I N D I C E

Pág.

Sección 1.

Introducción

El concepto de convexidad se puede definir en cualquier espacio vectorial, así como los hechos que aquí se presentarán tienen su debida generalización al caso más general en el que el espacio vectorial se le da una estructura topológica (espacio vectorial topológico). Sin embargo en el presente trabajo se tratará solamente con el caso muy particular de R^2, que de todas maneras nos da la información completa para poder obtener generalizaciones.

Ya que no sólo nos interesará la estructura vectorial de R^2, sino también su estructura topológica, introduciremos algunos conceptos que nos son de utilidad.

1.1. Definición. Sea $x \in R^n$ y $r>0$, al conjunto

$$B_r(x) = \{y \in R^n : |x-y| < r\}$$

se le llama bola (disco si n=2) o vecindad abierta de radio r con centro en x.

1.2. Definición. A un punto x en un conjunto $E \subset R^n$ se le llama punto interior de E si existe $r>0$ tal que

$$B_r(x) \subset E,$$

a un punto y se le llama <u>punto exterior</u> de E si es interior de su complemento R^n-E; si un punto z no es ni interior ni exterior, se le llama <u>punto frontera.</u> Al conjunto de los puntos interiores de E se les denota por

$$\text{int } E$$

al de los exteriores por ext E

y al de los frontera por fr E.

1.3. <u>Definición.</u> Se dice que un conjunto E es <u>abierto</u> si E = int E, y se dice que un conjunto F es <u>cerrado</u> si R^n - F es abierto.

<u>Problema 1.1</u> Probar que para todo punto frontera x de un conjunto E, $B_r(x)$ intersecta a E y a R^n - E para toda $r>0$.

<u>Problema 1.2</u> Probar que int E y ext E son abiertos.

<u>Problema 1.3</u> Probar que fr E es cerrado.

1.4. <u>Definición.</u> La <u>cerradura</u> de un conjunto E, denotada por $\bar{E}$, es (int E) $\cup$ (fr E).

Problema 1.4 Probar que $\bar{E}$ es cerrado.

Problema 1.5 Probar que E es cerrado si y sólo si E = $\bar{E}$

Problema 1.6 Probar A) que el mínimo conjunto cerrado que contiene a E es $\bar{E}$, y B) que el máximo abierto que está contenido en E es int E.

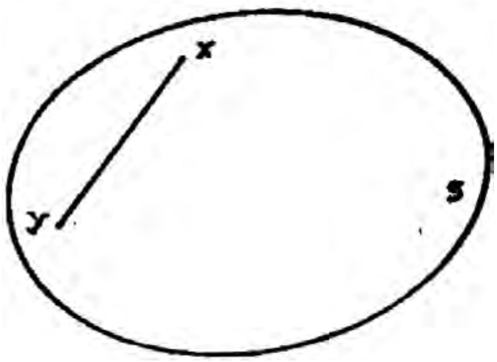
Sección 2.

<u>Conjuntos Convexos</u>

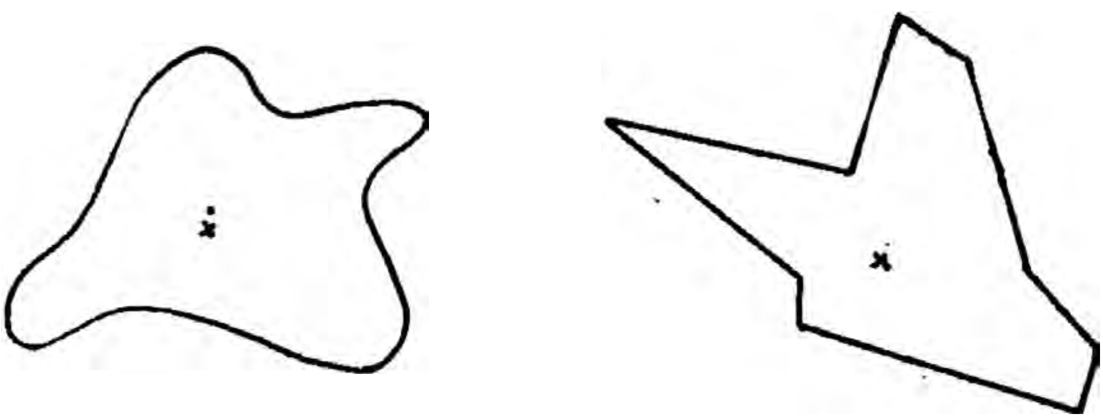
2.1. <u>Definición.</u> Sean x y y dos puntos en R^n, definimos al mento que une a x con y como el conjunto

$$xy = \{\alpha x + (1-\alpha)y;\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

2.2. Definición. Un conjunto $S \subset R^n$ se dice que es convexo si dados cualesquiera dos puntos x y y en S el segmento xy está contenido en S.

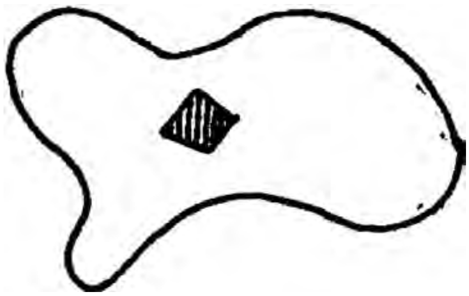


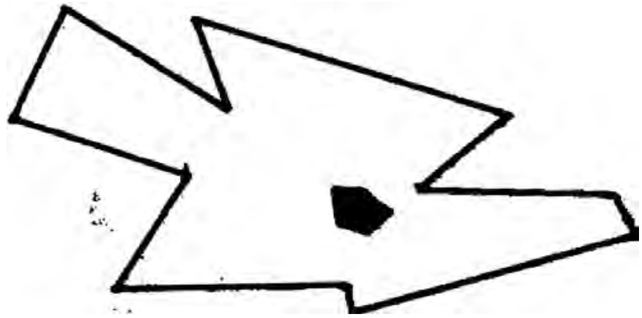
2.3. Definición. Un conjunto $S \subset R^n$ es asteroide respecto a un punto x, si para toda y en S, el segmento xy está contenido en S.



Problema 2.1 Sea $S' = \{x : S$ es asteroide respecto a $x\}$; probar que S' es convexo.

2.4. <u>Definición.</u> Al conjunto S' del problema anterior se le llama el núcleo convexo de S.





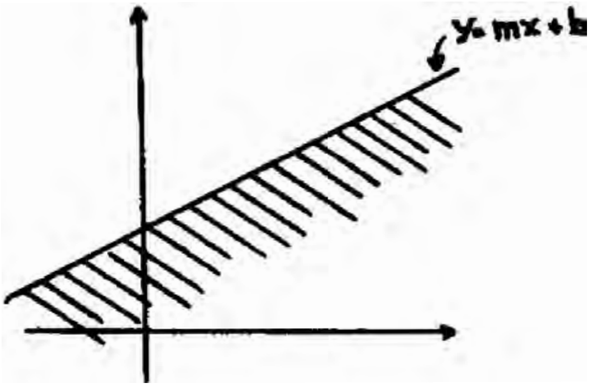
A partir de aquí, nos vamos a concretar a situaciones solamente en R^2, aunque vale la pena repetir que todos los hechos que aquí se enuncien tienen su debida generalización al caso de cualquier espacio euclidiano.

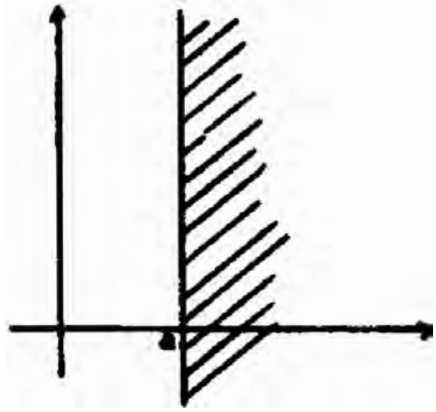
2.5. <u>Definición.</u> Los conjuntos

$$\{(x,y) \in R^2 \cdot\ y < mx + b\}$$
$$\{(x,y) \in R^2 : y > mx + b\}$$
$$\{(x,y) \in R^2 : x < a\}$$
$$\{(x,y) \in R^2 : x > a\}$$

son los <u>semiplanos abiertos</u> en R^2. Los <u>semiplanos cerrados</u> en R^2 son las correspondientes cerraduras.

Nota: Cabe aclarar que los semiplanos cerrados tienen una expresión análoga a la mencionada en la definición de los semiplanos abiertos bastando para esto escribir las desigualdades no estrictas.





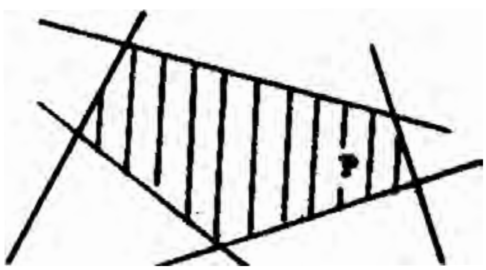
<u>Problema 2.2</u> Probar que todo semiplano es un conjunto convexo.

2.6. <u>Definición.</u> Se dice que un conjunto es <u>acotado</u> si existe un círculo con centro en el origen que lo contiene. A un conjunto en R^2 que es cerrado y acotado se le llama <u>compacto.</u>

2.7. <u>Definición.</u> A un conjunto $P \subset R^2$ se le llama <u>polígono convexo</u> si es la intersección de un número finito de semiplanos y es acotado. A las rectas que caracterizan a los semiplanos correspondientes se les llama <u>lados</u> del polígono.

<u>Problema 2.3</u> Probar que la intersección de cualquier familia de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

<u>Problema 2.4</u> Concluir del problema anterior que todo polígono convexo es un conjunto convexo.



2.8. <u>Definición.</u> $P \subset R_2$ es un <u>polígono</u> si es la unión de un núme ro finito de polígonos convexos y es conexo (i.e. no existen dos conjuntos abiertos cuyas intersecciones con P son no vacías y ajenas, y cuya unión contiene a P). Nuevamente diremos que las rectas que caracterizan a los correspondientes polígonos convexos son los lados de P.

<u>Problema 2.5</u> Probar que el polígono que tiene mínimo número de lados es el triángulo. Hint: Demostrar que la intersección de dos semiplanos es vacía o es no acotada.

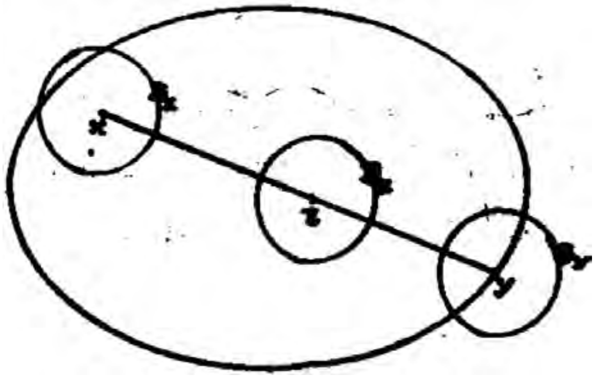
<u>Problema 2.6</u> Probar que todo polígono es acotado.

<u>Problema 2.7</u> Probar que todo disco es convexo.

2.9. <u>Teorema.</u> Sea S un conjunto convexo, entonces su cerradura $\bar{S}$ es convexo.

<u>Demostración:</u> Esta demostración se basa en el hecho de que los puntos de la cerradura de un conjunto quedan caracterizados por la propiedad de que todas sus vecindades intersectan al conjunto, i.e., están en el interior, o están en la frontera.

Sean $x, y \in \bar{S}$, y sea $z=\alpha x+\beta y$ con $\alpha>0$ y $\beta>0$, $\alpha+\beta = 1$. Sea B_z un disco arbitrario de radio r y centro en z. Veremos que éste intersecta al conjunto. Sean B_x y B_y discos con centros respectivamente en x y y y radio r, y sean $x_1 \in B_x \cap S$, $y_1 \in B_y \cap S$, ya que son no vacías. Sea $z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1$. Veremos que z_1, que por la convexidad de S está en S, también está en B_z probando así que $B_z \cap S \neq \emptyset$. Pero, $|z_1 - z| = |\alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x - \beta y| \leq \alpha|x_1 - x| + \beta|y_1 - y| < \alpha r + \beta r = r$ ||



Con ayuda del teorema anterior estamos en posibilidades de demostrar el siguiente

2.10. <u>Teorema.</u> Sea S un conjunto convexo, entonces es cierto que

i) Si x, y pertenecen a intS entonces xy está contenido en intS (intS es convexo)

ii) Si x está en frS y y está en intS entonces xy está contenido en intS $\cup \{x\}$

iii) Si x y y están en frS entonces xy está contenido en intS $\cup \{x,y\}$ o xy está contenido en la frS.

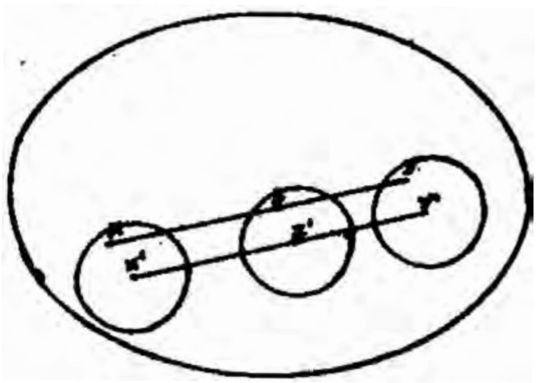
<u>Demostración:</u>

i) Sean x, y $\in$ intS, sean B_x y B_y discos de radio r y centros respectivamente en x y y de tal manera que estén contenidos en S. Sea $z \in xy$ y B_z el disco con centro en z y radio r. Probaremos que $B_z \subset S$. Efectivamente, z es de la forma $\alpha x + \beta y$ con $\alpha > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Sea $z' \in B_z$ un punto arbitrario, sean $x' = x + z' - z$, $y' = y + z' - z$. Así, $|x' - x| = |y' - y| = |z' - z| < r$ así, tanto x' como y' están en B_x y B_y respectivamente, y por lo tanto en S, pero

$$\alpha x' + \beta y' = \alpha x + \beta y + (\alpha + \beta)(z' - z) = z'$$

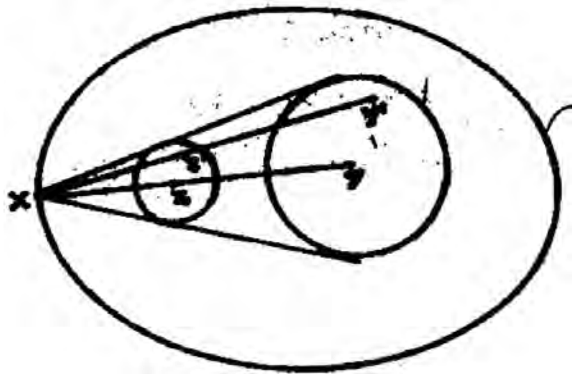
y por ser S convexo, $z' \in S$, así $B_z \subset S$ y $xy \subset intS$.

Hemos demostrado por lo tanto, que si un conjunto es convexo, su interior también lo es. La siguiente figura ilustra la demostración.



ii) Sea $x \in frS$ y $y \in intS$, demostraremos que todos los puntos del segmento xy a excepción de x pertenecen a intS.

Sea $z = \alpha x + \beta y$, con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Sea B_y un disco con centro en y y radio r contenido en S. Probaremos que el disco con centro en z y radio βr está contenido en S, llamémoslo B_z. Sea $z' \in B_z$ y sea $y' = y + (1/\beta)(z' - z)$. $|y' - y| = (1/\beta)|z' - z| < r$. Así $y' \in B_y \subset S$ y como $z' = \alpha x + \beta y' \in S$ tenemos que $z' \in S$ y por lo tanto $B_z \subset S$. Así $z \in intS$



<u>Problema 2.8</u> Probar iii)

<u>Problema</u> 2.9 Probar la caracterización mencionada en el teorema 2.9, i.e., un punto está en la cerradura de S si y sólo si todo disco con centro en él intersecta a S.

Considerando la idea intuitiva de conjunto convexo, es fácil ver que todo conjunto convexo es necesariamente conexo, y utilizando algunos argumentos analíticos es posible demostrar rigurosamente este hecho. Por otro lado, en el caso de subconjuntos rectilíneos, o sea, subconjuntos de una recta, tenemos que basta con que un conjunto sea conexo para que automáticamente sea convexo, así, podemos concluir que en R o en cualquier línea recta, un subconjunto es convexo si y sólo si es conexo. Ya que los subconjuntos conexos de R son los intervalos (incluyendo en ellos a las semirectas, a R mismo y a los puntos), tenemos que los subconjuntos convexos de R son precisamente los intervalos. De una manera análoga tenemos que los subconjúntos convexos de cualquier recta $L \subset R^2$ son: L, toda semirecta de L, todo segmento de L y todo punto de L. Todo esto nos facilitará la demostración del siguiente

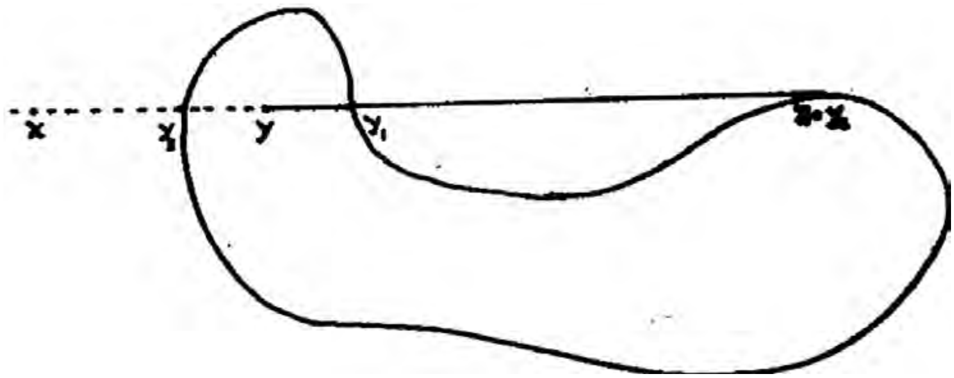
2.11 **Teorema.** Si $S \subset R^2$ es compacto (cerrado y acotado), y si int$S \neq \emptyset$, entonces S es convexo si y sólo si para todo $x \in$ int$S$ y para toda recta L tal que $x \in L$, $L \cap$ fr$S$ consta exactamente de dos puntos.

Demostración:

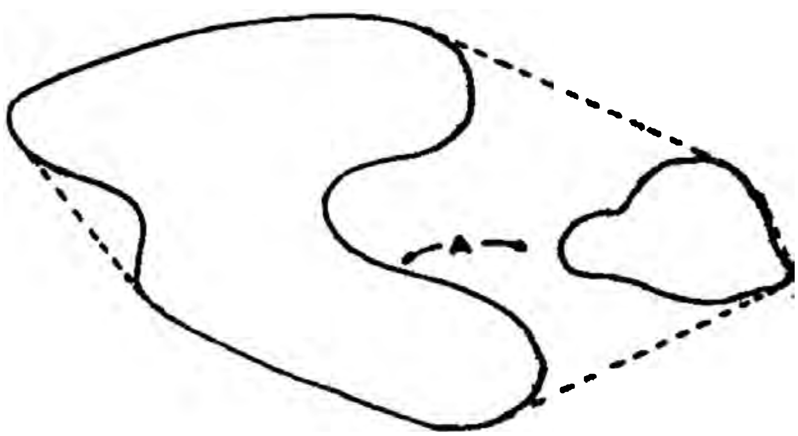
Sea $S \subset R^2$ convexo compacto y $x \in$ int$S$. Si L es una recta por x, $L \cap S$ es convexo, acotado, y consta de más de un punto por estar $x \in$ int$S$ (por qué?). Por lo tanto $L \cap S$ es un segmento, digamos, el segmento zw. Tenemos que $z \in$ fr$S$, ya que si $z \in$ int$S$ existiría una bola $B(z)$, con centro en z contenida en S y z no podría ser el extremo del segmento $L \cap S$. Análogamente tenemos que $w \in$ fr$S$. En el transcurso de la demostración del teorema anterior vimos que si un segmento tiene sus extremos en la frontera de un conjunto convexo y contiene un punto interior, entonces todos sus puntos a excepción de los extremos, son puntos interiores. Así podemos asegurar que $L \cap S$ contiene solamente como puntos frontera de S a sus extremos, y por tanto $L \cap$ fr$S = \{z, w\}$, $z \neq w$.

Para demostrar el inverso veremos que si S es compacto y no convexo, existen $x \in$ int$S$ y una recta L pasando por x tales que $L \cap$ fr$S$ consta de más de dos puntos.

Si S no es convexo, existen $x, z \in S$ tales que hay un punto $w \in xz \cap S^c$ (S^c es el complemento de S). Siempre se puede tomar alguno de los dos puntos, digamos x, en el interior de S (por qué?). Sea L la recta que contiene a xz; existen $y_1 \in xw \cap$ fr$S$ y $y_2 \in wz \cap$ fr$S$. Además existe y en $L \cap S^c$ no perteneciente a xz ya que S es acotado, así tenemos que hay un punto $y_3 \in yx \cap$ fr$S$. Por tanto tenemos que $y_1, y_2, y_3 \in L \cap frS$. Hemos pues demostrado que si para cualquier punto interior de un conjunto, cualquier recta que pase por él intersecta a la frontera del conjunto en exactamente dos puntos, entonces el conjunto es convexo, con tal de que dicho conjunto sea compacto ||



2.12. Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$. Al conjunto $S_A = \{B : B$ es convexo y $A \subset B\}$ se le llama el casco convexo de A. (Algunos autores lo llaman también cerradura convexa de A o envolvente convexa de A)



2.13. **Teorema.** Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$. Entonces $S_n = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n : \alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}$ es el caso convexo de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (Obviamente el casco convexo de un conjunto es convexo).

Demostración:

Veremos primeramente que S_n es convexo y posteriormente que es el mínimo convexo que contiene a $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en el sentido de que S_n está contenido en todo convexo que contenga a $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

i) S_n es convexo: sean $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, $\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n \in S_n$,

$$\alpha(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) + \beta(\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n) =$$

$$= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)x_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)x_n$$

Pero si $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$, tenemos que $\alpha\alpha_i + \beta\beta_i \geq 0$ para toda i, y que

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) = \alpha(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + \beta(\beta_1 + \ldots + \beta_n) =$$

$$= \alpha + \beta = 1$$

$\therefore S_n$ es convexo

ii) S_n contiene claramente a $\{x_1, \ldots, x_n\}$

iii) S_n es el mínimo: Sea S convexo tal que $x_1, \ldots, x_n \in S$.

Sea

$$S_k = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}, \quad k < n.$$

Probaremos por inducción que $S_k \subset S$ para toda $k < n$.

Caso $k = 1$. $S_1 = \{x_1\} \subset S$

Supongamos que $S_{k-1} \subset S$ y sea $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \in S_k$. Si $\alpha_k = 1$ entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$ y por lo tanto $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = x_k \in S$.

Así supongamos que $\alpha_k < 1$. Así $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + \alpha_k x_k =$

$$= (1-\alpha_k)\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_k}x_1 + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha_k}\right) + \alpha_k x_k$$

Ahora,

$$\frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} \geq 0,\ i=1,\ldots,k-1 \quad \text{y} \quad \frac{\alpha_1}{1-\alpha_k} + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha_k} = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}}{1-\alpha_k} = \frac{1-\alpha_k}{1-\alpha_k} = 1$$

Así, $\frac{\alpha_1}{1-\alpha_k}x_1 + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha_k}x_{k-1} \in S_{k-1} \subset S$ y como $x_k \in S$ y S es convexo, tenemos que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \in S$, por lo que $S_k \subset S$ si $k = 1,\ldots,n$.

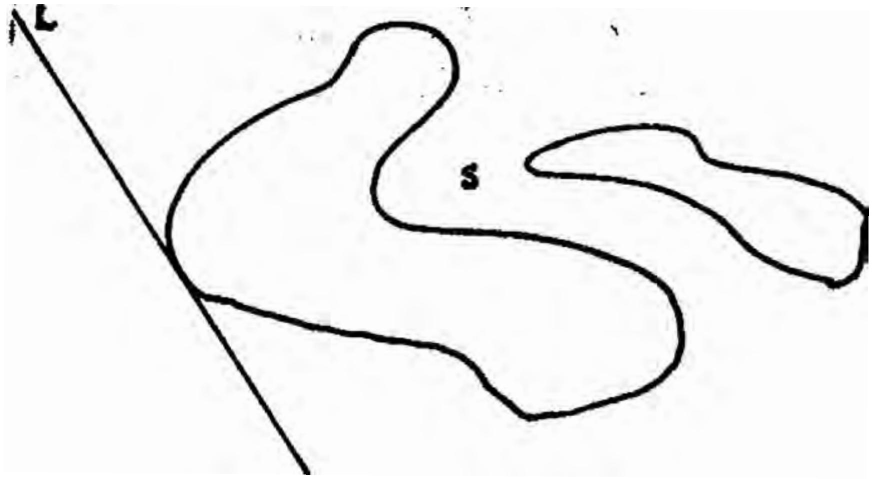
$\therefore$ en particular $S_n \subset S$

<u>Problema</u> 2.10 Sea $F : R^2 \to R^2$ lineal y sea $S \subset R^2$ convexo. Probar que $F(S)$ es convexo.

<u>Problema 2.11</u> Sea $S' \subset R^2$ convexo y $F : R^2 \to R^2$ lineal. Probar que $F^{-1}(S') = \{x \in R^2 : F(x) \in S'\}$ es convexo.

Nótese que las dos afirmaciones de los problemas anteriores nos permiten asegurar que un conjunto es convexo si y sólo si su imagen bajo una función lineal <u>inyectiva</u> es convexa. (Qué pasa si no es inyectiva?).

2.14. <u>Definición.</u> A una recta L se le llama <u>recta soporte</u> de un conjunto S si $L \cap \bar{S} \neq \emptyset$ y S está contenido en uno de los dos semiplanos cerrados determinados por L.

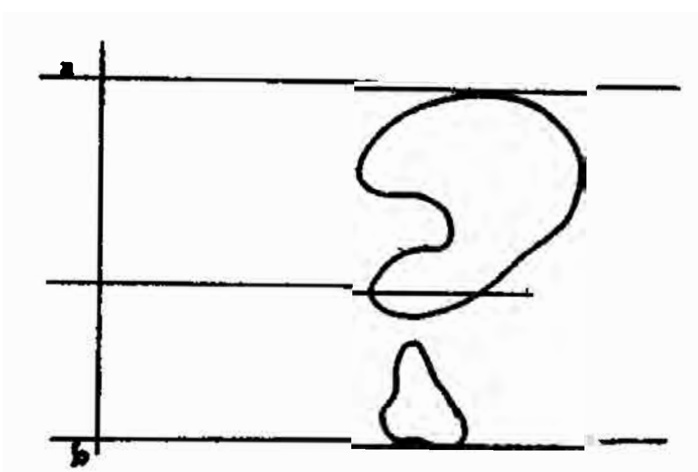


Problema 2.12 Sea L una recta soporte de un conjunto S. Probar que $L \cap \text{int} S = \emptyset$

Problema 2.13 Sea L una recta soporte de un conjunto convexo S, y sean x_1 y $x_2 \in L \cap \text{fr} S$. Probar que $x_1 x_2 \subset L \cap \text{fr} S$.

2.15. Teorema. Si S es acotado e int $S \neq \emptyset$, entonces para cada dirección hay exactamente dos rectas soporte.

Demostración: Para probar esto consideremos las intersecciones de todas las rectas paralelas a la dirección dada que intersectan a S con una perpendicular a dicha dirección. Ya que el conjunto es acotado, dicha intersección está contenida en un segmento. Sea ab el mínimo segmento que contiene a dicha intersección



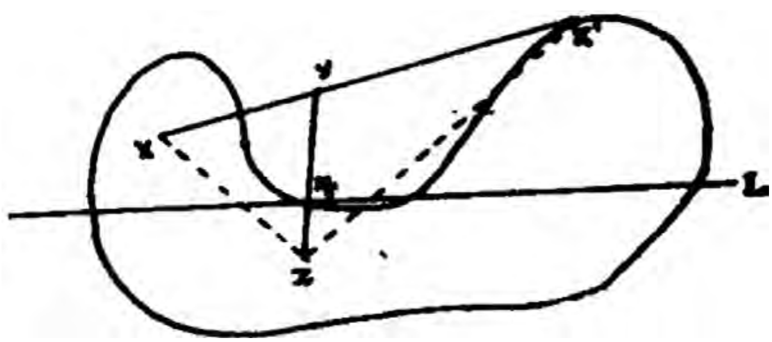
Sean L_a y L_b rectas paralelas a la dirección dada y por a y b respectivamente. Obviamente L_a y L_b son rectas soportes de S (por qué?); ya que int$S \neq \emptyset$, $L_a \neq L_b$ (por qué?) y cualquier otra recta paralela a ellas y distinta de ellas no es recta soporte (por qué?). Por lo tanto, L_a y L_b son las únicas rectas soporte en esa dirección.||

> Problema 2.14 Sean L y L' dos rectas soportes paralelas de un conjunto dado tales que su distancia es máxima. Probar que existen $a \in L \cap \text{fr}S$ y $b \in L' \cap \text{fr}S$ únicos tales que ab es perpendicular a L y L'.

2.16. Teorema. Si S es cerrado e int$S \neq \emptyset$, y si para todo $x \in \text{fr}S$ existe una recta soporte L pasando por x, entonces S es convexo.

Demostración:

Supongamos que S no es convexo. Existen x y $x' \in S$ tales que hay un punto



$y \in xx' \cap S^c$. Sea $z \in$ int$S$ tal que $z \notin xx'$ (esto es posible debido a que int$S \neq \emptyset$). Así tendremos que existe un punto $x_f \in \text{fr}S \cap yz$, y obviamente $x_f \neq y$, y $x_f \neq z$; por lo tanto x_f estará en el interior del triángulo xx'z. Sea L cualquier recta que contenga a x_f. L intersecta a alguno de los lados de xx'z en algún pun to distinto de los vértices (por qué?), dejando así a uno en cada semiplano abierto determinado por ella, por tanto, no puede ser recta soporte. Así, si un conjunto cerrado no es convexo, entonces existe un punto frontera por el cual no pasa ninguna recta soporte. (Dónde se usó la hipótesis de que S es cerrado?).||

Problemas suplementarios

Problema 2.15 Probar que si A es abierto entonces su casco convexo S_A es abierto.

Problema 2.16 Probar que si A es cerrado entonces su casco convexo S_A es cerrado.

Sección 3.

Teorema de Helly

Antes de formular el teorema de Helly, demostraremos un caso particular de él, que es el siguiente

3.1. Teorema: Si cada tres de cuatro conjuntos convexos tienen intersección no vacía, entonces los cuatro tienen intersección no vacía.

Demostración:

Sean S_1, S_2, S_3 y S_4 dichos conjuntos, y consideremos

$$x_1 \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$$
$$x_2 \in S_1 \cap S_2 \cap S_4$$
$$x_3 \in S_1 \cap S_3 \cap S_4$$
$$x_4 \in S_2 \cap S_3 \cap S_4$$

Por lo tanto tenemos que $x_1x_2 \subset S_1 \cap S_2$ y $x_3x_4 \subset S_3 \cap S_4$. Si $x_1x_2 \cap x_3x_4 \neq \emptyset$, entonces $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$.

Por otro lado, si $x_1x_2 \cap x_3x_4 = \emptyset$, entonces pueden suceder dos cosas: Que tomando otros segmentos, digamos x_1x_3 y x_2x_4 éstos sí se intersecten (fig. 1) en cuyo caso ya estaría resuelto nues-

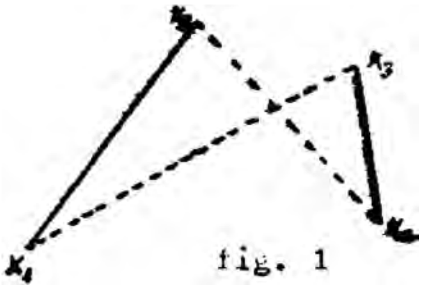


fig. 1

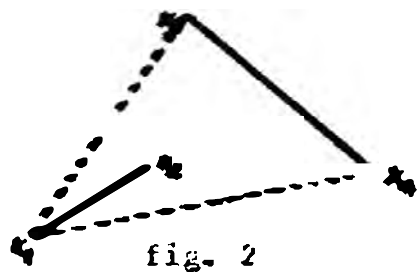
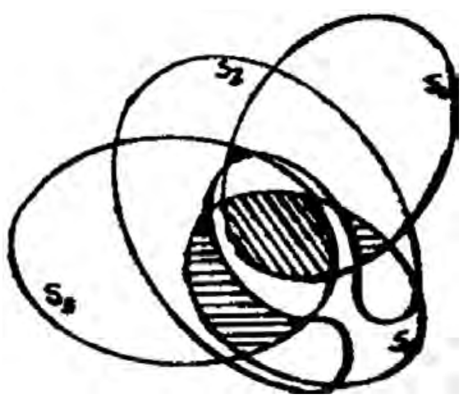


fig. 2

tro problema; o que para cualesquiera dos segmentos que tomemos con extremos distintos, éstos no se intersecten, en cuyo caso alguno de los extremos, digamos x_2 está contenido en el triángulo $x_1x_3x_4$ que a su vez está contenido en S_3 (fig. 2). Así tenemos que $x_2 \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$. |

Nótese que es esencial la hipótesis de la convexidad de los cuatro conjuntos para la validez del teorema anterior, ya que, como lo muestra la figura, la afirmación podría resultar falsa si alguno de los conjuntos no fuera convexo.



Ahora sí procederemos a la demostración del teorema general, cuya formulación es la siguiente:

3.2 Teorema (de Helly): Si cada tres de n conjuntos convexos tienen intersección no vacía, entonces los n conjuntos tienen intersección no vacía.

Demostración:

La demostración de este teorema se llevará a cabo por inducción sobre n. El caso n = 4, que es el más simple, quedó demostrado en el teorema anterior. Ahora haremos el paso de inducción. Supongamos que el teorema es válido para n-1 conjuntos convexos, y sean $S_1,\ldots,S_n$, n conjuntos convexos que cumplen con la hipótesis del teorema, y definamos $S'_{n-1} = S_{n-1} \cap S_n$; S'_{n-1} es convexo, y así, $S_1,\ldots,S_{n-2},S'_{n-1}$ cumplen con la hipótesis del teorema ya que

$$S_k \cap S_{k'} \cap S'_{n-1} = S_k \cap S_{k'} \cap S_{n-1} \cap S_n \neq \emptyset$$

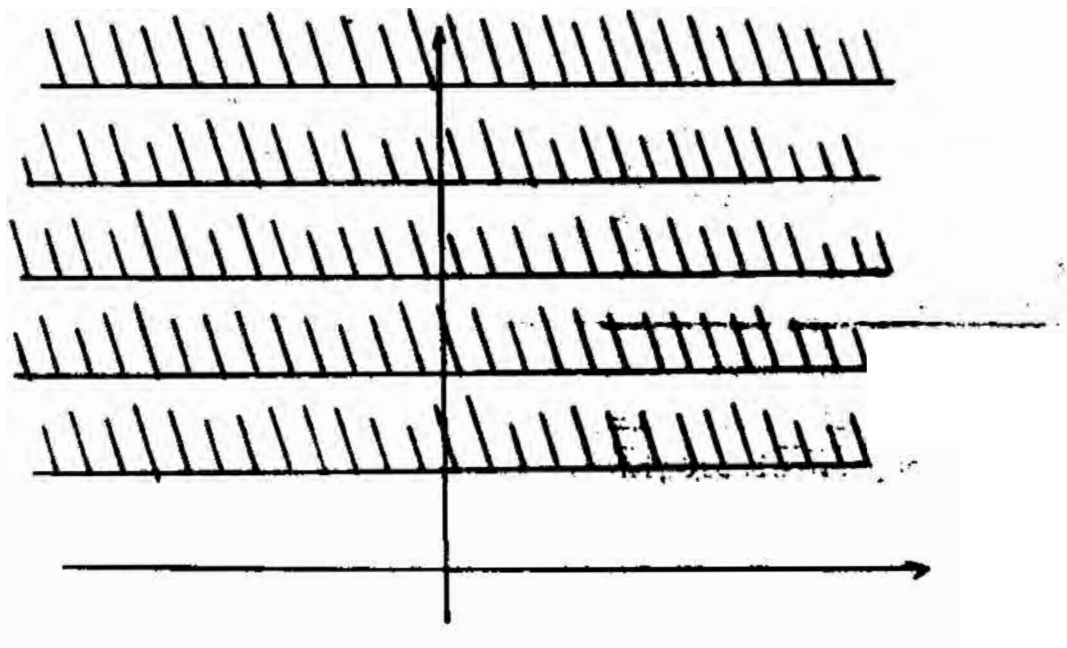
gracias al teorema anterior (para cuatro convexos tales que cada tres de ellos tienen intersección no vacía). Así, por la hipótesis de inducción

$$S_1 \cap \ldots \cap S_{n-2} \cap S'_{n-1} \neq \emptyset$$

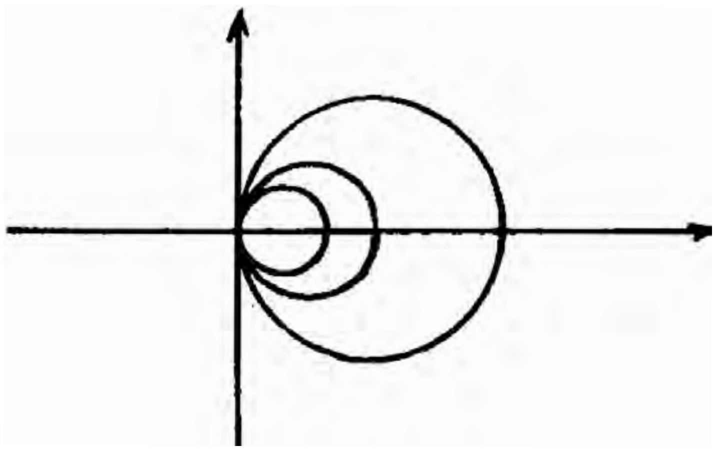
de donde

$$S_1 \cap \ldots \cap S_n \neq \emptyset \quad \text{como se quería demostrar.} \|$$

El teorema de Helly es válido aún para familias infinitas de conjuntos convexos tales que cada tres de ellos tienen intersección no vacía, agregando la hipótesis de que los conjuntos sean compactos, (de hecho es suficiente con que al menos uno sea compacto, pero los demás tienen que ser cerrados). Si no se incluye la compacidad de al menos uno de los conjuntos puede fallar la afirmación del teorema como se puede apreciar en el siguiente ejemplo: considérese la familia de semiplanos cerrados limitados inferiormente por rectas horizontales con ordenadas n, naturales; obviamente cada tres de ellos tienen intersección no vacía, a saber, el semiplano de más arriba; sin embargo la intersección de todos es vacía, ya que si no lo fuera, la ordenada de algún punto en ella sería mayor o igual que cualquier número natural!!!



En el ejemplo anterior falla la hipótesis de que los conjuntos sean acotados, (recuérdese que un conjunto es compacto en R^2 si es cerrado y acotado). Daremos otro ejemplo más para mostrar que si los conjuntos no son cerrados, aunque éstos sean acotados, la afirmación del teorema puede ser falsa. Consideremos la familia de discos abiertos con centros en el eje horizontal del plano cartesiano en puntos con abscisas 1/n, y radios 1/n respectivamente. Es decir, discos abiertos con centros colineales y tangentes todos en un mismo punto. Esta familia de discos abiertos tiene la propiedad de que cada tres de ellos tienen intersección no vacía, a saber, el disco de menor radio de los tres, sin embargo, la intersección de todos es vacía, (por qué?)



Para la demostración del teorema de Helly en el caso infinito se necesita echar mano de un teorema sobre conjuntos compactos, del cual omitiremos la demostración, y que afirma lo siguiente:

3.3. Lema: Sea F una familia de conjuntos compactos tal que cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía. Entonces la intersección de todos es no vacía.

Para una demostración de este lema remitimos al lector al libro de W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis (MacGraw-Hill), o a cualquier otro libro de análisis matemático al mismo nivel.

De la veracidad del lema anterior, podemos obtener del caso finito del teorema de Helly el

3.4. Teorema (de Helly en el caso infinito): Sea F una familia arbitraria de conjuntos convexos compactos tales que cada tres de ellos tienen intersección no vacía. Entonces la intersección de todos los miembros de la familia es no vacía.

Demostración:

Considérese cualquier subfamilia finita de F. Los elementos de esta subfamilia finita satisfacen las hipótesis del teorema de Helly en el caso finito, y por lo tanto la intersección de todos ellos es no vacía; así, aplicando el lema obtenemos la afirmación del teorema.||

Parte de la importancia del teorema de Helly radica en las múltiples consecuencias y resultados que de él se pueden obtener. Como un ejemplo de ello trátese de resolver el siguiente

Problema 3.1 Sean $x_1,\dots,x_n$, n puntos tales que cada tres de ellos están contenidos en algún disco de radio 1. Entonces existe un disco de radio 1 que los contiene a todos.

Otra consecuencia del teorema de Helly es el siguiente:

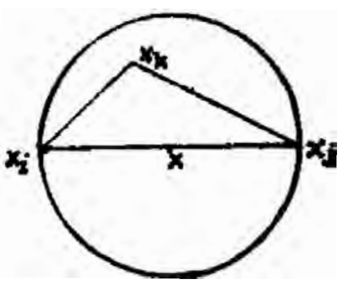
3.5. Teorema (de Jung): Sean $x_1,\dots,x_n$ n puntos tales que $d(x_j,x_k)\leq 1$ (La d representa la distancia). Entonces existe un círculo de radio $1/\sqrt{3}$ que contiene a todos.

Demostración:

Tenemos que demostrar la existencia de un punto cuya distancia a cada uno de los puntos del conjunto es menor o igual que $1/\sqrt{3}$, (ya que así, el disco con centro en ese punto y radio $1/\sqrt{3}$ contendrá a todos los puntos del conjunto), es decir, un punto común a todos los círculos cerrados con centro en x_k, $k = 1,\dots,n$ y radio $1/\sqrt{3}$, llamémoslos C_k respectivamente. Bastará probar que cada tres de ellos tienen intersección no vacía para obtener la afirmación del teorema. Así, consideremos C_i, C_j, y C_k, y pensemos en el triángulo $x_i x_j x_k$. Si el triángulo es obtuso, (i.e. tiene un ángulo obtuso), sea x el punto medio del lado opuesto al ángulo obtuso, digamos del lado $x_i x_j$. Si pensamos en el círculo con diámetro $x_i x_j$, éste contendrá al triángulo y su radio será menor o igual a 1/2 y así

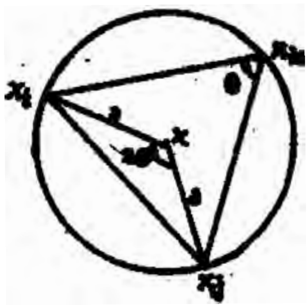
$d(x,x_i) < 1/\sqrt{3}$, $d(x,x_j) < 1/\sqrt{3}$, $d(x,x_k) < 1/\sqrt{3}$ ya que $1/2 < 1/\sqrt{3}$

Por lo tanto, $x \in C_i \cap C_j \cap C_k$.



Ahora bien, si el triángulo es agudo (i.e. todos sus ángulos son agudos), habrá algún ángulo de él que sea mayor o igual que 60°, digamos el ángulo θ que corresponde al vértice

x_k. Sea x el circuncentro del triángulo $x_i x_j x_k$, y apliquémos-



le la ley de los cosenos al triángulo $x_i x x_j$:

$$(d(x_i, x_j))^2 = 2a^2(1 - \cos 2\theta) \leq 1, \quad \text{pero}$$

$$120^\circ \leq 2\theta \leq 180^\circ$$

$$\therefore \quad -1 \leq \cos 2\theta \leq -1/2$$

$$\therefore \quad 1/2 \leq -\cos 2\theta \leq 1$$

$$\therefore \quad 3/2 \leq 1 - \cos 2\theta$$

Así obtenemos por un lado que $2a^2(3/2) \leq 2a^2(1 - \cos 2\theta)$ y por la aplicación de la ley de los cosenos $2a^2(1 - \cos 2\theta) \leq 1$ (primera expresión de la serie anterior). Así tenemos que $3a^2 \leq 1$, o $a \leq 1/\sqrt{3}$ donde a es el radio del circuncírculo. Así vemos que

$$d(x, x_i) \leq 1/\sqrt{3}, \quad d(x, x_j) \leq 1/\sqrt{3}, \quad d(x, x_k) \leq 1/\sqrt{3}$$

por lo que $x \in C_i \cap C_j \cap C_k$ ||

3.6 <u>Definición:</u> Sea S un conjunto acotado. El <u>diámetro</u> de S es

$$\sup \{d(x,y) : x, y \in S\}$$

<u>Problema 3.2</u> Probar que todo conjunto de diámetro 1 es-

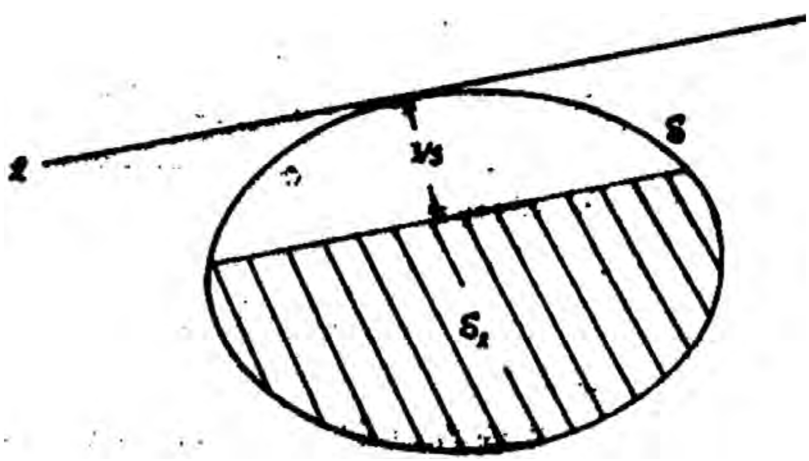
tá contenido en un círculo de radio $1/\sqrt{3}$ (Hint: Aplíquese el teorema de Helly en el caso infinito a los círculos cerrados de radio $1/\sqrt{3}$ con centros en todos los puntos del conjunto).

3.7. <u>Definición:</u> Sea S un conjunto arbitrario. El <u>ancho</u> del conjunto es la mínima distancia entre rectas soportes paralelas (2) si éstas existen. Si no, diremos que el ancho es ∞ .

3.8. <u>Teorema</u> (de Blaschke): Todo conjunto convexo compacto de ancho 1 contiene un círculo de radio 1/3.

<u>Demostración:</u>

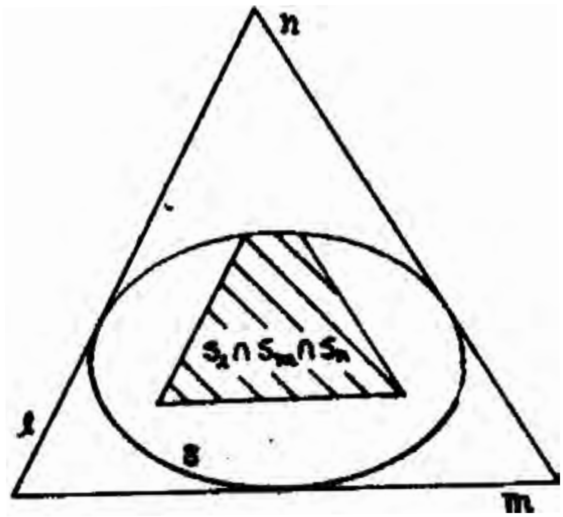
Sea S un conjunto convexo compacto de ancho 1. A cada recta soporte de S, ℓ, asociémosle el conjunto $S_\ell = \{x \in S: d(x,\ell) \geq 1/3\}$, ($d(x,\ell)$ denota la distancia perpendicular del punto x a la recta l), estos conjuntos S_ℓ satisfacen:



i) S_ℓ es compacto (La intersección de un cerrado con un compacto es compacta)

ii) $S_\ell \neq \emptyset$ (Si lo fuera, el ancho del conjunto sería menor que 1/3), y

iii) $S_\ell \cap S_m \cap S_n \neq \emptyset$; demostraremos esta última afirmación. Si ℓ, m, n, forman un triángulo T que contiene a S, tenemos que el ancho de T es mayor o igual que 1, y



así, las alturas del triángulo T son mayores o iguales que 1. Si x es el punto mediano del triángulo, $d(x,\ell) \geq 1/3$, $d(x,m) \geq 1/3$ y $d(x,n) \geq 1/3$. Así, $x \in S_\ell \cap S_m \cap S_n$.

Si no sucede que T contenga a S, o que ℓ, m y n formen un

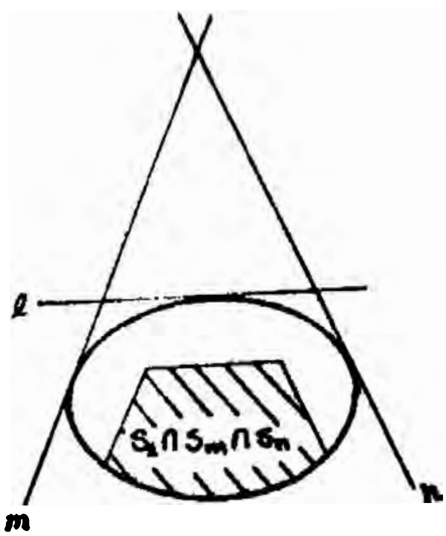


fig. 1

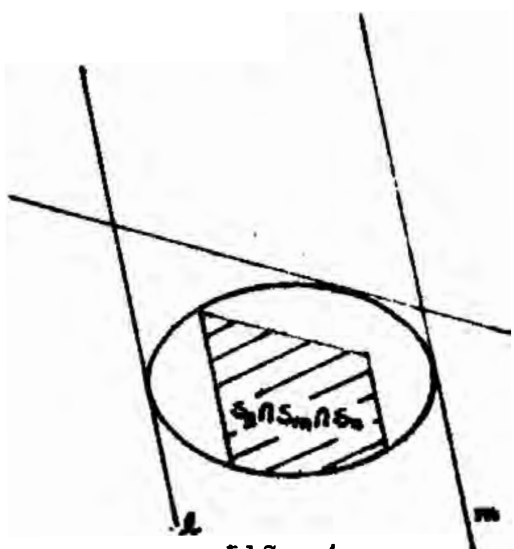


fig. 2

triángulo, es clara la afirmación como se puede ver en las figuras 1 y 2. Así tenemos que los conjuntos S_ℓ satisfacen las hipótesis del teorema de Helly en el caso infinito y por lo tanto existe $x_0 \varepsilon \bigcap \{S_\ell : \ell$ es recta soporte de $S\}$. Claramente $d(x_0, y) \geq 1/3$ para todo punto $y \in frS$, así el círculo con centro en x_0 y radio $1/3$ está contenido en S. Si sólo pedimos que S sea acotado, bastará tomar su cerradura y tomar el círculo abierto con centro en x_0. ||

El siguiente teorema es también una consecuencia del teorema de Helly.

3.9 Teorema: Sean $x_1, \ldots, x_n \varepsilon R^2$. Entonces [illegible] con la propiedad de que toda recta que pase por él determina dos semiplanos tales que en cada uno de ellos hay al menos $n/3$ puntos del conjunto $x_1, \ldots, x_n$.

Demostración:

Sea C un círculo que contiene al conjunto. Consideremos a todas las rectas ℓ que cortan al círculo y llamemos ¶$_\ell$ al semiplano determinado por la recta que contenga más de $2n/3$ puntos del conjunto. Sea S_ℓ = ¶$_\ell \cap C$.

Aprovecharemos el teorema de Helly para ver que estos conjuntos S_ℓ tienen intersección no vacía, ya que cualquier punto x_0 en esa intersección tendrá la propiedad que buscamos. (Por qué?).

Sean S_ℓ, S_m y S_n tres de los conjuntos antes definidos. Basta demostrar que estos tienen intersección vacia. Obviamente $S_\ell \cap S_m$ contiene a más de $n/3$ de los puntos ya que cada uno contiene más de $2n/3$. Así tenemos que $S_\ell \cap S_m \cap S_n \neq \emptyset$, ya que si $S_\ell \cap S_m \cap S_n = \emptyset$, tendríamos que S_n contiene menos de $2n/3$ de los puntos del conjunto, contradiciendo esto a la definición de S_ℓ. Así obtenemos lo que queríamos probar. ||

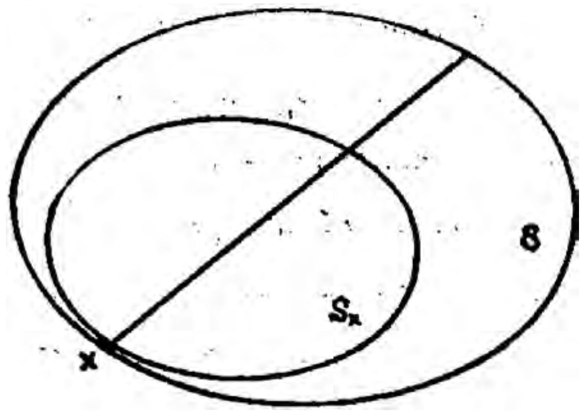
<u>Problema 3.3</u> De una manera análoga a la de la demostración del teorema anterior, probar que dado $S \subset R^2$ compacto (no necesariamente conexo), con área A, existe un punto $x_o \in R^2$ tal que toda recta que pase por x_o divide a S en dos partes tales que cada una de ellas tiene un área mayor o igual que $A/3$.

Demostraremos ahora un teorema que, además de su interés mismo en el sentido de que nos afirma que en cierta forma tienen algo de simetría los conjuntos convexos, nos va a permitir obtener como corolario el teorema de Blaschke, que ya anteriormente fue demostrado.

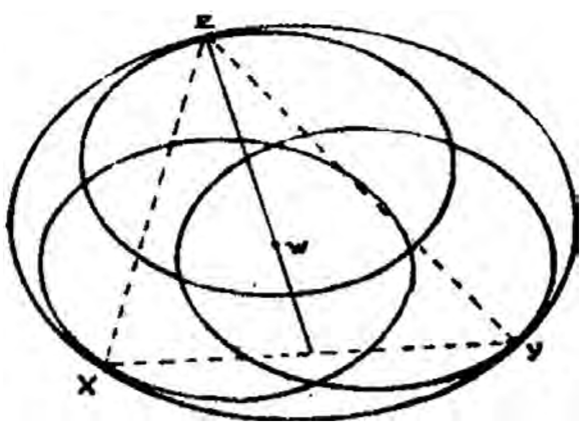
3.10. <u>Teorema:</u> Sea $S \subset R^2$ un conjunto convexo compacto. Entonces existe $x_o \in S$ tal que toda cuerda de S (una cuerda de un conjunto convexo es un segmento que une dos puntos de su frontera), pasando por x_o, tiene la propiedad de estar dividida por x_o dejando a cada lado más de una tercera parte de su longitud.

<u>Demostración:</u>

Sea $x \in \mathrm{fr}S$. Pensemos en todas las cuerdas que parten de x, y en cada una de ellas pensemos en los puntos cuya distancia a x es menor o igual que dos terceras partes de la longitud de dicha cuerda. El conjunto de todos esos puntos de todas las cuerdas es un conjunto compacto semejante a S con razón de semejanza $2/3$, al cual llamaremos S_x. Si probamos que todos es-



tos conjuntos S_x para todos los puntos de frS tienen un punto en común, tendremos que este punto satisfará la afirmación del teorema. (Nótese que $S_x \subset S$ para toda $x \in$ frS). Procederemos a demostrar ese hecho con el teorema de Helly probando que S_x, S_y y S_z tienen intersección no vacía para cualesquiera x, y, z $\in$ frS. Pensemos en el triángulo xyz, y sea w su punto mediano. Si a, b y c son los puntos medios de los lados opuestos a x, y y z respectivamente, es un hecho bien sabido que w divide en razón 2:1 a los segmentos xa, yb y zc. Ya que las cuerdas por x, y y z que pasan por w son mayores o iguales que los segmentos xa, yb y zc respectivamente, por ser convexo el conjunto S, tenemos que $w \in S_x \cap S_y \cap S_z$. ||



3,11. Corolario: Teorema de Blaschke.
Demostración.

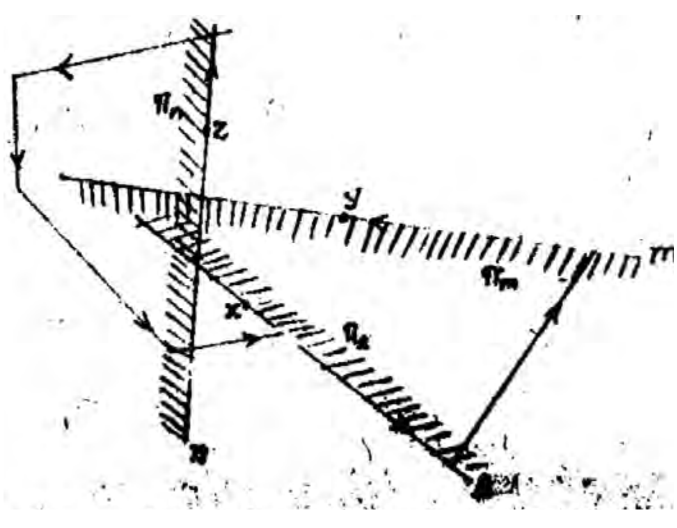
Tómese un círculo con centro en el punto x_0 y radio 1/3!!

A continuación enunciaremos un teorema muy interesante y muy bonito, el teorema de Krasnosel'skii del cual da una interpretación muy simpática el libro de Yaglom y Boltyanskii, Convex Figures, y es la siguiente: Si nos encontramos en una galería de pinturas y ésta es tal que siempre que consideremos cualesquiera tres cuadros de ella hay un lugar de la galería desde el cual se pueden ver los tres, entonces hay algún lugar desde el cual se pueden ver todos. La formulación del teorema es la siguiente:

3.12. <u>Teorema</u> (de Krasnosel'skii): Sea S un polígono cerrado tal que para cada tres puntos x, y, x ϵfrS, existe un punto p tal que px $\cup$ py $\cup$ pz $\subset$ S, entonces existe un punto $p_0 \epsilon S$ con respecto al cual S es asteroide. (En otras palabras, el núcleo convexo de S es no vacío).

<u>Demostración:</u>

Para cada segmento contenido en una recta que sea lado de S consideremos el semiplano π_ℓ, digamos a la izquierda del la-



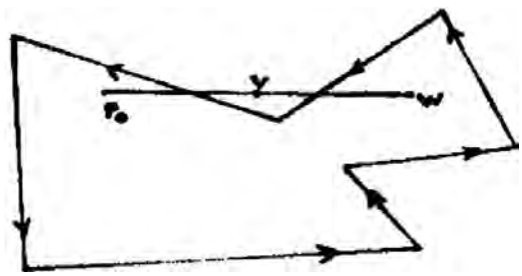
do suponiendo que éste tiene el sentido dado por el sentido contrario al movimiento de un reloj a la frontera de S. (Véase la figura anterior).

Probaremos que la intersección de tres de estos semiplanos es no vacía. Sean π_ℓ, π_m y π_n, y tres puntos x, y y z en ℓ, m y n respectivamente pero en frS y que no sean vértices. Así tenemos que existe $p \in S$ tal que $px, py, pz \subset S$. Por lo tanto $p \in \pi_\ell \cap \pi_m \cap \pi_n$, (por qué?).

Así, aplicando el teorema de Helly, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\ell_i} \neq \emptyset$$

Sea $p_o \in \bigcap_{i=1} \pi_\ell$, tenemos que necesariamente $p_o \in S$, ya que si no estuviera bastaría tomar el lado más cercano a p_o, y tendríamos que p_o estaría a la derecha de dicho lado, en contradicción con que está en el semiplano a la izquierda de dicho lado.



Veamos ahora que S es asteroide con respecto a p_o. Sea $w \in S$, probaremos que $wp_o \subset S$. Supongamos lo contrario, y sea $v \in wp_o \cap S^c$, consideremos un punto en $wv \cap frS$, necesariamente, en tal caso, p_o estaría a la derecha del lado en el cual está dicho punto. Contradicción ! Así tenemos que S es asteroide con respecto a p_o. ||

Cabe aclarar que este teorema sigue siendo válido aún cuando S no es un polígono sino cualquier conjunto compacto; bastará aplicar entonces el teorema de Helly en el caso infinito a las intersecciones de los semiplanos soportes de S con S.

Problema 3.4 Probar que si n segmentos paralelos son tales que para cada tres de ellos existe una recta que los intersecta, entonces existe una recta que los intersecta a todos.

Problema 3.5 Sean n segmentos cerrados contenidos en una recta ℓ, tales que cada dos de ellos tienen intersección no vacía, probar que todos tienen intersección no vacía.

Obsérvese que el problema anterior nos da la formulación del teorema de Helly para la recta. Cuál será la formulación del teorema de Helly para el espacio? Cuál será para R^n?

Problemas suplementarios:

Problema 3.6 Mostrar por medio de ejemplos que $1/\sqrt{3}$ es el mínimo radio del círculo que contiene a todos los conjuntos convexos de diámetro 1, y que 1/3 es el máximo radio del círculo contenido en todos los conjuntos convexos de ancho 1.

Problema 3.7 Probar que un conjunto cerrado S es asteroide respecto a x si y sólo si $xy \subset S$ para toda $y \in frS$. (Nótese que este problema nos justifica tanto la demostración del teorema de Krasnosel'skii como la interpretación previa).

Sección 4.

Propiedades Geométricas de las Funciones Continuas.

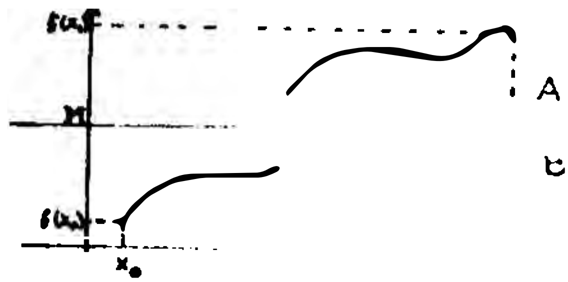
Analizaremos en esta parte algunas propiedades de las figuras planas que se pueden obtener a partir de consideraciones relacionadas con funciones continuas. Primeramente consideremos la siguiente

4.1. Definición: Una función real definida en un intervalo cerrado es continua si su gráfica es conexa. (Recordamos que un conjunto es conexo si no existen dos abiertos que lo intersecten cuya unión lo contenga y cuyas intersecciones con él sean ajenas; i.e. S es conexo si no existen A y B abiertos tales que $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$, $S \subset A \cup B$, y $(A \cap B) \cap S = \emptyset$).

4.2. Teorema (del Valor Intermedio): Sea $f: [a,b] \to R$ continua. Supongamos que $f(x_0) < f(x_1)$. Entonces para toda M tal que $f(x_0) < M < f(x_1)$, existe x entre x_0 y x_1 con la propiedad de que $f(x) = M$.

Demostración:

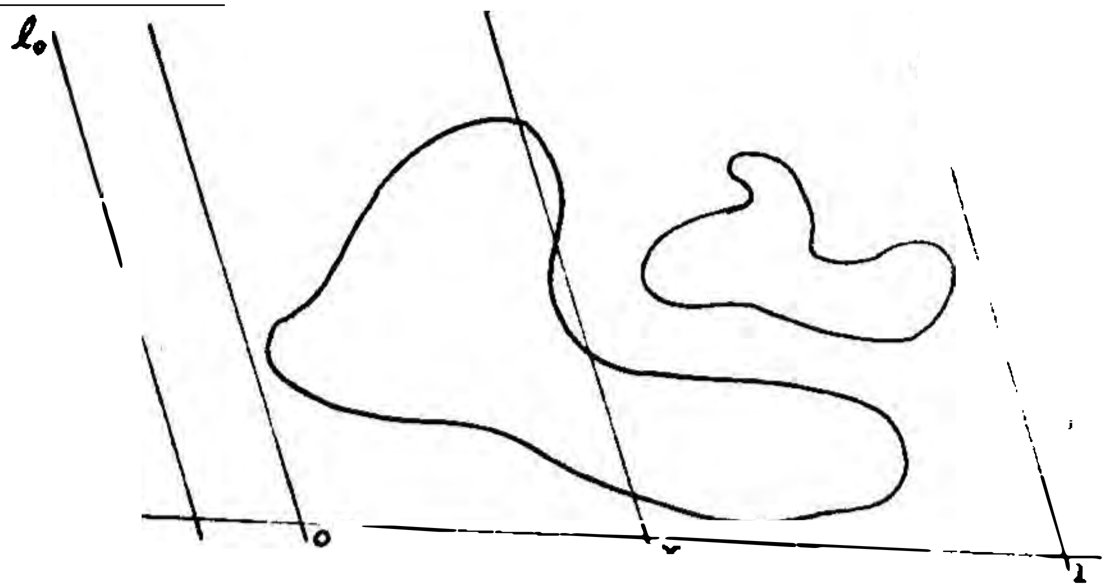
Si para alguna M entre $f(x_0)$ y $f(x_1)$ no existiera tal x, entonces los semiplanos $A = \{(x,y): y > M\}$ y $B = \{(x,y): y < M\}$ serían abiertos con las condiciones para que la gráfica de f no sea conexa !||



Ahora sí, ya estamos en posibilidades de aprovechar las funciones continuas para demostrar propiedades relacionadas con las figuras planas. Demostraremos el siguiente

4.3. <u>**Teorema:**</u> Sea $S\subset R^2$ acotado y ℓ_0 una recta arbitraria. Entonces existe una recta ℓ paralela a ℓ_0 con la propiedad de separar a S en dos partes de igual área.

<u>Demostración:</u>



Si Area(S)=0, no hay nada que probar. Supongamos que Area (S) > 0. Consideremos cualquier recta no paralela a ℓ_0, y en ella consideremos el punto de intersección de una paralela a ℓ_0, de manera que S esté contenido en uno de los semiplanos determinados por dicha paralela; llamemos O a ese punto y con ese origen consideremos, en la primera recta, un eje de coordenadas; a cada coordenada x en ese eje le corresponderá una recta ℓ, la cual, a su vez, dejará en uno de los semiplanos determinados por ella una fracción de S cuya área será A(x). Si llamamos A a Area(S), tenemos que A(0) = A, y si ajustamos nuestras coordenadas

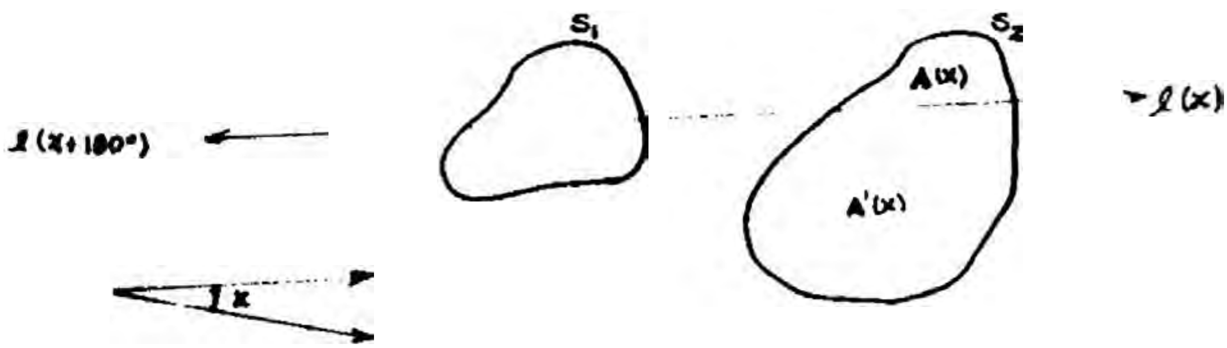
das de tal forma que $A(1) = 0$, aplicando el teorema del valor medio sabemos que existe $x_o \in (0,1)$, tal que $A(x_o) = (1/2)A$ ||

<u>Problema 4.1</u> Probar que la recta del problema anterior, es única si int S es conexo.

<u>Problema 4.2</u> Probar que dada una curva acotada y una recta ℓ_o, existe una recta ℓ paralela a ℓ_o con la propiedad de que separa a la curva en dos curvas de igual longitud.

4.4. <u>Teorema:</u> Sean S_1 y S_2 dos conjuntos acotados, entonces existe una recta que corta a ambos partiendo sus áreas a la mitad.

<u>Demostración:</u>



Considérese cualquier dirección fija en el plano. Para cada número x consideremos una recta $\ell(x)$ que forme un ángulo x con la dirección fija, y que parta a la mitad a S_1. Sean $A(x)$ y $A'(x)$ las áreas a la izquierda y a la derecha de $\ell(x)$ respectivamente. Supongamos que $A(x) < A'(x)$. Consideremos $\ell(180° + x)$; esta recta tiene sentido opuesto a $\ell(x)$, así $A(180° + x) = A'(x)$ y $A'(180°+x) = A(x)$, por lo tanto,

$$A(x) - A'(x) < 0$$

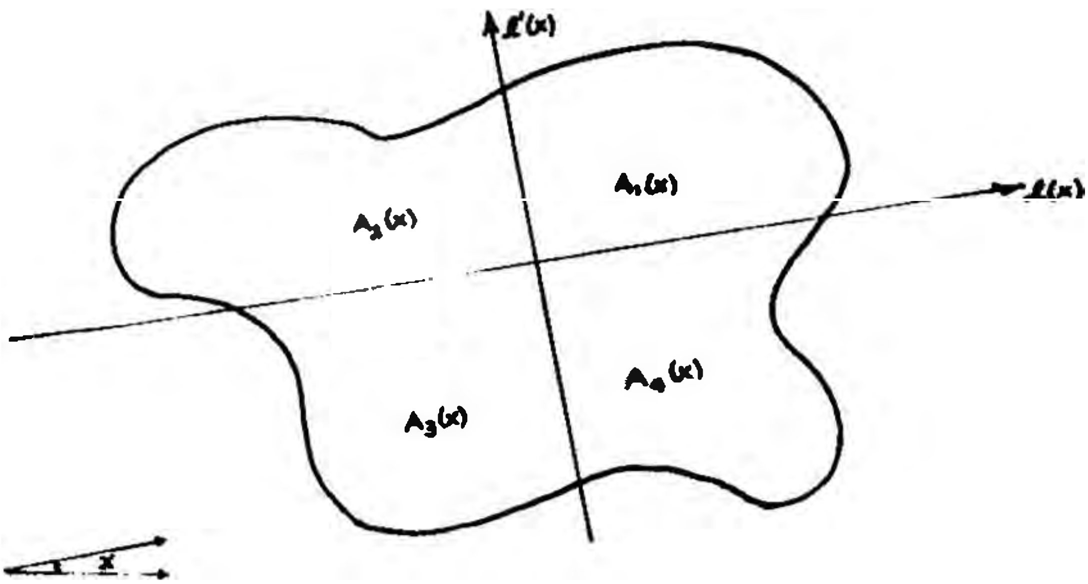
$$A(180° + x) - A'(180° + x) >$$

La aplicación $x \mapsto A(x)$ obviamente es continua, por lo tanto existe x_o tal que $x < x_o < 180° + x$ con la propiedad de que $A(x_o) - A'(x_o) = 0$, ● que $A(x_o) = A'(x_o)$.||

<u>Problema 4.3</u> Sea $S \subset R^2$ acotado y $x \in R^2$. Probar que existe una recta que pasa por x y que parte a la mitad a S.

4.5. <u>Teorema:</u> Sea $S \subset R^2$ acotado. Entonces existen ℓ y ℓ' perpendiculares tales que cada cuadrante que determinan contiene una cuarta parte del área de S.

Demostración:



De manera análoga a la demostración del teorema anterior, consideremos la recta $\ell(x)$ en la dirección x, tal que $\ell(x)$ bisecta al área de S. Sea $\ell'(x)$ una perpendicular a $\ell(x)$ con la misma propiedad de bisecar al área de S. Sean $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ y $A_4(x)$, las áreas en cada uno de los 4 cuadrantes. Tene

$$A_1(x) + A_2(x) = A_3(x) + A_4(x) \quad \text{y}$$

$$A_1(x) + A_4(x) = A_2(x) + A_3(x)$$

restándolas

$$A_2(x) - A_4(x) = A_4(x) - A_2(x)$$

o sea $A_2(x) = A_4(x)$, y análogamente, $A_1(x) = A_3(x)$. Supongamos que $A_1(x) < A_2(x)$, o sea que $A_2(x) - A_1(x) > 0$. Cambiando x por $x + 90°$, obtenemos

$$A_2(x + 90°) = A_3(x) = A_1(x)$$

$$\text{y} \quad A_1(x + 90°) = A_2(x) \; ,$$

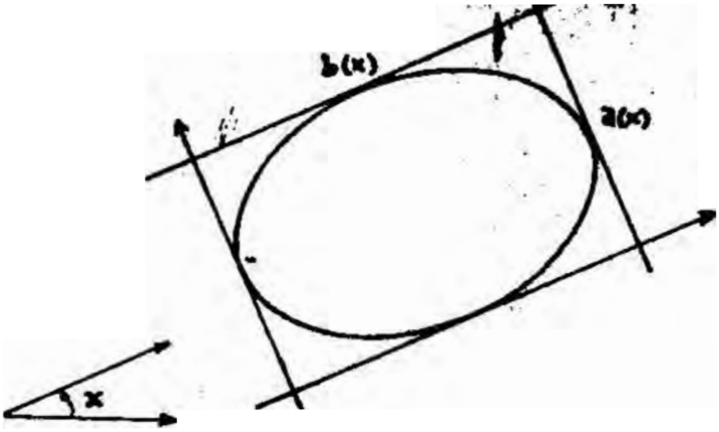
así $A_2(x + 90°) \quad A_1(x + 90°) < 0$.

La aplicación $x \mapsto A_2(x) - A_1(x)$, es claramente continua, así tenemos que existe $x_0 \in (x, x + 90°)$ tal que $A_2(x_0) - A_1(x_0) = 0$. Así,

$$A_1(x_0) = A_2(x_0) = A_3(x_0) = A_4(x_0).$$

4.6. <u>Teorema</u>: Todo conjunto acotado se puede inscribir en un cuadrado. (Se dice que un conjunto está inscrito en un polígono si todos los lados de éste son soportes del conjunto).

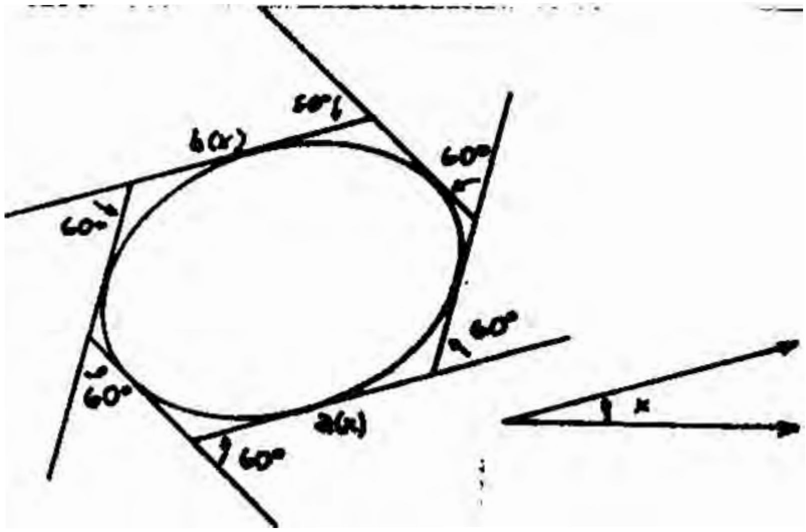
[illegible] para cada dirección x los [illegible] en la dirección perpendicular, [illegible], determinan un rectángulo, sean $a(x)$ y $b(x)$ las [illegible] de lados. Supongamos que $a(x) \cdot b(x)$ [illegible] $a(x) - b(x) < 0$ [illegible], y [illegible] $(x+90°) = b(x)$ y [illegible] (x),



$a(x + 90°) - b(x + 90°) > 0$. Otra vez, por el teorema del valor intermedio tenemos que existe $x_0 \in (x, x + 90°)$ tal que $a(x_0) = b(x_0)$.||

4.6. <u>Teorema:</u> Sea S convexo acotado. Entonces existe un exágono equiangular con dos de sus lados opuestos iguales circunscrito a S.

<u>Demostración:</u>



Para cada dirección x, inscribamos S en un exágono equiangular (120°), tal que uno de sus lados sea paralelo a dicha dirección. Sea a(x) la longitud de dicho lado y b(x) la de su lado opuesto. Si

$$a(x) - b(x) > 0,$$

ya que $$a(x + 180°) = b(x)$$

y $$b(x + 180°) = a(x),$$

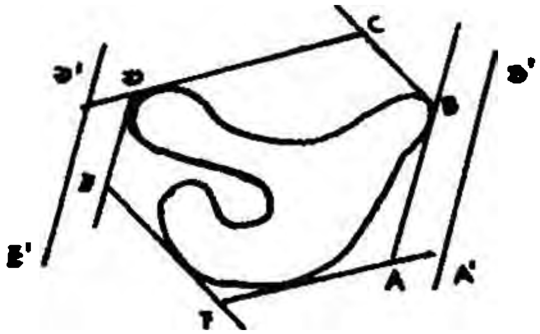
tenemos que $$a(x+180°) - b(x+180°) < 0.$$

Así, existe $x_o \in (x, x + 180°)$ tal que $a(x_o) = b(x_o)$.||

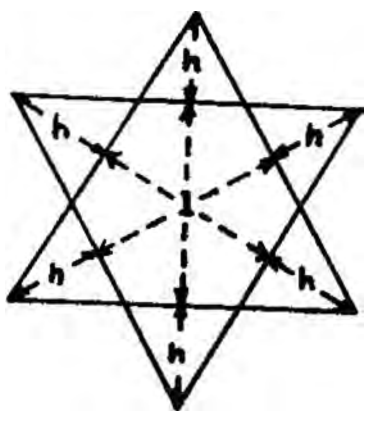
Problema 4.4 Sea S convexo acotado, probar que existe un exágono con simetría axial que se puede circunscribir a S.

4.7. Teorema: Si S es un conjunto de diámetro 1, existe un - exágono regular de radio $1/\sqrt{3}$ que lo contiene.

Demostración:



Sean A, B, C, D, E, F, los vértices de un exágono circunscrito a S tal que es equiangular y AB = DE. Sean A'B' paralela a AB y D'E' paralela a DE, tales que la distancia de A'B' a AB es la misma que la de D'E' a DE, y que la distancia de A'B' a D'E' es 1. De forma análoga construyamos B'C', C'D', E'F' F'A'. Probaremos que este nuevo exágono A'B'C'D'E'F', es regular



(equilátero y equiangular). Los lados $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$ determinan al triángulo PQR, y los lados $B'C'$, $D'E'$, $F'A'$ al triángulo TUV, y ambos son equiláteros. Los triangulitos $A'TB'$, $B'QC'$, -- etc. son todos iguales debido a que las distancias entre los lados opuestos del exágono son todas iguales y a que $A'B' = D'E'$. Así, el exágono $A'B'C'D'E'F'$ es regular, contiene a S y su radio es $1/\sqrt{3}$. ||

4.8 Corolario: Problema 3.2.

Problema 4.5 Probar la última afirmación del teorema, o sea que el radio del exágono es $1/\sqrt{3}$.

4.9. Teorema: Sea S convexo y ℓ una recta arbitraria. Entonces existen 3 cuerdas equidistantes A_oB_o, A_1B_1, A_2B_2 paralelas a ℓ y tales que $A_1B_1 = A_2B_2 = A_oB_o/2$. ($AB$ es una cuerda de S si A, B en FrS).

Demostración:

Sean A_1B_1 y A_2B_2 los segmentos de contacto de las dos rectas soportes en la dirección de ℓ. Supongamos [illegible]

[illegible] cuerda paralela a ℓ y tal que

[illegible] $2A_1B_1$ ya hallamos lo que [illegible]

Si A_oB_o [illegible] $2A_1B_1$, sea m_1 una recta paralela a ℓ [illegible]

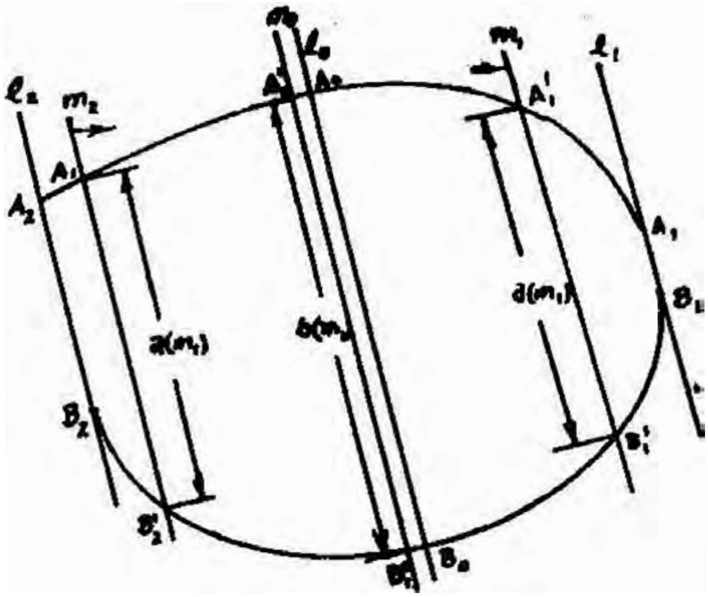
los dos soportes, y m_2 desplazándose paral[illegible]

[illegible], de tal manera que las cuerdas [illegible]

respectivamente determinan m_1 y m_2 sean de la misma [illegible]

[illegible] paral[illegible] a m_1 y m_2 equidistando de am[illegible]

determinada por m_o. Si $a(m_1)$ es la long[illegible]



y $b(m_1)$ la de $A_0'B_0'$, la función $2a(m_1) - b(m_1)$ es una función continua de la distancia de m_1 al soporte ℓ_1; ya que $a(\ell_1) = A_1B_1$ y $a(\ell_2) = A_2B_2$ si ℓ_2 es el soporte restante, tenemos que

$$2a(\ell_1) - b(\ell_1') < 0.$$

Habrá un momento en que m_1, m_2 y m_0 coincidan, digamos en n; así

$$2a(n) - b(n) = a(n) > 0$$

así tenemos que existe una recta m_1 entre ℓ_1 y n tal que

$$2a(m_1) - b(m_1) = 0,$$

así m_1, m_2, y m_0 determinarán las cuerdas que buscamos. ||

<u>Problema 4.6</u> En un triángulo, cuál es la terna de cuerdas del teorema anterior paralelas a uno de los lados?

<u>Problema 4.7</u> Probar que en todo conjunto convexo se puede inscribir un exágono cuyos lados opuestos sean paralelos y paralelos a la diagonal que une a los vértices que

no están en esos lados. ¿Puede este exágono ser equiangular?

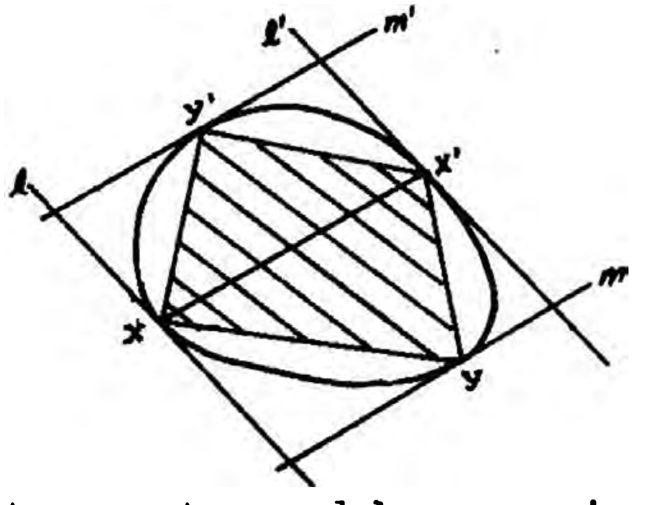
Problema 4.8 Probar que en un conjunto convexo siempre se puede inscribir un conjunto centralmente simétrico cuya área sea mayor o igual a 2/3 del área del conjunto. Hint: Probar que el exágono del problema anterior tiene esas propiedades.

Problema 4.9 Probar que el conjunto centralmente simétrico de máxima área que se puede inscribir en un triángulo es un exágono cuya área es exactamente 2/3 del área del triángulo.

Vamos a probar ahora un teorema análogo al resultado del problema 4.8.

4.10. Teorema: Sea S un conjunto convexo acotado, entonces existe un conjunto convexo centralmente simétrico cuya área es menor o igual que el doble del área de S y que contiene a S.

Demostración:



Sean ℓ y ℓ' rectas soportes paralelas y x y x' puntos de contacto de ellas con S. Sean m y m' rectas soportes paralelas a

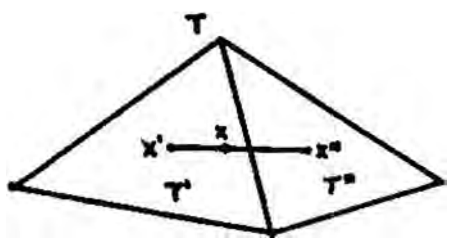
xx' y $\underline{y}$ y $\underline{y}'$ puntos de contacto de m y m' con S. El área del cuadrilátero determinado por x, y', x' y y, $A(xy'x'y)$, es menor o igual que el área del conjunto, $A(S)$, la cual a su vez es menor o igual que el área del cuadrilátero determinado por ℓ, m', ℓ' y m, $(A(\ell m'\ell'm)$. Por otro lado, el doble del área del triángulo xyx', $A(xyx')$ es igual al área del cuadrilátero determinado por xx', ℓ', m y ℓ, $A(xx'\ \ell'\ m\ell)$, y análogamente $2A(xy'x') = A(xx'\ \ell'\ m'\ell)$, así,

$$2A(xy'x'y) = A(\ell m'\ell'm)$$

y por lo tanto $\qquad A(\ell m'\ell'm) \leqslant 2A(S).||$

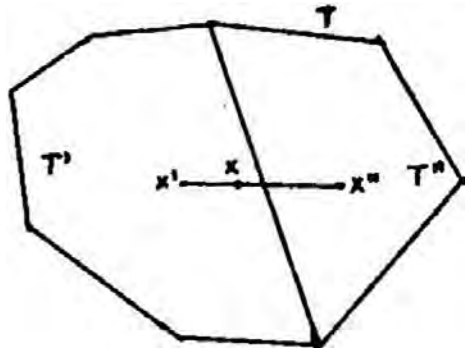
4.11. <u>Definición:</u> El <u>centroide, centro de gravedad</u> o <u>gravicentro</u> de un triángulo es su punto mediano.

4.12. <u>Definición:</u> El <u>centroide, centro de gravedad</u> o <u>gravicentro</u> de un cuadrilátero es un punto en el segmento que une a los centroides de los triángulos en los que lo divide una de sus diagonales, de tal manera que si x' es el centroide del triángulo T', y x'' es el centroide del triángulo T'', el centroide del cuadrilátero T es x tal que $x = ax' + bx''$ donde



$a + b = 1$ y $a/b = A'/A''$, siendo A' y A'' las áreas de T' y T'' respectivamente.

4.13. Definición: El centroide de un polígono se puede definir por inducción como un punto en el segmento que une a los centroides de dos subpolígonos que formen al polígono, y que satisfaga la misma relación que en el caso del cuadrilátero.



Automáticamente surge la pregunta de si está bien definido de esta manera el centroide de un polígono, es decir, que si se descompone éste de otra manera, el centroide no cambia de posición?. Aunque esto es cierto, la demostración no es simple, y se invita al lector a probar este resultado, al menos en el caso del cuadrilátero.

4.14. Definición: El centroide de un conjunto convexo es el límite de los centroides de los polígonos inscritos cuando las longitudes de sus lados tienden a cero.

Problema 4.10 Probar que el centro de gravedad de un conjunto convexo de ancho 1 dista a lo menos 1/3 de cada recta de él. (Nótese que un corolario de esta afirmación es el teorema de Blaschke).

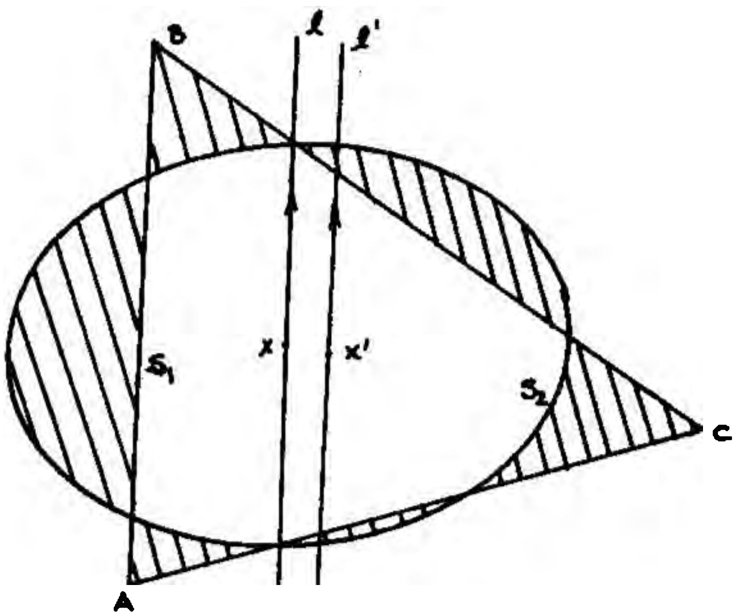
Problema 4.11 Sea S un conjunto convexo con área A. Supongamos que un segmento ab de longitud 1 forma parte de su frontera. Probar que el centro de gravedad de S dista de ab a lo más (2/3)A.

4.15. Teorema de (Winternitz): Sea S convexo acotado y $\underline{x}$ su gravicentro. Si ℓ es una recta que pasa por x, entonces ℓ divide al conjunto en dos subconjuntos S_1 y S_2, con áreas A_1 y A_2 respectivamente tales que

$$4/5 \leq A_1/A_2 \leq 5/4$$

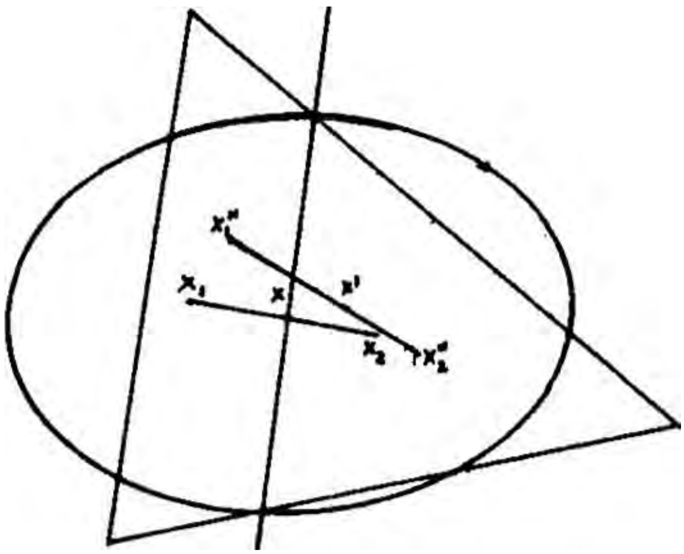
Demostración:

Sea ℓ una recta arbitraria por x, y construyamos sobre S, como indica la figura, un triángulo ABC con la misma área de



S, y tal que ℓ lo divida dejando a cada uno de sus lados las mismas áreas que en S. Sea x' su gravicentro, tracemos una recta ℓ' paralela a ℓ por x' y asignémosle un sentido. Esta recta ℓ' parte al triángulo ABC en dos partes. Sean A_1' el área de la región a la izquiera de ℓ' y A_2' el área a la derecha de ℓ'.

Ya que x' es el gravicentro del triángulo, es decir, su punto mediano, si AB es paralela a ℓ tenemos que si A_o es el área de ABC (y de S), $A_1' = (5/9)A_o$ y $A_2' = (4/9)A_o$ (por qué?), así, $A_2'/A_1' = 4/5$. Pero x' está a la derecha de ℓ si a ℓ le asignamos el mismo sentido que a ℓ, esto es claro ya que, llamando A_1'' y A_2'' a las áreas de las partes del triángulo a la izquierda y a la derecha de ℓ respectivamente, el gravicentro de A_1'', x_1'' está a la derecha de x_1, el gravicentro de A_1, así mismo, x_2'', el



gravicentro de A''_2, está a la derecha de x_2, el gravicentro de A_2. Así obtenemos que $A_1' \geq A_1$ y $A_2' \leq A_2$

y por lo tanto

$$A_2/A_1 \geq A_2'/A_1' = 4/5.$$

Así, obtenemos una de las desigualdades deseadas, e invirtiendo los papeles de A_1 y A_2, obtendremos la otra.||

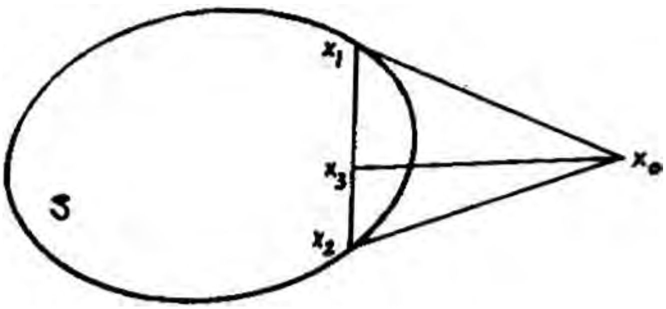
4.16. <u>Definición:</u> Definimos la <u>distancia</u> de un punto x_o a un conjunto S por $d(x_o,S) = \inf(d(x_o,x) : x \in S)$.

Nótese que si S es compacto, $d(x_o,S) = \text{mín}(d(x_o,x):x \in S)$, es decir, existe $x_1 \in S$ tal que $d(x_o,S) = d(x_o,x_1)$.

Aprovechando este concepto de distancia de un punto a un conjunto, podemos dar una caracterización de la convexidad de un conjunto en el siguiente

4.17 <u>Teorema:</u> Sea $S \subset R^2$ cerrado. Entonces S es convexo si y sólo si para cada $x_o \in R^2$ existe un punto único $x_1 \in S$ con la propiedad de que $d(x_o,S) = d(x_o,x_1)$.

<u>Demostración:</u>

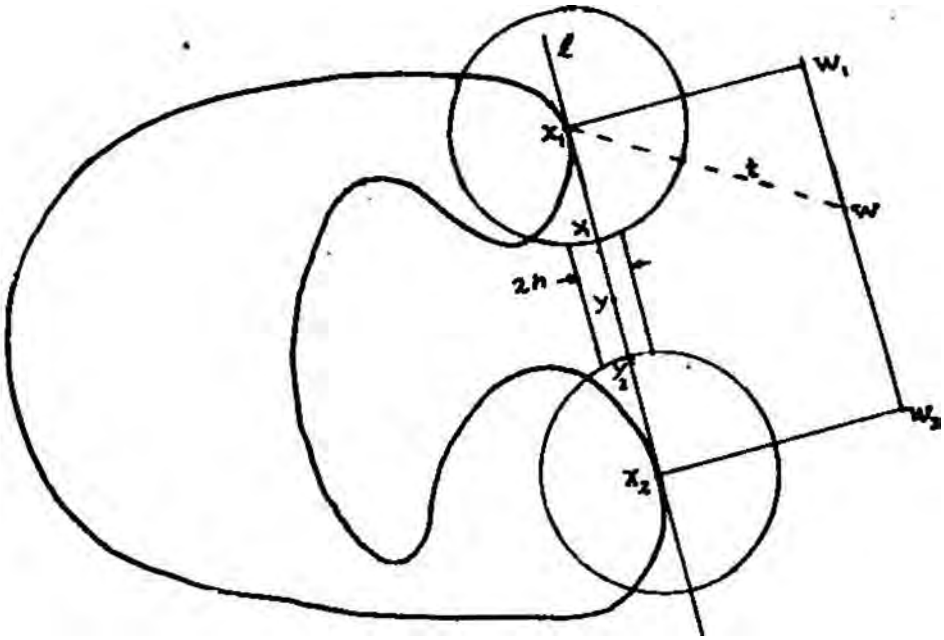


Supongamos que S es convexo, y supongamos que existieran $x_o \in R^2$, $x_1,x_2 \in S$ tales que $d(x_o,x_1) = d(x_o,x_2) = d(x_o,S)$. Sea $x_3 \in x_1x_2$, $x_3 \neq x_1,x_2$, así tenemos que $d(x_o,x_3) < d(x_o,x_1) =$
$= d(x_o,S)$!!!, por lo tanto $x_1 = x_2$.

Ahora supongamos que S no es convexo; probaremos que existen un punto en R^2 y dos puntos en S tales que la distancia del primero a S es igual a su distancia a los otros dos puntos.

Sea S' el casco convexo de S, tenemos que S es diferente de S' y fr S es diferente de frS'. Sea $y \in frS' - frS$, sea ℓ

una recta soporte por y.



Sean $x_1, x_2 \in frS \cap \ell$ tales que $y \in x_1x_2$, y tales que ya no haya puntos de $frS \cap \ell$ más cercanos a y. Sea $d = d(x_1, x_2)$, con centros en x_1 y x_2 tracemos círculos de radio d/3. Sean y_1 y y_2 los puntos de intersección de los círculos con x_1x_2. Así, $y_1y_2 \subset S^c$ y así, $d(S, y_1y_2) > 0$. Consideremos una banda de ancho 2h que contenga a y_1y_2, de manera que no intersecte a S. Tracemos perpendiculares a ℓ por x_1 y x_2 con longitudes $d^2/2h$ cada una, y sean w_1 y w_2 los extremos de dichas perpendiculares. Sea $w \in w_1w_2$, si pensamos en un círculo de radio $d(w, x_1)$ con centro en w, éste pasa por la banda de ancho 2h ya que

$$(d^2/2h) - h \leq d^2/2h = d(w_1, x_1) \leq d(w, x_1) \leq d(w_2, x_1) = \sqrt{d^2 + d^4/4h^2} <$$

$$< \sqrt{(h + d^2/2h)^2} = d^2/2h + h.$$

Así obtenemos que el único punto de S más cercano a cada punto de w_1w_2 está necesariamente en alguno de los dos círculos de radio d/3. Si llamamos t a la distancia de w a w_1, podemos definir una función continua f(t) de la siguiente manera, el valor de f en t es la distancia de x_1 al punto de S más cercano a w (que es único por hipótesis); así, f(0) = 0 (el punto más cercano a w_1 es x_1), f(d) = d (el punto más cercano a w_2 es x_2), así, ya que f es continua, existe $t \in (0,d)$ tal que f(t) = d/2, lo cual es una contradicción ya que los puntos más cercanos en S a cada $w \in w_1w_2$ no distan de x_1 o de x_2 más que d/3. La contradicción surgió por suponer que el punto de S más cercano a w es único. Así tenemos que hay por lo menos dos para alguna $w \in w_1w_2$.||

<u>Problema 4.12</u> Probar que si ℓ es una recta soporte de S, entonces lo es de su casco convexo S'.

4.18. Definición: Sea $\{S_i\}$, i = 1,2,...,n una familia finita de conjuntos, la distancia de un punto x a la familia, llamémosla Σ, se define por

$$d(x, \Sigma) = \text{máx}(d(x,S_i): i=1,2,\ldots,n)$$

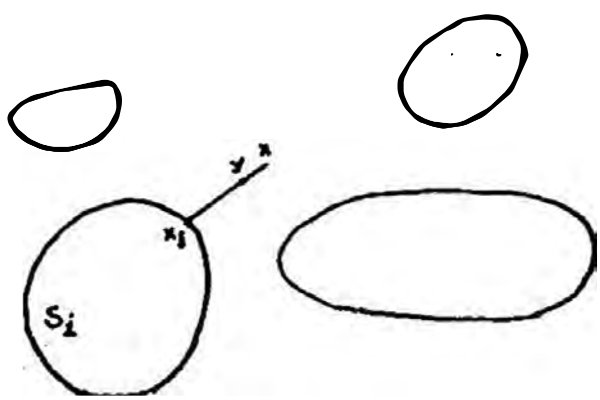
En principio parecerá un poco sofisticada esta definición; por qué no definir esa distancia como el mínimo y no como el máximo?, sin embargo esto quedará claro en el siguiente

4.19. <u>Teorema:</u> Sea $\Sigma = \{S_i: i= 1,2,\ldots,n\}$ una familia finita de conjuntos convexos compactos, y sea $x \in R^2$. Si $d(x, \Sigma) = d$

es mínima, i.e. no existe x' en R^2 tal que $d(x',\Sigma)$ es menor que d, entonces existen i, j entre 1 y n tales que si x_i y x_j son los puntos en S_i y S_j respectivamente tales que sus distancias a x son d, $x \epsilon x_i x_j$; o existen i, j, k, tales que si x_i, x_j, x_k son los puntos en S_i, S_j, S_k respectivamente tales que sus distancias a S son d, $x \epsilon x_i x_j x_k$ (el triángulo formado por ellos); o, en general, existen $i_1,\ldots,i_k$ entre 1 y n tales que si x_{i_1}, $x_{i_2},\ldots, x_{i_k}$ son los puntos en S_{i_1}, $S_{i_2},\ldots, S_{i_k}$ respectivamente tales que sus distancias a x son d, $x \epsilon x_{i_1} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ (el caso convexo de ellos).

Demostración:

$d = d(x,\Sigma) \leq d(y,\Sigma)$ para todo $y \epsilon R^2$ Existe S_i tal que la distancia $d(x,S_i) = d$; supongamos que $d(x,S_j) < d$ para toda $j \neq i$. Sea $y \epsilon x x_i$



tal que $d(x,y) = (1/2)\,(d - \max_{i \neq j} d(x,S_j))$; así, $d(y,\Sigma) < d$!!! Así tenemos que existen por lo menos S_i y S_j tales que $d(x,S_i) = d(x,S_j) = d$. Claramente $x \epsilon x_i x_j$ si $d(x,S_k) < d(x,S_i)$ para toda $k \neq i, j$, ya que de no ser así podríamos tomar un punto y más cercano a $x_i x_j$ que x cuya distancia a sea menor que

Supongamos ahora que $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ son tales que $d(s,S_{i_1}) = d(x,S_{i_2}) = \ldots = d(x,S_{i_k}) = d = d(x,x_{i_1}) = d(x,x_{i_2}) = \ldots = d(x,x_{i_k})$ con $x_{i_\ell} \varepsilon S_{i_\ell}$, $\ell = 1,\ldots,k$. Si $x \varepsilon x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, basta tomar $y \varepsilon \operatorname{int} xx_{i_1}x_{i_2}$ si $x_{i_1}x_{i_2}$ es el segmento más cerca no a x, para tener que $d(y, \Sigma) < d$!!!||

Para terminar esta parte correspondiente a funciones conti nuas y justificar la utilidad de este último teorema considérese el siguiente

<u>Problema 4.13</u> Probar el teorema de Helly utilizando el teo rema anterior.

Sección 5

EL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

Esta sección de los presentes apuntes será dedicada a un problema muy antiguo, conocido como el problema isoperimétrico. Dicho problema plantea la siguiente pregunta: de todas las figuras planas con perímetro dado, cuál tiene máxima área?

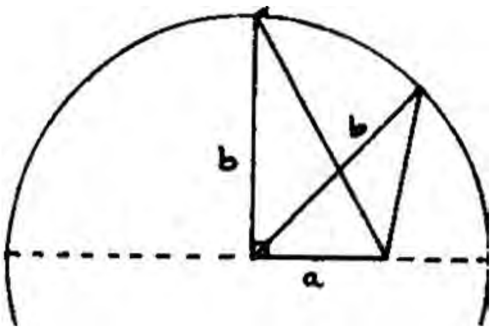
El problema tuvo su origen hace muchos siglos. Su historia se remonta a la época de la fundación de la ciudad de Cartago. Cuenta la leyenda que, navegando frente a las costas de Túnez, al norte de Africa, la princesa fenicia Dido con un grupo de ciudadanos compatriotas de ella, tuvo un naufragio. Habiéndose logrado salvar ella con su tripulación, y no habiendo sido posible regresar a su país, pidió al jefe de la tribu que habitaba cerca de la zona donde naufragó, que le concediera una fracción de terreno para fundar una ciudad donde vivir. El jefe de la tribu accedió, pero, tratando de probar la astucia de la princesa, le dió una piel de buey y le dijo: "serás dueña de la fracción que, en la costa, puedas rodear con esta piel". La princesa, quien era muy sabia y muchas matemáticas sabía, cortó la piel en angostas franjas, las unió por los extremos formando así una larga tira con la cual rodearía su territorio. Una vez habiendo formado la tira, se planteó la siguiente pregunta: "qué forma deberá tener la fracción de terreno que delimite para obtener la mayor superficie posible?", -así nació nuestro problema- y la hermosa princesa supo qué forma darle, así obtuvo una gran zona de terreno sobre la cual fundó la ciudad de Cartago de la que fué la primera reina.

Ahora seremos nosotros quienes nos enfrentemos a este problema. Empezaremos planteándonoslo para situaciones menos generales. Consideremos el siguiente teorema.

5.1. Teorema: De todos los triángulos con dos lados dados, el que los tiene mutuamente perpendiculares tiene área máxima.

Demostración:

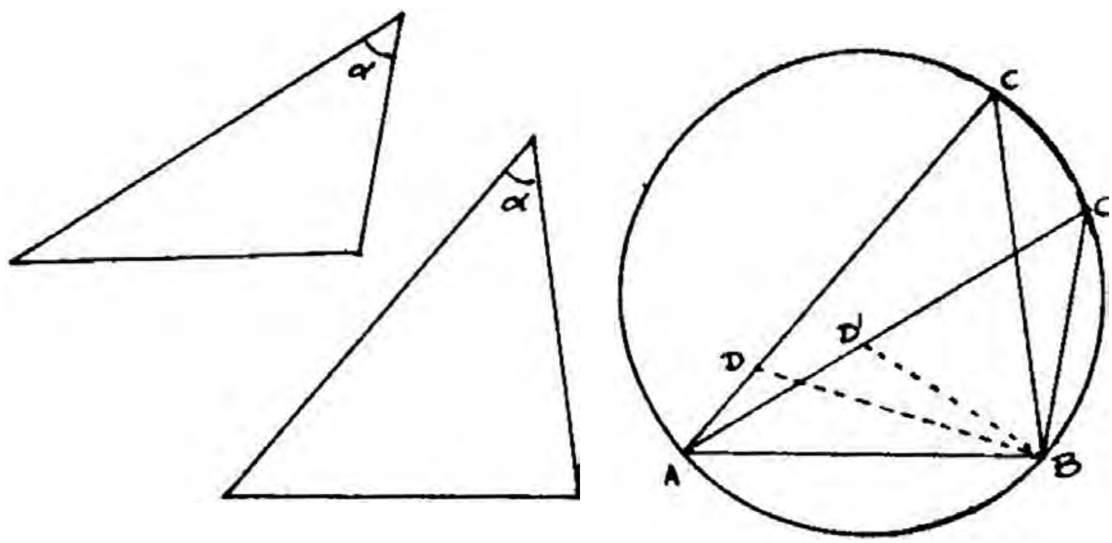
Obsérvese la figura:



Seguiremos considerando teoremas particulares, los cuales, posteriormente, nos servirán de una manera u otra para obtener el resultado general.

5.2. Teorema: Si dos triángulos no son iguales, pero tienen iguales bases e iguales ángulos opuestos a dichas bases, entonces tendrá mayor área y mayor perímetro aquél en el que menos difieran los otros dos lados.

Demostración:



Pensemos en nuestros triángulos inscritos en un círculo como indica la figura. (Por qué es posible?) Sean ABC y ABC' sus nombres. Construyamos D y D' en AC y AC' respectivamente de forma tal que CB = CD y C'B = C'D'. Tenemos que $\sphericalangle CAB >$ $> \sphericalangle C'AB$, de donde tenemos que la altura de ABC es mayor que la de ABC', y así el área de ABC es mayor que la de ABC'. Veamos que $|CA - CB| < |C'A - C'B|$ y que también $CA + CB > C'A + C'B$ (i.e. el perímetro de ABC es mayor que el de ABC').

$$\sphericalangle DAB > \sphericalangle D'AB, \text{ así } \quad \sphericalangle DBA < \sphericalangle D'BA < 90^\circ$$

y aplicando la ley de los senos

$$\text{sen} \sphericalangle DBA \qquad \text{sen} \sphericalangle D'BA$$

así $\qquad DA < D'A$

y $\qquad |CA - CB| < |C'A - C'B|$

Dejaremos que el lector tenga el placer de terminar la demostración resolviendo el siguiente

Problema 5.1: En el teorema anterior, probar que ABC tiene mayor perímetro que ABC'.

Antes de seguir adelante en la teoría, para ir obteniendo entrenamiento, resolveremos el siguiente

5.3. Ejercicio: Dado un ángulo $\alpha < 180°$, cuál es el triángulo de mayor área tal que uno de sus ángulos es α y los lados adyacentes, a y b son tales que su suma $a + b = p$ es fija?

Solución:

El área A del triángulo está dada por

$$A = (1/2)ba \operatorname{sen} \alpha = (1/8)(p^2 - (a - b)^2)\operatorname{sen} \alpha$$

ya que $ab = (1/4)((a + b)^2 - (a - b)^2)$. Así, vemos que el área máxima la obtendremos precisamente cuando $a = b = p/2$.

5.4. Corolario: De todos los paralelogramos con ángulos dados y perímetro dado, el de mayor área es el rombo.

Antes de seguir adelante consideremos el siguiente teorema, muy antiguo, que nos servirá como un lema muy importante, así como también tiene la virtud de ser de suma utilidad en general.

5.5. Lema: (Teorema de Herón de Alejandría) El área de un triángulo cuyos lados son a, b y c está dada por

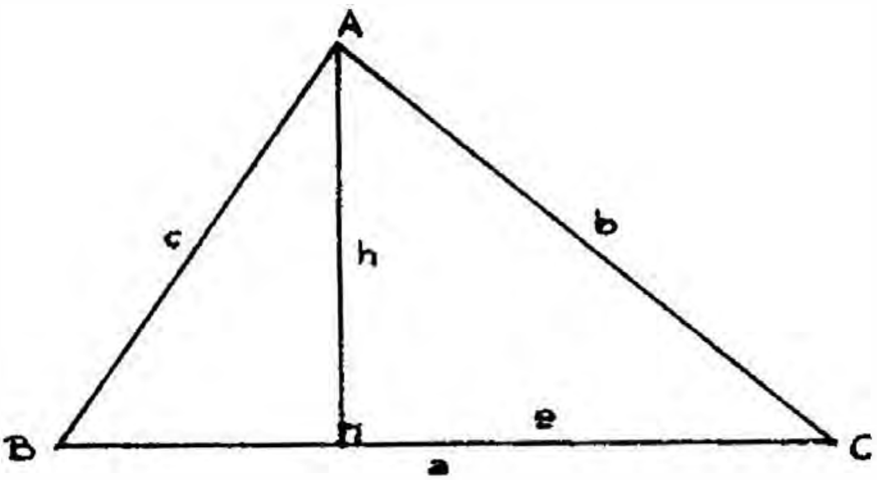
$$A = (1/4)\sqrt{[(a + b)^2 - c^2]\,[c^2 - (a - b)^2]}$$

O por
$$A = (1/4)\sqrt{p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)}$$

si $p = a + b + c$.

Demostración:

Considérese el triángulo cuyos lados son a, b y c. Si A, B y C son los vértices opuestos a dichos lados, tracemos la al-



tura desde A y sea h su longitud. Si e es la longitud del segmento que une a la base de dicha altura con C tenemos:

$$h^2 = b^2 - e^2 = c^2 - (a - e)^2$$

$$= c^2 - a^2 + 2ae - e^2,$$

así $$b^2 = c^2 - a^2 + 2ae,$$

por lo que $e = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

ya que $2A = ah$, tenemos que $4A^2 = a^2h^2 = a^2(b^2 - e^2) =$

$$= a^2\left(b^2 - \frac{(a^2+b^2 - c^2)^2}{4a^2}\right)$$

así,

$16A^2 = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 = (2ab - (a^2+b^2-c^2))(2ab + (a^2+b^2-c^2))$

y por tanto $16A^2 = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2)$.

Desarrollando un poco más la fórmula anterior, que es la primera que se quería demostrar, obtenemos

$$16A^2 = (a+b+c)(a+b - c)(c+a - b)(c - a + b)$$
$$= p(p - 2c)(p - 2b)(p - 2a).||$$

Gracias a este lema podemos demostrar el siguiente

5.6. <u>Teorema:</u> De todos los triángulos con base común e igual perímetro, el isósceles tiene máxima área.

<u>Demostración:</u>

Basta observar la primera fórmula del lema anterior que ya que a + b permanece fijo (por qué?) el área alcanza su valor máximo cuando a - b = 0 o sea cuando a = b.||

Nótese que de la misma fórmula utilizada en el teorema anterior se ve claro que si dos triángulos tienen la misma base y el mismo perímetro, aquél en el que menos difieran los lados será el que tenga mayor área.

<u>Problema 5.2</u> Probar que de todos los trapecios cuya base y perímetro están dados, el isósceles tiene máxima área.

<u>Problema 5.3</u> Probar que si dos triángulos tienen la misma base y la misma área, aquél en el que menos difieran los lados tendrá menor perímetro. Concluir de lo anterior que de todos los triángulos con la misma base y la misma área, el isósceles tiene perímetro mínimo.

En toda la discusión previa se ha visto que a mayor simetría mayor área, leído sea sin ningún mal entendimiento. Todo eso nos hace pensar hacia dónde dirigirnos para buscar las soluciones a los problemas isoperimétricos, y digo los, ya que podemos plantearnos el problema isoperimétrico para triángulos: De todos los triángulos con perímetro dado cuál tiene área máxima?, o el problema isoperimétrico para cuadriláteros: De todos los cuadriláteros con perímetro dado, cuál tiene área máxima?, así sucesivamente, antes de plantearnos la pregunta principal, tema de esta sección. Creo que resulta claro que esa dirección a la cual nos ha enfocado la discusión anterior, va hacia la mayor simetría, y así se verá claro por qué el siguiente teorema nos dará la solución al problema isoperimétrico para triángulos.

5.7. Teorema: De todos los triángulos con el mismo perímetro, el equilátero tiene la máxima área.

Para la demostración de este teorema necesitaremos utilizar el siguiente

5.8. Lema: El producto de n números positivos cuya suma es fija, es máximo cuando todos ellos son iguales. Es decir, si $a_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = nk$, k fijo, entonces $\prod_{i=1}^{n} a_i \leq k^n$, y $\prod_{i=1}^{n} a_i = k^n$ si y sólo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = k$. (a k se le llama la media aritmética de $a_1,\ldots,a_n$)

Demostración:

Supongamos que las a_i están ordenadas de manera que $a_1 < k$ y $a_2 > k$, digamos que $a_1 = k - h$, y $a_2 = k + \ell$, con $k, \ell > 0$. definamos $a_1' = k$, y $a_2' = k + \ell - h$ de manera que tenemos que $a_1' + a_2' = a_1 + a_2$.

Por otro lado tenemos que

$$a_1'a_2' = k(k + \ell - h) = k^2 + (\ell - h)k$$

$$a_1a_2 = (k - h)(k + \ell) = k^2 + (\ell -h)k - h\ell <$$
$$< k^2 - (\ell-h)k = a_1'a_2'$$

Aplicando ahora el mismo proceso a $a_2, \ldots, a_n$ tenemos que su producto será mayor cuando $a_2 = k$, etc., así, después de n-1 pasos obtenderemos el resultado deseado. ||

<u>Demostración del teorema 5.7.</u>

Ya que $16A^2 = p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)$, y ya que

$$(p - 2a) + (p - 2b) + (p - 2c) = 3p - 2p = p$$

permanece fijo, aplicando el lema tenemos que A es máxima cuando

$$p - 2a = p - 2b = p - 2c, \quad \text{o sea}$$

cuando $a = b = c$. ||

<u>Problema 5.4</u> Probar que de todos los triángulos con área dada, el equilátero tiene el mínimo perímetro. (Hint: Probar que si $a_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$, y $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$, y $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$ si y sólo si $a_1 = \ldots = a_n$, Hint al hint: usar el lema de la página anterior).

<u>Problema 5.5</u> De todos los triángulos circunscritos a un círculo fijo, cuál tiene área mínima, cuál perímetro mínimo?. Probar las conjeturas.

<u>Problema 5.6</u> De todos los triángulos inscritos en un círculo, cuál tiene área máxima, cuál perímetro máximo? Probar las afirmaciones.

<u>Problema 5.7</u> De todos los triángulos con área dada (perí

metro dado), cuál tiene el mínimo circuncírculo? (Hint: Utilizar el resultado del problema anterior).

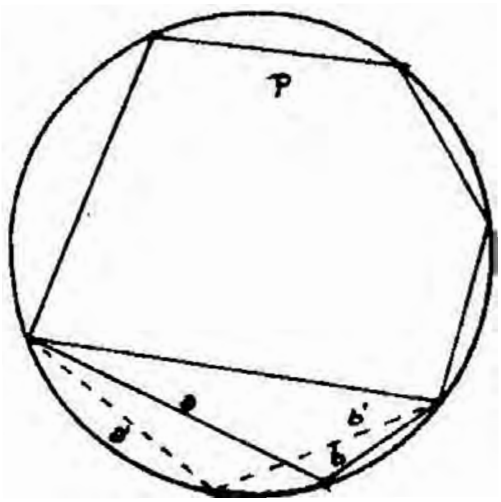
Después de toda esta discusión relativa a triángulos, veamos ahora algunos resultados concernientes a polígonos de más de tres lados.

5.9. Teorema: De todos los polígonos con n lados inscritos en un círculo, el regular tiene área máxima.

Demostración:

La formulación de la demostración de este teorema será parecida a una de las dos formulaciones que daremos a la solución del problema isoperimétrico, y es la siguiente. Supuesta la existencia de un polígono con n lados inscrito en nuestro círculo, cuya área es mayor o igual que la de cualquiera de los otros, veremos que éste sólo puede ser el regular ya que demostraremos que para cualquiera no regular hay otro con mayor área. Así tenemos que demostrar primeramente que dicho polígono de área máxima existe. Por lo pronto utilizaremos un resultado de análisis para demostrar dicha existencia. El argumento es el siguiente. Dado el polígono inscrito, éste está caracterizado por las coordenadas de sus vértices, de manera que su área será una función de 2n variables si n es el número de lados (y vértices). Ya que ésta es una función continua claramente y las 2n variables están restringidas a un compacto (digamos, el círculo), tenemos que existen coordenadas tales que para el polígono correspondiente el área es máxima, ya que toda función real continua en un compacto alcanza sus valores extremos.

Ahora sí estamos en posibilidades de terminar nuestra demostración. Sea P un polígono con n lados inscrito en el círculo y no regular. Sea A su área. Ya que no es regular podemos encontrar lados adyacentes que no son iguales, digamos a y b. Uniendo los extremos no comunes de dichos lados, obtenemos un triángulo que no es isósceles. Sustituyamos a y b por otros



dos segmentos a' y b' iguales de tal manera que el nuevo triángulo es isósceles y tiene la misma base y el mismo ángulo opuesto a dicha base que el triángulo original, así, por el teorema 5.2, tenemos que este nuevo triángulo tiene mayor área, y así, el nuevo polígono P', en el cual se sustituyeron a y b por a' y b' tendrá una mayor área que P. Así tenemos que para cada polígono irregular inscrito en un círculo hay otro inscrito en el mismo círculo de mayor área, y ya que por otro lado sabemos que necesariamente hay uno que tiene área máxima, a éste no le queda otro remedio que ser precisamente el regular.||

Para abocarnos a la solución del problema isoperimétrico para cuadriláteros, demostraremos primeramente el siguiente lema que expresa para cuadriláteros el resultado que para triángulos expresa el lema 5.5.

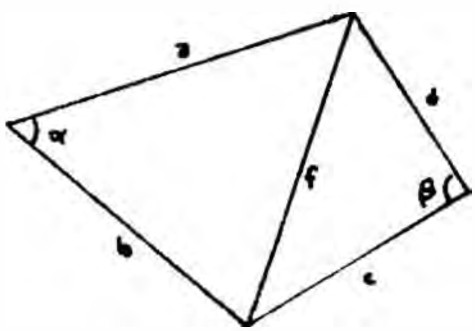
5.10. <u>Lema</u>: (Teorema de Herón para cuadriláteros inscriptibles o cíclicos). Si a, b, c y d son los lados de un cuadrilátero inscriptible, entonces su área está dada por

$$A = (1/4)\sqrt{(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)(p - 2d)}$$

donde $p = a + b + c + d$.

<u>Demostración</u>:

En el trayecto que sigamos para la demostración de este lema tendremos oportunidad de demostrar otro resultado de crucial importancia en nuestro desarrollo que dice lo siguiente: De todos los cuadriláteros con lados a, b, c, d dados, el inscriptible tiene área máxima:



$2A = ab \operatorname{sen} \alpha + cd \operatorname{sen} \beta$ si α y β son los ángulos determinados por a y b, y por c y d respectivamente. Así,

$$4A = 2ab \operatorname{sen} \alpha + 2cd \operatorname{sen} \beta ,$$

(1) .... $16A^2 = 4a^2b^2\operatorname{sen}^2 \alpha + 4c^2d^2\operatorname{sen}^2 \beta + 8abcd \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

Por otro lado, si f es la diagonal opuesta a α o a β, apli cándoles la ley de los cosenos a los triángulos abf y cdf,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = f^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

de donde $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta$,
y elevando al cuadrado

$$(2)\ldots\ldots(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2\cos^2\alpha + 4c^2d^2\cos^2\beta - 8abcd\cos\alpha\cos\beta$$

de donde, sumando (1) y (2), obtenemos

$$(3)\ldots\ldots16A^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta).$$

Ahora tenemos, observando esta igualdad (3), que de todos los cuadriláteros con lados dados a, b, c y d, el que más área tenga será aquél para el cual el miembro derecho de la igualdad sea máximo, es decir cuando $\cos(\alpha + \beta) = -1$, o sea, cuando $\alpha + \beta = 180°$, es decir, cuando el cuadrilátero sea inscriptible. Dada esta circunstancia y ya que el lema que estamos queriendo demostrar es para cuadriláteros inscriptibles, la igualdad (3) se convierte en:

$$\begin{aligned} 16A^2 &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\ &= 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\ &= (2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2))(2(ab + cd) - \\ &\qquad - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)) \\ &= ((a + b)^2 - (c - d)^2)((c + d)^2 - (a - b)^2) \\ &= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(\\ &\qquad (c + d - a + b) \end{aligned}$$

$= (p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)(p - 2d)$ ||

Ahora podremos demostrar el

5.11. Teorema: De todos los cuadriláteros con perímetro dado el cuadrado tiene área máxima.

Demostración:

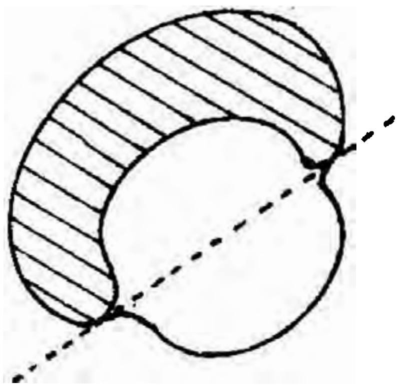
Ya que dado un cuadrilátero no inscriptible el inscriptible que tiene los mismos lados tiene mayor área, podremos considerar el teorema de Herón justo como en el caso del triángulo, y tenemos que el área será máxima precisamente cuando $p - 2a = p - 2b = p - 2c = p - 2d$, o sea, cuando $a = b = c = d$, y como además se trata de un cuadrilátero inscriptible, tenemos que es un cuadrado ||

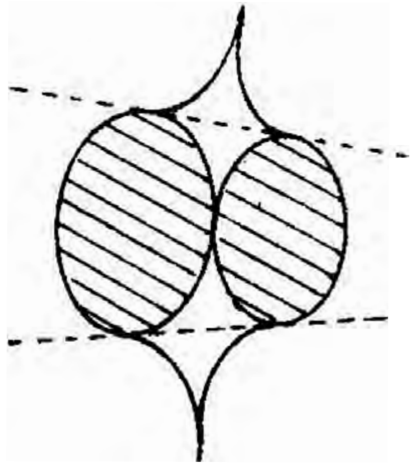
Enfrentémosnos ahora al problema isoperimétrico más general. La idea de la resolución de dicho problema será la siguiente. Veremos que para cada figura distinta de un círculo hay otra con el mismo perímetro y mayor área. Después demostraremos que necesariamente hay una figura con área máxima, que por tanto tendrá que ser el círculo. Probemos el siguiente

5.12. Teorema: Dada cualquier figura distinta de un círculo, siempre existe otra de igual perímetro y mayor área.

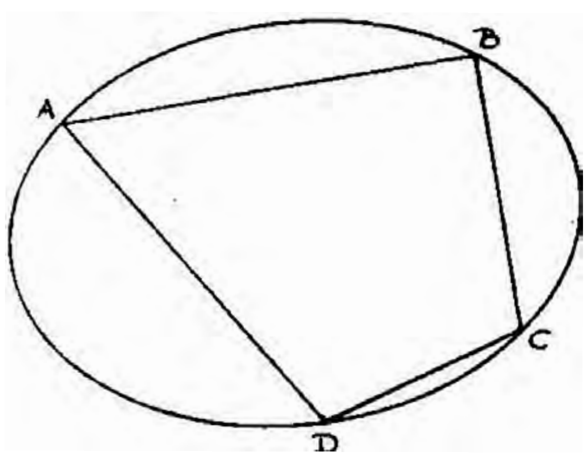
Demostración:

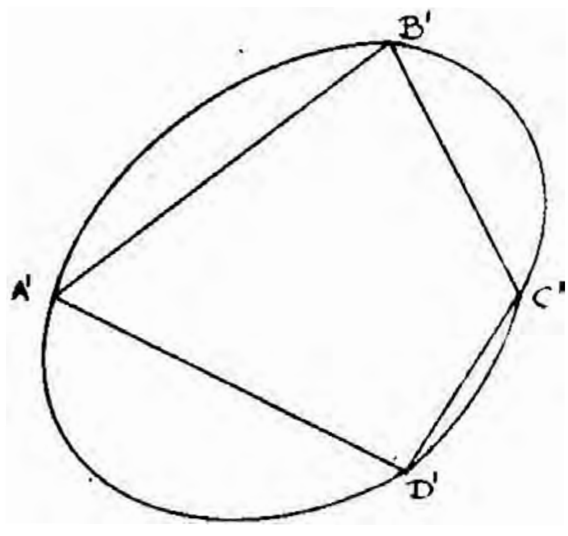
Primeramente consideremos el caso en el cual la figura no es convexa. Las figuras hablan por sí mismas:





Ahora supongamos que la figura es convexa. Ya que no es un círculo, podemos encontrar cuatro puntos A, B, C y D en su frontera tales que no sean concíclicos. Pensemos en las cuerdas determinadas por ellos y en los segmentos del conjunto por ellas determinados. Ya que el cuadrilátero determinado por dichas cuerdas no es inscriptible, podemos construir otro que tenga los mismos lados y mayor área, basta deformarlo hasta - que los ángulos opuestos sean suplementarios. Si pensamos en los segmentos del conjunto de los que ya previamente hablamos, rígidamente fijos a los lados del cuadrilátero, y deformamos a





éste como articulado en los vértices, a manera de obtener cuadrilátero cíclico, la nueva figura que obtengamos tendrá el mismo perímetro que la dada, pero mayor área, que era precisamente lo que había que demostrar.

Antes de seguir adelante y para justificar lo que sigue veremos un ejemplo en el que se ilustra por qué lo que se demostró en el teorema anterior no es un argumento suficiente para que podamos afirmar que el círculo es la solución del problema isoperimétrico.

5.13. <u>Ejemplo:</u> Consideremos el concjunto $\{1 - (1/n)\}$. Veremos que para cada fracción tal que $n \neq 1$ (n es natural), existe otra tal que es mayor que ella: considérese precisamente la fracción $1 - (1/n^2)$, que claramente es mayor que la fracción $1 - (1/n)$; sin embargo no es cierto que la fracción correspondiente a $n = 1$ sea la máxima: $1 - (1/1) = 0$.

Para poder probar entonces que el círculo es la solución al problema isoperimétrico, es necesario dar argumentos para probar la existencia de una solución al problema. El problema de demostrar dicha existencia no es un problema sencillo. Para lograr resolverlo tendremos que elaborar una especie de teoría métrica de curvas partiendo de la siguiente

5.14. Definición: Sean K_1 y K_2 dos curvas convexas. Si $C_a(x)$ denota al círculo cerrado con centro en x y radio a, consideremos los siguientes números

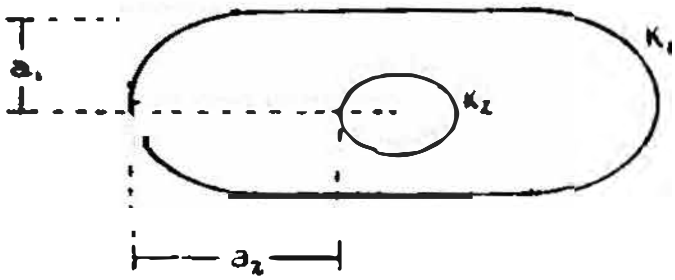
$$a_1 = \inf \{ a : K_2 \subset \bigcup_{x \in K_1} C_a(x) \}$$

$$a_2 = \inf \{a: K_1 \subset \bigcup_{x \in K_2} C_a(x)\}$$

Definimos la <u>distancia</u> de K_1 a K_2 por

$$d(K_1,K_2) = \text{máx } (a_1,a_2).$$

La siguiente figura ilustra el por qué no necesariamente a_1 y a_2 son iguales y tenemos que tomar su máximo.



Nótese que la definición es consistente con la de distancia entre dos puntos, ya que si las curvas están degeneradas en puntos obtenemos precisamente su distancia.

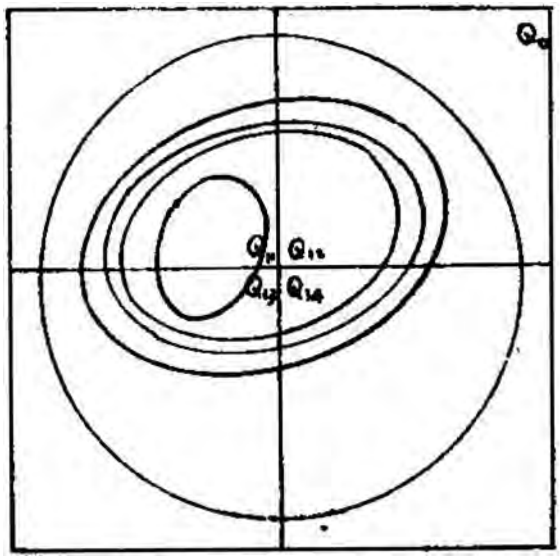
5.15. <u>Definición:</u> Sea $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ una sucesión de curvas convexas. Decimos que esta sucesión converge a la curva convexa K (puede ser un segmento o un punto), si dada $\varepsilon > 0$, existe N natural tal que si $n > N$ entonces $d(K_n, K) < \varepsilon$.

Probaremos una generalización del teorema de Bolzano Weierstrass usando curvas en vez de puntos.

5.16. <u>Teorema:</u> (de Bolzano Weierstrass para curvas convexas) Sea F una familia infinita de curvas convexas, contenidas todas ellas en un círculo C. Entonces se puede selecionar una sucesión $\{K_n\}$ En F que sea convergente.

Demostración:

Sea Q_o un cuadrado de lado 1 tal que $C \subset Q_o$ (podemos ajustar nuestra unidad de modo que esto suceda). Subdividamos a Q_o en 4



subcuadrados de lado 1/2 y llamémoslos Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}.
Definamos la siguiente subfamilia de F:

$$F(Q_{1i_1},\dots,Q_{1i_k}) = \{K\varepsilon F:\ K \subset \bigcup_{\lambda=1}^{k} Q_{1i_\lambda},\ y\ K \cap Q_{1i_\lambda} \neq \emptyset,\ \lambda = 1,\dots,k\}$$

es decir, la subfamilia de F formada por las curvas contenidas en la unión de los subcuadrados correspondientes y que tocan todos ellos. (Por ejemplo, $F(Q_{11}, Q_{13})$ es la familia de las curvas contenidas en $Q_{11} \cup Q_{13}$ y que intersectan a ambos. La curva pequeñita de la figura pertenece a dicha familia)

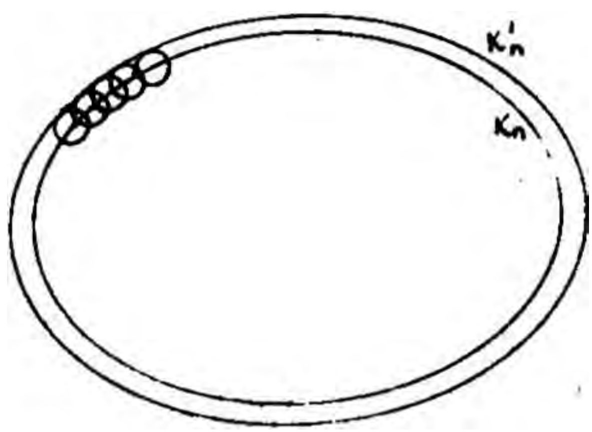
El número de estas familias es finito, y ya que cualquier elemento de F está en alguna de estas familias, debe existir alguna que contenga una infinidad de elementos. Llamémosla F_1

Si continuamos subdividiendo a Q_o, digamos en 2^{2n} subcuadrados de lado $1/2^n$ podemos definir por inducción una familia F_n de curvas de F_{n-1}, de tal manera que intersecten a todos y estén contenidas en la unión de todos de cierta colección de - subcuadrados de la subdivisión.

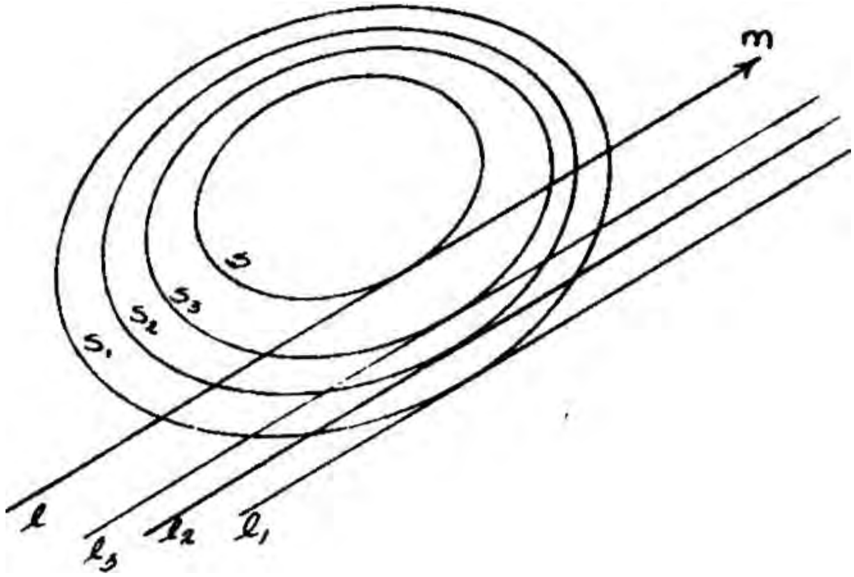
La ídea de lo que estamos haciendo es ir seleccionando elementos de F cada vez más cercanos. Los elementos de la familia F_n distan cuando mucho $\sqrt{2}/2^n$, que es la longitud de la diagonal de los subcuadrados de la subdivisión. Nótese que podemos hacer esta selección indefinidamente gracias a la cardinalidad infinita de F. Así habremos construido una sucesión

$$F \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_{n-1} \supset F_n \supset$$

Elijamos $K_1 \varepsilon F_1$, $K_2 \varepsilon F_2$, . . . , $K_n \varepsilon F_n$, . . . a cada K_n asociémosle una curva K_n' de la siguiente manera. Pensemos en todos los círculos de radio $1/2^{n-1}$ con centros en los puntos de K_n, de manera que estos formen una banda alrededor de K_n de ancho de $1/2^{n-1}$. K_n' será la frontera exterior de dicha banda.

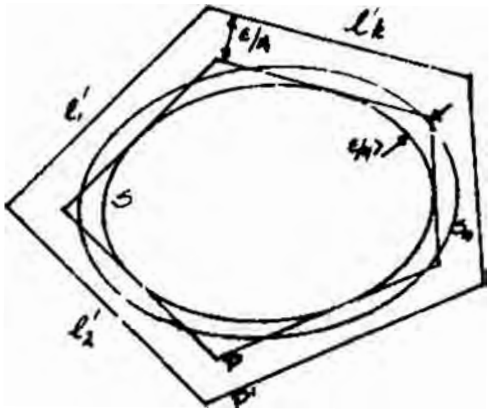


Nótese que si $K \in F_n$, $d(K,K_n) < \sqrt{2}/2^n < 1/2^{n-1} = d(K_n,K'_n)$, por lo que la curva K'_n "rodea" a todos los miembros de la familia F_n y por lo tanto a K_{n+1}, K_{n+2}, ... Si llamamos S_n al conjunto convexo cerrado acotado por K'_n tenemos que $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset$ $\supset S_{n-1} \supset S_n \supset$. Probaremos que $\bigcap_n S_n \neq \emptyset$ (vamos a probar precisamente el teorema conocido como teorema de encaje. Rudin). Sea ℓ_1 una recta soporte arbitraria de S_1 y sea ℓ_n una recta soporte de S_n paralela a ℓ_1. Llamemos Π_n al semiplano determinado por ℓ_n que contiene a S_n. Sea $\Pi = \bigcap_n \Pi_n$ que es no vacía por ser S_1 acotado y por tanto es un semiplano, y sea ℓ la recta que lo caracteriza. Reduzcamos ahora nuestro problema a probar que $\bigcap_n M_n \neq \emptyset$ donde M_n es el segmento ℓ Sn. Sea m_n la semirecta a la izquiera del extremo derecho de M_n (cerrada). Tenemos que $m = \bigcap_n m_n$ es una semirecta. Sea x su extremo. Claramente $x \in M_n$ para toda n, y por lo tanto $x \in S_n$ para toda n, así, $\bigcap_n S_n \neq \emptyset$.



Sea $S = \bigcap_n S_n$ y sea $K = \mathrm{fr}S$. K es claramente una curva convexa.

Probaremos que K es el límite de la sucesión $\{K_n\}$. Sea P un polígono circunscrito a K de tal manera que $d(P,K) < \varepsilon/_4$, donde ε es un número positivo arbitrario. Sea P' otro polígono cuyos lados sean paralelos a los de P y a una distancia $\varepsilon/_4$ de ellos. Por lo tanto $d(K,P') < \varepsilon/2$.



Sean $\ell'_1, \ell'_2, \ldots, \ell'_k$ los lados de P' (pensados como rectas completas). Por lo tanto existen N_i, i = 1,...., k tales que si $n \geq N_i$, S_n está a la izquiera de ℓ'_i. Si $n \geq$ máx$(N_1,\ldots,N_k)$ tendremos que S_n está rodeado por P' como se ve en la figura anterior.

Ya que $K \subset K'_n \alpha P'$ (donde $K_1 \alpha K_2$ significa que K_1 está encerrada o rodeada por K_2), $d(K'_n,K) < \varepsilon/2$. Pero $d(K'_n,K_n) < \varepsilon/2$ si n es suficientemente grande. Así tendremos que $d(K_n,K) < \varepsilon$ si n es como arriba. Por lo tanto,

$$\lim K_n = K$$

como queríamos demostrar. ||

5.17. Corolario: (Teorema de Bolzano Weierstrass para puntos)

Sea S un conjunto infinito de puntos que es acotado en R^2, entonces existe una sucesión de puntos distintos de S que converge.

Demostración:

Los puntos son curvas convexas (degeneradas), y ya que el conjunto es acotado podemos pensar que todas esas "curvas" están contenidas en un círculo.||

Ahora ya estamos en posibilidad de demostrar la existencia de una figura convexa con un perímetro dado que tenga área máxima.

5.18. Teorema: De todas las figuras convexas con perímetro dado, existe una que tiene área máxima.

Demostración:

Haremos la demostración en el caso en el que el perímetro sea 1. Sea F la familia de todas las figuras convexas de perímetro 1. Consideremos la siguiente aplicación

$$A: F \rightarrow R$$

tal que $A(S) = \text{Area } (S)$, $S \in F$. La imagen de esta función es claramente un conjunto acotado en R, ya que π es una cota superior pues todos los conjuntos de F están contenidos en un círculo de radio 1 (digamos) y sus áreas serán menores que la de este círculo. Sea

$$m = \sup A(F)$$

donde A(F) es la imagen de F.

Tenemos que $m - (1/n)$ es menor que m para todo natural n. Así tenemos que existe $S_n \in F$ tal que $A(S_n) \geq m - (1/n)$.

Si pensamos en las fronteras K_n de cada S_n tenemos que son curvas convexas encerradas en un círculo y además una infinidad (por qué). Por el teorema de Bolzano Weierstrass tenemos que existe una subsucesión K_{n_k} de la sucesión K_n que converge. Sea $K = \lim_{k \to \infty} K_{n_k}$

Sea S el conjunto acotado por K. Tenemos que la sucesión de perímetros de S_{n_k} es una sucesión constante igual a 1 que converge al perímetro de S, que por lo tanto será 1, es decir, $S \in F$. La sucesión de áreas converge a m ya que

$$m - (1/n_k) \leq A(S_{n_k}) \leq m$$

Así tenemos que el área de S es m. Por lo tanto $A(S) \geq A(S')$ para todo $S' \in F$. ||

Hemos pues demostrado la existencia de una figura de perímetro 1 y área máxima, o más en general, de una figura de perímetro dado y área máxima (semejante a S); puesto que sabemos que siempre que tengamos una figura distinta de un círculo, podemos hallar otra con el mismo perímetro y mayor área, tenemos que necesariamente la figura de máxima área, cuya existencia acabamos de mostrar, es el círculo. Le hemos pues resuelto a la bella princesa Dido su problema.

Ya que el proceso resulta ilustrativo, daremos una demostración totalmente diferente a la anterior de que el círculo es la solución del problema isoperimétrico. La demostración queda prácticamente contenida en el siguiente

5.19. **Teorema:** De todos los polígonos con n lados, ángulos fijos e igual perímetro, aquél que se pueda circunscribir a un círculo tendrá máxima área.

Demostración:

Haremos la demostración por inducción, en cierto sentido. Digo cierto sentido ya que pudiendo empezar con el caso tres que es trivial empezaré con el caso cuatro, y después ilustraré el paso de inducción pasando al caso cinco.

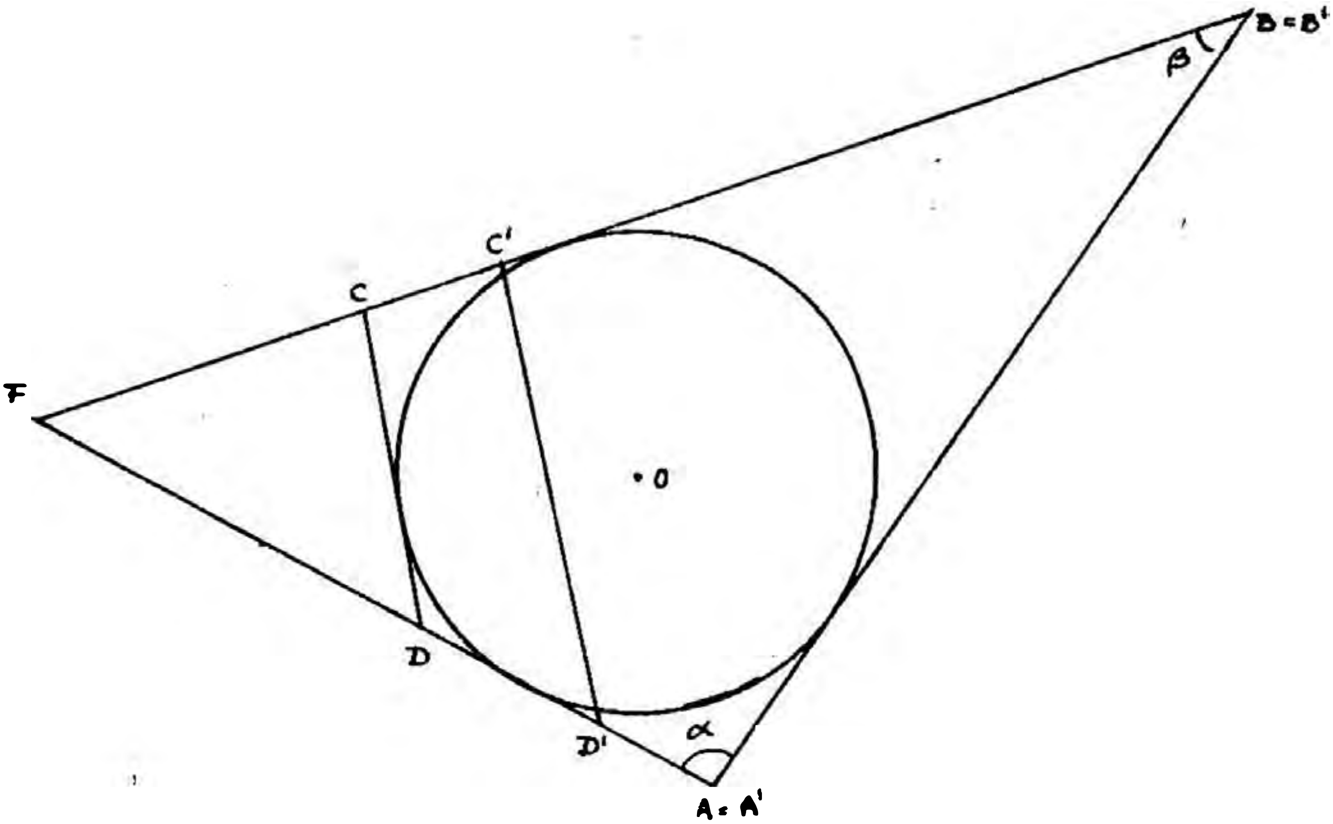
La primera parte de la demostración será probar la certidumbre del teorema para el cuadrilátero. La idea será probar que si dos cuadriláteros son tales que tienen sus lados paralelos (digamos), siendo uno de ellos circunscriptible y el otro no, la razón entre el área y el cuadrado de su perímetro para el circunscriptible es mayor que para el otro. Basta hacerlo así porque si tenemos dos figuras que son semejantes, la razón mencionada es la misma para ambas, y la propiedad de ser circunscriptible la comparten todas las figuras que sean semejantes a una que es circunscriptible. A este tipo de propiedades se les llama de semejanza, es decir, si una figura la tiene, entonces todas las semejantes a ella también.

Sean ABCD circunscriptible y A'B'C'D' no circunscriptible. Queremos demostrar que

$$\frac{\text{Area(ABCD)}}{(\text{Perímetro(ABCD)})^2} > \frac{\text{Area(A'B'C'D')}}{(\text{Perímetro(A'B'C'D')})^2}$$

Sean α, β, γ, δ los ángulos correspondientes a los vértices A, B, C, D, respectivamente (y a los vértices A', B', C', D', también, verdad?). Si $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$, nuestros cuadriláteros serían paralelogramos (por qué?), y si el primero es circunscriptible se tratará de un rombo (por qué?), así por el corolario 5.4 tenemos lo que queremos.

Supongamos ahora que $\alpha + \beta < 180°$; de esta manera podemos pensar en nuestros cuadriláteros de modo que el lado AB coincida



con el lado A'B' como se ve en la figura (recuérdese que no nos importa el tamaño de las figuras sino su forma). Prolonguemos los lados AD y BC a que se corten en F. Definamos P y p por

$$2P = AB + BF + FA$$

y

$$2p = CF + FD - DC$$

Así, podemos escribir al perímetro de ABCD en términos de P y p como

$$\begin{aligned} Per(ABCD) &= AB + BC + CD + DA \\ &= AB + BF + FA - (CF + FD - CD) \\ &= 2(P - p) \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que ΔCFD es semejante a $\Delta C'FD'$. Si llamamos k a la razón de semejanza, $k \neq 1$, tenemos que

$$C'F + FD' - D'C' = 2kp$$

por lo que $Per(ABC'D') = 2(P - kp)$

Ya hemos escrito los perímetros de nuestros dos cuadriláteros en términos de P y p. Hagamos ahora lo mismo con sus áreas. Si O es el centro del círculo inscrito a ABCD y R es su radio, tenemos que el área de Δ ABF es la suma de las áreas de Δ AOB, ΔBOF, ΔFOA, que son triángulos con bases AB, BF y FA respectivamente y todos ellos con altura R. Así

$$Area(ABF) = (1/2)(AB + BF + FA)R = PR$$

razonando análogamente

$$Area(FDC) = (1/2)(CF + FD - DC)R = pR$$

y por la semejanza de FDC con FD'C'

$$Area(FD'C') = k^2 pR$$

por lo tanto

$$Area(ABCD) = Area(ABF) - Area(FDC) = PR - pR = (P-p)R$$

y $$Area(ABC'D') = Area(ABF) - Area(FD'C') = PR - k^2pR = (P - k^2p)R$$

Consideremos ahora la siguiente diferencia

$$(P - kp)^2 - (P - p)(P - k^2p) = P^2 - 2kpP + k^2p^2 - P^2 + k^2pP +$$

$$+ pP - k^2p^2 = Pp(1 - 2k + k^2) = Pp(1 - k)^2 > 0 \text{ ya que } k \neq 1,$$

de donde $\qquad (P - kp)^2 > (P - p)(P - k^2p)$

y de ahí, multiplicando ambos miembros por $\dfrac{R}{4(P - kp)^2(P - p)} > 0$,

tenemos

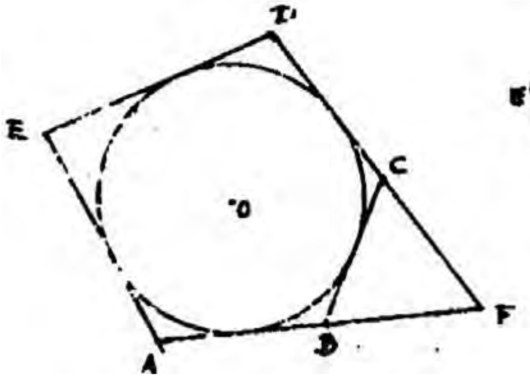
$$\frac{\text{Area}(ABCD)}{(\text{Per}(ABCD))^2} = \frac{(P - p)R}{4(P - p)^2} > \frac{(P - k^2p)R}{4(P - kp)^2} = \frac{\text{Area}(ABC'D')}{(\text{Per}(ABC'D'))^2}$$

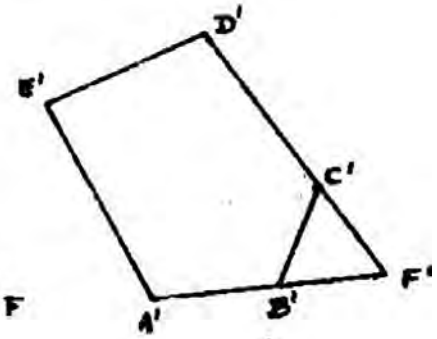
que es precisamente lo que se quería demostrar .||

Ahora ilustraremos el paso de inducción pasando del caso $n = 4$ al caso $n = 5$ ya que el caso general sería muy laborioso y latoso de escribir, y no tiene ninguna diferencia teórica -- con éste.

Pensemos en dos pentágonos con sus lados paralelos, ABCDE y A'B'C'D'E', tales que el primero es circunscriptible y el segundo no. Probaremos la desigualdad correspondiente como en el caso anterior.

Supongamos que los ángulos interiores en B y C suman más de 180° y prolonguemos los lados AB y DC a cortarse en F, análogamente prolonguemos A'B' y D'C' a cortarse en F'.





Definamos P y p por

$$2P = AF + FD + DE + EA \quad y \quad 2p = BF + FC - CB$$

Supongamos que nuestras figuras están construidas de manera que

$2P = A'F' + F'D' + D'E' + E'A'$ (esto no nos hace perder generalidad).

De manera análoga al caso anterior tenemos

$$Per(ABCDE) = 2(P - p) \quad y \quad Per(A'B'C'D'E') = 2(P - kp)$$

donde k es otra vez la razón de semejanza entre BFC y B'F'C'.

Por otro lado, ya que el cuadrilátero AFDE es circunscriptible y su perímetro es el mismo que el de A'F'D'E', tenemos

$$Area(A'F'D'E') = \lambda\, Area(AFDE) \quad con \quad \lambda \leq 1.$$

Así $Area(ABCDE) = Area(AFDE) - Area(BFC) = PR - pR = (P - p)R$

$$Area(A'B'C'D'E') = Area(A'F'D'E') - Area(B'F'C') = Area(AFDE) -$$

$$- k^2 Area(BFC) = (\lambda P - k^2 p)R.$$

Ahora bién, $(P - kp) - (P - p)(\lambda P - k^2 p) = P^2 - 2kpP + k^2p^2 -$
$\lambda P^2 + k^2pP$

$$\lambda pP - k^2p^2 = (1 - \lambda)P^2 + (1 - 2k + k^2)pP - (1 - \lambda)pP =$$

$$= (1 - k)^2\, pP + (1 - \lambda)(P - p)P \geq 0$$

de donde de una manera análoga al caso anterior, se obtiene la desigualdad deseada||

Ahora sí estamos en posibilidades de dar la demostración del

5.18 Teorema: De todas las figuras con perímetro dado, el círculo tiene máxima área.

Demostración:

Sea C un círculo de perímetro P y C' cualquier figura convexa con el mismo perímetro. Las áreas y los perímetros de C y C' serán los límites de las áreas y los perímetros de polígonos circunscritos a ellas cuando el número de lados tiende a infinito y sus ángulos interiores tienden a 180°.

Sea P_n un polígono con n lados circunscrito a C y P'_n otro polígono con n lados, los mismos ángulos que P_n y circunscrito a C'.

$$\begin{array}{llll} \text{Area}(P_n) \to \text{Area}(C) & \text{si } n \to \infty & \text{y sus ángulos} \to 180° \\ \text{Area}(P'_n) \to \text{Area}(C') & " & " & " \\ \text{Per}(P_n) \to \text{Per}(C) = P & " & " & " \\ \text{Per}(P') \to \text{Per}(C') = P & " & " & " \end{array}$$

ya que $\text{Area}(Pn)/(\text{Per}(Pn))^2 \geq \text{Area}(P'_n)/(\text{Per}(P'_n))^2$ tenemos en el límite

$$\frac{\text{Area}(C)}{P^2} \geq \frac{\text{Area}(C')}{P^2}$$

pero si C' no es círculo, hay otra figura de igual perímetro y mayor área. Así: Area(C) > Area(C') como queríamos demostrar.

B I B L I O G R A F I A

(1) Russel V. Benson . . . . Euclidean Geometry and Convexity

(2) Courant & Robbins . . . . . What is Mathematics?

(3) Eggleston . . . . Convexity

(4) Nicholas D. Kazarinoff . Geometric Inequalities

(5) Nicholas D. Kazarinoff . Analytic Inequalities

(6) James R. Newman . . . . . . The World of Mathematics, Vol. 2

(7) Walter Rudin . . . . . . Principles of Mathematical Analysis

(8) Heinrich Tietze . . . . Famous Problems of Mathematics

(9) Frederick A. Valentine . . . Convex Sets

(10) Yaglom & Boltyanskii . . . . Convex Figures