremos el argumento, pero, con el material expuesto hasta ahora, se puede verificar que esta cota superior se alcanza, es decir, que $\dim(c_0) = \mathfrak{c}$.

Nuestro último ejemplo requiere familiaridad con las nociones relacionadas a los vectores y valores propios. Recordemos que si $V$ es un $F$–espacio vectorial, $f : V \to V$ es un operador lineal, $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ y $\lambda \in F$, entonces $v$ es un *vector propio* de $f$ correspondiente al *valor propio* $\lambda$ si se satisface la relación $f(v) = \lambda v$.

Con esto en mente, se puede argumentar que si $\mathbb{C}$ denota al campo de los números complejos, $V$ es un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ es un operador lineal, entonces $f$ tiene un valor propio (véase [1, 5.21, p. 145]). A continuación se mostrará un ejemplo de un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dimensión infinita que carece de esta propiedad.

Una generalización natural de nuestro $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión infinita predilecto, ${}^{\omega}\mathbb{R}$, es el $\mathbb{C}$–espacio vectorial formado por todas las sucesiones de números complejos ${}^{\omega}\mathbb{C}$, donde las operaciones algebraicas se realizan de forma análoga a su contraparte real.

Consideremos al operador $f : {}^{\omega}\mathbb{C} \to {}^{\omega}\mathbb{C}$ dado por

$$(z_0, z_1, z_2, z_3, \dots) \mapsto (0, z_0, z_1, z_2, \dots).$$

En vista de que $f$ es una función inyectiva, tenemos que $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ y, como los vectores propios son distintos de $\vec{0}$, el número complejo 0 no puede ser un valor propio de $f$. Ahora, supongamos que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $(z_n)_{n\in\omega} \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ son tales que

$$(0, z_0, z_1, z_2, \dots) = \lambda(z_0, z_1, z_2, z_3, \dots).$$

De la ecuación previa se desprenden las relaciones $\lambda z_0 = 0$ y $\lambda z_{n+1} = z_n$, siempre que $n \in \omega$. Por último, un argumento inductivo muestra que $(z_n)_{n\in\omega}$ es idéntico a $\vec{0}$; en especial, $\lambda$ no es un valor propio de $f$.

Resta mencionar que el resultado anterior es una señal de que $\aleph_0 \leq \dim({}^{\omega}\mathbb{C})$. De hecho, se puede demostrar que $\dim({}^{\omega}\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$, pero, como en el caso de $c_0$, no haremos el argumento formal para sustentar esta igualdad.

Para concluir este trabajo mencionaremos un par de referencias con distintas perspectivas, con el objetivo de que el lector interesado en ahondar más en estos temas tenga alguna idea de por dónde puede empezar. En [4, Cap. 9] se expone, con un enfoque completamente algebraico, la teoría necesaria para estudiar espacios vectoriales de dimensión infinita en general. Finalmente, a las personas que están interesadas en la interacción entre el álgebra lineal y el análisis matemático se les recomienda consultar [5]; en este texto se estudian los espacios vectoriales de dimensión infinita desde el punto de vista del análisis funcional.

## Agradecimientos

El autor quisiera agradecer a los revisores por sus atentos comentarios y al Dr. Roberto Pichardo Mendoza por su apoyo y dirección en la elaboración de este trabajo.

## Bibliografía

[1] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3.ª ed., Springer, Cham, Undergraduate Texts in Mathematics, 2015.
[2] H. Friedberg, J. Insel y E. Spence, *Linear Algebra*, 4.ª ed., Pearson, 2002.
[3] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos: Una introducción*, 3.ª ed., Aportaciones matemáticas, *Textos*, núm. 13, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.
[4] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra.* II. *Linear Algebra*, 1.ª ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1953.
[5] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, 3.ª ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.

[6] A. Ríos Herrejón, «Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos al Álgebra Lineal y al Análisis Matemático», 2019, Tesis de licenciatura.
[7] M. Spivak, *Calculus*, 3.ª ed., Editorial Reverté, Barcelona, 2018.