MISCELÁNEA MATEMÁTICA 32 (2000) 51–67 SMM

El álgebra en el Siglo XX

José Antonio de la Peña
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Area de la Investigación Científica
04510 México, D.F.
México

jap@math.unam.mx

1 Las matemáticas a principios del siglo XX.

> *La confianza en la solvabilidad de todo problema matemático es una poderosa guía en nuestro trabajo. Oímos continuamente dentro de nosotros: hay un problema, busca la solución. La puedes encontrar por la fuerza del pensamiento; en las matemáticas no hay lagunas. Debemos saber. Sabremos.*
>
> David Hilbert.

Comencemos por recordar brevemente cuál era la situación de las matemáticas a finales del siglo XIX. Para finales del siglo XIX, las ideas esenciales de la teoría de conjuntos como habían sido concebidas por Georg Cantor se habían finalmente impuesto en el mundo de las matemáticas. Probablemente su consagración se había dado durante el primer Congreso Internacional de Matemáticos en Zürich (1897) en el que el matemático francés Hadamard había señalado las importantes aplicaciones de la teoría de conjuntos al análisis. La teoría de conjuntos habría de tomar rápidamente tal importancia que se convertiría en el lenguaje básico de las matemáticas. Sin embargo, se abría simultáneamente una *crisis de fundamentos* de una gran profundidad que mantendría en tensión a los matemáticos durante los siguientes treinta años.

En las últimas décadas del siglo XIX, el método axiomático había logrado sus más claros éxitos. El método axiomático había nacido con las matemáticas en la Grecia clásica. En efecto, en sus *Elementos*, Euclides deriva a partir de unos pocos postulados o *axiomas*, que considera como verdaderos *a priori*, toda una lista de resultados matemáticos usando solamente las reglas del razonamiento lógico. Hasta mediados del siglo XIX, el procedimiento de Euclides y sus conclusiones fueron considerados como la pieza fundamental y más profunda de las matemáticas. Entonces, en trabajos independientes, el matemático ruso Nicolás Lobachevsky y el matemático húngaro Janos Bolyai construyen geometrías donde suponen los mismos postulados de Euclides, con la excepción de un axioma diferente que sustituye al *quinto postulado*. Quedaba entonces abierta la pregunta de la complitud del sistema axiomático de Euclides. Finalmente, en 1899, el matemático alemán David Hilbert publica su obra *Grundlagen der Geometrie* donde propone una lista de axiomas que implican formalmente a la geometría euclidiana.

El éxito de Hilbert en la geometría había sido precedido en 1889 por la axiomatización de la aritmética de los números naturales por el matemático italiano Giuseppe Peano. Explícitamente, todas las propiedades fundamentales de los números naturales con las operaciones de suma y multiplicación podían derivarse a partir de unos cuantos postulados básicos, usando las reglas de la lógica formal.

El espíritu de las matemáticas del siglo XX quedó definido profundamente por la plática inaugural del segundo Congreso Internacional de Matemáticos que se llevó a cabo en París en 1900. En su plática, Hilbert enunció una serie de 23 problemas que consideraba fundamentales y que deberían de marcar los esfuerzos de los matemáticos en el siglo que comenzaba.

Siguiendo las líneas de los problemas de Hilbert, se comenzaron a hacer intentos por axiomatizar la teoría de conjuntos. Los primeros ensayos parecían promisorios. Tanto, que el enfoque axiomático recobró una fuerza inusitada dentro de las matemáticas y hacía confiar a grandes matemáticos como Hilbert en la posibilidad de axiomatizar todas las matemáticas. Sin embargo, en 1931, el joven austriaco de 28 años Kurt Gödel se encarga de acabar con la esperanza *formalista*: demuestra que no puede encontrase un conjunto finito de axiomas que implique todos los resultados verdaderos de las matemáticas.

Para algunos matemáticos y otros científicos, el descubrimiento de Gödel daba un golpe devastador a la ilusión profunda de los matemáticos: conocer los fundamentos últimos de su disciplina. Pero el efecto, fue muy distinto. Las matemáticas siguieron progresando rápidamente sin preocuparse mucho por las cuestiones de fundamentos. El estudio de la axiomática de la teoría de conjuntos se mantuvo como uno de los temas centrales de la *lógica*, que probablemente es la rama de las matemáticas más cercana a la filosofía. Pero desde entonces y hasta la actualidad, la mayor parte de los matemáticos toma una actitud ingenua respecto a la teoría de conjuntos: usarla continuamente sabiendo que mientras no se invoquen conjuntos grandes o "extraños" no se tendrán problemas.

Varias ramas de las matemáticas tuvieron su inicio en los primeros años del siglo XX. Ramas que ahora son centrales en las matemáticas: el álgebra abstracta, la teoría de la medida y la topología. Estas ramas tuvieron su origen en el trabajo de las escuelas más fuertes de la época, la alemana y la francesa. En Alemania la figura dominante era David Hilbert y su punto de vista formalista predominaba, de forma que no es sorprendente que la formalización del álgebra abstracta se llevara a cabo. En Francia la figura dominante era Henri Poincaré, cuyo método de trabajo era más intuitivo e imaginativo. A partir del trabajo de Poincaré se deberían desarrollar la topología y en el largo plazo la teoría de catástrofes y del caos. La influencia de la escuela francesa fue tan grande en esta época que la mayor parte de las matemáticas eran publicadas en francés, del mismo modo que hoy día se hace en inglés. Otra escuela importante antes de la Segunda Guerra Mundial fue la polaca. Matemáticos polacos distinguidos se cuentan por decenas, la mayor parte trabajando en lógica, análisis y topología. Como ejemplos mencionamos a Banach, Tarski, Kuratowski y Sierpinski.

A finales del siglo XIX, la Universidad de Göttingen en Alemania tenía una gran reputación en matemáticas producida por el linaje de Gauss, Dirichlet y Riemann. Pero durante los 30 primeros años del siglo XX, la Universidad alcanzó todavía una mayor reputación, principalmente debido a Hilbert y la gran atracción que él ejercía sobre profesores y estudiantes de otras partes de Alemania y el mundo. Durante esos años en Göttingen estuvieron Klein, Minkowski, Heisenberg, Born, Landau, Carathéodory, Schmidt, Toeplitz, Haar, Noether, Weyl, Hecke, Courant y como visitantes estuvieron más o menos todos los matemáticos y físicos importantes de su tiempo.

Los antecedentes de las teorías de estructuras algebraicas abstractas se encuentran en los trabajos de teoría de números de Kummer, Wedderburn, Dedekind y otros, a partir de la cual se desarrollan los conceptos de anillos de la forma $\mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_n]$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son números complejos, y la teoría de ideales. A principios de siglo, los trabajos de Burnside, Frobenius y Schur sientan las bases de la teoría de representaciones de grupos. Recordemos que el estudio de los grupos de permutaciones había sido desarrollado junto con la teoría de Galois alrededor de los años 70 del siglo XIX. A principios de siglo, aún no se habían definido claramente el sustrato común de estas teorías, y fue la escuela alemana la que lo hizo a través de los trabajos de Emmy Noether y Emil Artin entre 1921 y 1933. En particular, en trabajos publicados en 1926, inician el estudio de las condiciones de cadena ascendente y descendente. En 1929, Noether introduce las nociones de homomorfismo de grupo, de bimódulo, así como los famosos *teoremas de isomorfía.* Emmy Noether es sin duda la mujer más destacada en matemáticas que ha visto la historia.

La topología es la rama más joven de la geometría. A pesar de descubrimientos aislados en los últimos años del siglo XIX, como el teorema de la curva de Jordan y algunas nociones debidas a Poincaré, su desarrollo sostenido no comenzó sino alrededor de 1911 con el trabajo del matemático holandés E. Brouwer.

El desarrollo de la topología se ligó tempranamente al del álgebra moderna, de manera que los conceptos de una rama eran utilizados por la otra hasta formar una rama propiamente dicha de las matemáticas: la *topología algebraica.* Uno de los problemas más importantes que se mantienen sin resolver hasta la fecha tiene su origen en el estudio del grupo fundamental iniciado por Poincaré en el cambio de siglo. El problema se puede enunciar como sigue: dado un espacio, se dejan caer lazos en él y se pregunta si pueden contraerse suavemente hasta cerrarse en un punto. En caso de que esto sea posible para todos lo lazos se dice que el grupo fundamental del espacio es trivial. Poincaré observó que toda superficie en el espacio real de tres dimensiones que tiene grupo fundamental trivial es topológicamente equivalente a una esfera. La pregunta, conocida como conjetura de Poincaré es establecer la validez del resultado correspondiente para esferas de dimensiones más altas.

2 Los conceptos del álgebra abstracta.

A partir de los conceptos de la aritmética y su axiomatización, se reconocieron las posibilidades de generalizaciones abstractas. En primer lugar surgieron las generalizaciones de los sistemas algebraicos cuyas operaciones satisfacían conjuntos de axiomas reconocibles e importantes, como los conjuntos con multiplicación que satisfacen los axiomas de grupo o los conjuntos con una adición y una multiplicación que satisfacen los axiomas de anillos. Estos conceptos abstractos generalizaban los grupos de permutaciones y los anillos enteros estudiados desde finales del siglo XIX. Posteriormente, se comenzaron a estudiar estructuras algebraicas con operaciones más generales que satisfacen reglas axiomáticas arbitrarias, surgiendo así áreas del álgebra novedosas: las álgebras y grupos de Lie, la teoría de categorías, el álgebra homológica y otras.

A pesar de ser conocidos y estudiados por largo tiempo como sistemas de simetrías de cuerpos geométricos, sólo en los siglos XVIII y XIX los *grupos* son reconocidos como estructuras matemáticas. El matemático francés Lagrange fue uno de los primeros en estudiarlos sistemáticamente y demostrar que un subgrupo de un grupo finito tiene un orden que divide al del grupo grande. Sólo en 1872, el matemático noruego Ludwig Sylow demuestra un converso parcial del resultado elemental de Lagrange. En efecto, si p es un número primo de forma que p^n pero no p^{n+1} divide el orden del grupo finito G entonces G acepta un subgrupo de orden p^n. Otro matemático noruego, Niels Abel, demostró que la ecuación general de quinto grado no puede ser resuelta por radicales, lo que dio lugar a que Evariste Galois usando sistemáticamente grupos, mostrara que la solución de una ecuación es posible por radicales sólo si el grupo asociado a las permutaciones de sus raíces es soluble.

Desde entonces la teoría de grupos es fundamental en todas las matemáticas. El matemático alemán Felix Klein consideraba, por ejemplo, a la geometría como el estudio de aquellas propiedades del espacio que quedan invariantes bajo la acción de grupos específicos de transformaciones. En topología, dos objetos son considerados equivalentes si puede transformarse uno en otro por medio de un elemento de un grupo continuo.

La teoría de grupos de permutaciones de conjuntos finitos generales comienza a desarrollarse hacia 1860 por Kronecker y Jordan. En 1868, Jordan establece por primera vez la relación entre grupos de permutaciones y los grupos de transformaciones del espacio euclidiano de dimensión 3. Un año después Sophus Lie, junto con el joven Klein, introduce la idea de invariante en geometría diferencial, cuya fuente es su observación de que los métodos clásicos de integración por cuadraturas de ecuaciones diferenciales se apoyan en el hecho de que la ecuación es invariante bajo una familia continua de transformaciones. En estos trabajos, Lie se familiariza con el manejo de los paréntesis de Poisson y de los corchetes $[X,Y] = XY - YX$ de operadores diferenciales utilizados en la teoría de Jacobi-Clebsch de sistemas completos en derivadas parciales de primer orden. A partir de entonces y hasta principios del siglo XX, una serie de matemáticos entre los que destacan Lie, Engel, Cartan, Killing y Weyl desarrollan la teoría de grupos y álgebras de Lie.

Así, Killing prueba que el álgebra derivada de un álgebra resoluble es de "rango 0", esto es, que $\operatorname{ad} x$ es nilpotente para todo elemento x del álgebra. Engel demuestra poco después que las álgebras de rango 0 son resolubles. Por otra parte, Elie Cartan en su tesis introduce la forma bilineal que se llama ahora *forma de Killing*, estableciendo los dos criterios que caracterizan las álgebras de Lie resolubles y las álgebras de Lie semisimples. Sólo en 1935, tras el trabajo de Hermann Weyl, Coxeter y Witt se dan cuenta que los grupos irreducibles infinitos de desplazamientos euclideos engendrados por reflexiones se corresponden biunívocamente con las álgebras de Lie simples complejas. Posteriormente, Chevalley y Harisch-Chandra dan demostraciones conceptuales de la correspondencia biunívoca entre los grupos cristalográficos y las álgebras de Lie semisimples complejas, lo que hasta entonces sólo se había verificado por inspección para cada álgebra de Lie simple.

Mientras tanto se había desarrollado entre 1896 y 1910, por Frobenius, Burnside e I. Schur la teoría de representaciones lineales de grupos, limitada en su principio a las representaciones de grupos finitos. Para 1896, Frobenius había introducido la noción de carácter de grupo, de representación irreducible y representación completamente reducible. En la tesis de Schur al cambio de siglo, se demuestra las propiedades fundamentales de las representaciones irreducibles (el llamado *Lema de Schur*). Todos ellos estaban conscientes de que el conjunto de representaciones lineales de un grupo formaba un álgebra compleja. Aunque en esos años Poincaré define los conceptos de ideales izquierdos y derechos de un álgebra, sus trabajos pasan desapercibidos para los algebristas, hasta que Wedderburn en 1907 vuelve a redescubrir los conceptos en el contexto de su estudio de álgebras semisimples de matrices.

El sustrato común de las teorías algebraicas desarrolladas hasta ese momento sólo es formalizado en el periodo de 1921-1933 por la escuela alemana de E. Noether y E. Artin, momento que en que se define la creación del álgebra moderna. Así, ellos junto con Remak, Krull, Brauer, Albert, Hasse, Skolem, van der Waerden y otros, establecen los conceptos y resultados fundamentales de las teorías de anillos con condiciones de cadenas descendentes (o artinianos), anillos con condiciones de cadenas ascendentes (o noetherianos), anillos de Dedekind, grupos abelianos de operadores, representaciones lineales de grupos finitos, álgebra lineal, anillos con división, anillos simples y semisimples, grupos de Brauer y otros asuntos.

A partir de 1940, los matemáticos comenzaron a formalizar la relación entre diversas áreas de las matemáticas a través de la teoría de categorías y funtores. Rápidamente este contexto fue aceptado por los matemáticos como el lenguaje más adecuado para la expresión de muchas ideas. Este aparato fue propuesto por Saunders MacLane y Samuel Eilenberg, matemáticos norteamericanos, con la idea de formalizar la noción de transformación natural en el estudio de propiedades topológicas de objetos geométricos.

Estrechamente relacionada con el surgimiento de la teoría de categorías, se encuentra el desarrollo del álgebra homológica. Sus orígenes se pueden trazar en los inicios de la topología algebraica al principio del siglo con el estudio de los grupos fundamentales de espacios topológicos, y a la observación de Hurewicz en 1936 de que para los poliedros esféricos (esto es, tales que cualquier mapeo continuo de una esfera en el poliedro es contraible), los grupos de homotopía están determinados por el grupo fundamental del poliedro. En los años 40, el álgebra homológica fue desarrollada por MacLane, Eilenberg, Hopf, Baer, Fadeev, Eckmann y otros hasta la publicación en 1956 del libro de Cartan y Eilenberg que no ha perdido su importancia hasta el día de hoy. Desarrollos posteriores se encuentran en los trabajos de Grothendieck. En los últimos años, el uso de las categorías derivadas, introducidas en la tesis de J. L. Verdier entonces estudiante de Grothendieck, es cada vez más extendido.

Los teoremas de isomorfía de Noether manifiestan la importancia de los grupos libres. En 1921, Nielsen demostró que todo subgrupo finitamente generado de un grupo libre era también libre, lo que después sería generalizado por Schreier para cualquier subgrupo. Es interesante notar que la demostración más sencilla de este importante resultado se obtiene observando que los grupos fundamentales de gráficas son libres, lo que muestra el carácter esencialmente topológico del resultado.

Un importante problema en un grupo libre finitamente generado F es saber si dos palabras w_1, w_2 representan el mismo elemento en un cociente finito de F. Éste es el llamado *problema de las palabras* que fue resuelto en 1955 por el matemático Pyotr Novikov con una respuesta inesperada: no existe un método que resuelva el problema de las palabras en general, esto es, el problema es insoluble. Desde entonces varios problemas en teoría de grupos han mostrado ser de la misma naturaleza.

3 El renacimiento del formalismo y su impacto en la enseñanza de las matemáticas.

En la mayor parte de los países avanzados, se dieron importantes reformas educativas durante los años sesentas, siendo la enseñanza de las matemáticas uno de los ejes centrales de las reformas. Poco a poco, esos cambios conceptuales fueron pasando a otros países y fueron adoptando diferentes formas, de acuerdo, por supuesto, a las características del medio local y la influencia de educadores y científicos prominentes. A esas primeras reformas, se sucedieron otras como respuesta a importantes críticas y reacciones, y posteriormente, como respuesta a los avances tecnológicos, fundamentalmente, la introducción de las computadoras en la enseñanza.

Para algunos autores la fecha en que la primera gran reforma en la enseñanza de las matemáticas arranca puede fijarse en 1957. El lanzamiento ese año por los soviéticos del primer satélite Sputnik hace temer a los norteamericanos que su rezago científico se debe a un atraso educativo general. Por ello, deciden aumentar el gasto en educación y en ciencia y comisionan a importantes grupos de científicos para que asesoren al gobierno en la modificación de planes y programas de estudio desde los niveles elementales. En el informe *On the mathematics curriculum for the High School*, un grupo de matemáticos propone la introducción en la enseñanza de:

> *Las matemáticas modernas. En vista de la falta de conexión entre las diferentes partes del plan actual, los grupos que trabajan en la elaboración del nuevo plan harían bien en introducir conceptos generales unificadores. Pensamos que el uso de la teoría de conjuntos y de los conceptos del álgebra abstracta pueden dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria.*

La coincidencia de intereses entre grupos importantes de matemáticos y de pedagogos, hizo que la dirección de la reforma fuera inevitable.

La teoría de conjuntos se introdujo en el curriculum de las escuelas secundarias primero y posteriormente en las primarias y aun en escuelas maternales. Por supuesto, la reforma en la enseñanza de las matemáticas no vino sola. En realidad fue el eje de toda una reforma de la enseñanza a nivel medio y elemental. Por ejemplo, se introdujeron cambios en la distribución de las bancas en los salones de clase y en la forma del maestro de dar clase (más atención individualizada y menos clase frente al grupo). En Gran Bretaña, el Comité Asesor para la Educación adoptó las ideas de Piaget llevándolas hasta el extremo de considerar que el juego es la principal forma de aprendizaje.

Las primeras reacciones contra la reforma en la enseñanza de las matemáticas se dieron probablemente en Francia. En 1970, René Thom hace una crítica severa tanto al optimismo excesivo generado por el uso de la teoría de conjuntos elemental, como a la manera en que se enseña. En Gran Bretaña, la reacción fue más lenta. Todavía en 1976, un reporte del Ministerio de Educación culpaba de los fracasos a los profesores y no a los métodos de Enseñanza. En Estados Unidos, uno de los críticos más articulados e influyentes ha sido Morris Kline. En 1973, su libro *Why Johnny can't add: the failure of the New Math* señalaba una serie de problemas en los programas reformados: empleo injustificado y abundante de símbolos, vocabulario pedante, olvido de motivaciones físicas, pobreza de los ejercicios, mediocridad de los autores de los programas, entre otros.

Algunos de los problemas ocasionados por la precipitada introducción de conceptos avanzados de las matemáticas a niveles en que ni los estudiantes, ni sus profesores, estaban preparados a recibir se han corregido en los últimos años. Sin embargo, la crisis de la enseñanza de las matemáticas –en todos los niveles educativos– no ha sido claramente resuelta.

4 Los grandes avances en álgebra de los últimos 30 años.

Las matemáticas no son un libro confinado con una cubierta cerrada por grapas, cuyo contenido sólo requiere paciencia para conocer; no son una mina, cuyos tesoros tal vez tomen tiempo en extraerse, pero que llenan solamente un número limitado de venas y túneles; no son un suelo, cuya fertilidad puede agotarse después de muchas cosechas; no son un continente o un océano, cuya área puede ma-

pearse y sus contornos definirse; son tan ilimitadas como el espacio al que encuentra estrecho para sus aspiraciones; sus posibilidades son tan infinitas como los mundos que aparecen continuamente bajo la mirada del astrónomo; son tan imposibles de restringirse en fronteras asignadas o de ser reducidas a definiciones de permanente validez, como la conciencia de la vida.

James Sylvester.

Muchos son los resultados importantes en las matemáticas, y en particular del álgebra, en los últimos años. Una lista de ellos, será necesariamente incompleta y sesgada. Por ello, sin ningún afán de representatividad, sino sólo a manera de ilustración, mencionamos a continuación algunos de los desarrollos más característicos de los últimos años.

4.1 La clasificación de los grupos simples finitos.

Un grupo simple es aquel que no contiene subgrupos normales con excepción del trivial y él mismo. Muchas preguntas importantes de grupos pueden reducirse a problemas sobre los grupos simples.

En el caso de los grupos con parámetros continuos reales o complejos, la clasificación fue hallada por Cartan como hemos visto antes. Su lista incluye cuatro familias discretas de grupos y cinco grupos excepcionales que pueden expresarse con 14, 52, 78, 133 y 248 parámetros respectivamente. Para el caso de grupos finitos la situación es mucho más complicada.

Era desde hace mucho tiempo conocido que los grupos cíclicos de orden primo y los grupos alternantes A_n en que $n \geq 5$ eran simples. En 1955, Claude Chevalley mostró que todos los grupos de Lie tienen análogos finitos si el campo real o complejo se sustituye por un campo finito y con muy pocas excepciones, correspondientes a campos con 2 ó 3 elementos, los análogos de los grupos de Lie simples son simples. Luego en 1960 el matemático japonés Suzuki descubrió varias familias de grupos simples asociados a trenzamientos de grupos de Lie que quedan fijos bajo la acción de ciertos automorfismos.

Un desarrollo impresionante en el estudio de los grupos simples fue la demostración en 1963 por Feit y Thomson que aparte de los grupos de orden primo, todos los otros grupos simples tienen orden par. Desde entonces se encontraron 20 grupos simples esporádicos (esto es, que no corresponden a familias) más, asociados a los nombres de Janko, Hall, Higman, Sims, Suzuki, MacKay, Held, Conway, Wales y Fischer. En los años 70 y 80, Daniel Gorenstein junto con un importante grupo de matemáticos estableció un programa para demostrar que la lista encontrada hasta entonces de grupos simples finitos estaba completa. En los últimos 15 años se considera que la prueba ha sido completada, pero aún está en proceso de escribirse de una manera clara y concisa.

4.2 De los nudos a la física, la biología y la química.

Un nudo es una curva cerrada en el espacio de tres dimensiones. Al dibujar un nudo en una hoja de papel, un cruce en el espacio se indica como una pequeña discontinuidad en la parte del nudo que pasa por detrás, según el punto de vista del observador.

Los nudos interesan a los matemáticos desde hace tiempo. Decimos que dos nudos son equivalentes si podemos llevar uno en otro sin romperlos. Se han llegado a clasificar tablas de nudos (hasta equivalencia) con hasta 13 cruces. Sin embargo, el número de cruces no es un buen *invariante* de los nudos, pues dos nudos equivalentes pueden tener diferente número de cruces, como un 8 y un círculo. Por ello, en 1928, John Alexander introdujo un invariante algebraico, *el polinomio de Alexander* que distinguía una gran cantidad de nudos.

Fue hasta 1984 cuando el joven matemático Vaughan Jones introdujo un nuevo polinomio como invariante de los nudos, que además de ser mucho más sutil que el polinomio de Alexander, distinguía también entre un nudo y su imagen especular (la imagen especular del nudo consiste en recorrer el nudo en sentido contrario). La principal sorpresa del descubrimiento era que Jones provenía de un área de las matemáticas en principio completamente ajena a la teoría de espacios de dimensiones bajas, él trabajaba en álgebras de von Neumann que tienen su origen en la mecánica cuántica.

La teoría de nudos cobró una importancia especial en el estudio de moléculas de ácido desoxirribonucleico (ADN) que contiene la información genética que gobierna la vida. En general, las tiras de ADN pueden formar nudos muy complicados, como lo muestran fotografías electrónicas. Un hecho impresionante, es la existencia de enzimas que permiten a un nudo de ADN transformarse en otro haciendo pasar la parte inferior de un cruce hacia arriba, de manera que el nudo que se obtiene puede no ser equivalente al original. La teoría de nudos empieza a ser utilizada por los biólogos para tratar de entender las diferentes configuraciones de tiras de ADN que aparecen y sus diferentes funciones.

Los químicos interesados en la síntesis de nuevos compuestos están comenzando también a prestar atención a la topología y a la teoría de nudos. Tratan de crear nuevas sustancias cambiando la forma geométrica en que los átomos están distribuidos y conectados entre sí. Inspirados en las figuras de la geometría, los químicos han sintetizado moléculas donde los átomos están organizados como los vértices de un tetraedro o de un dodecaedro y más recientemente lograron la síntesis de los fulerenos. Estas moléculas exhiben propiedades físicas y químicas sorprendentes (superconductividad, ferromagnetismo y gran estabilidad). Su forma además les permite encapsular otras moléculas y formar compuestos de variados usos prácticos. Entre estas moléculas la más estable es el Carbono 60 (C_{60}) que tiene una estructura casi esférica con 12 pentágonos y 20 hexágonos unidos en su superficie y los átomos de carbón en los vértices. La estructura de C_{60} se puede obtener a partir del icosaedro por medio de ciertos cortes (o truncamientos).

4.3 El Último Teorema de Fermat.

Las matemáticas de la Grecia clásica están profundamente marcadas por el trabajo de Pitágoras. En su libro *Aritmética* el matemático griego Diofanto estudia cuidadosamente el Teorema de Pitágoras, y se pregunta por aquellos triángulos rectángulos cuyos lados tienen longitud entera. Prueba que hay infinitas soluciones (a, b, c) para este problema dadas por las fórmulas: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, con $m > n$ números enteros positivos.

A mediados del siglo XVII, el matemático aficionado Pierre Fermat leía una copia de la *Aritmética* de Diofanto y se preguntaba para qué números $n \geq 3$ era posible hallar tripletas de números enteros (a, b, c) que satisfacen la ecuación $a^n + b^n = c^n$. En el margen del libro escribió: "la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para $n > 2$. Encontré una demostración maravillosa, pero el margen de este libro es muy pequeño para escribirla".

Por supuesto, Fermat se refería a soluciones en enteros positivos y excluía las soluciones triviales del problema como $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ ó $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. La prueba que supuestamente Fermat había encontrado nunca fue publicada y no fue hallada entre los papeles que dejó a su muerte. Lo que sí publicó fue una demostración elemental de que la ecuación $x^4 + y^4 = z^4$ no tiene soluciones enteras. La mayoría de los matemáticos han pensado desde entonces que en realidad Fermat no tenía una prueba del caso general, y que la demostración que creyó tener cuando escribió la nota al margen de su libro estaba equivocada. Sin embargo, la afirmación se conoce como *El último Teorema de Fermat.*

Al paso de los años algunos de los matemáticos más importantes trataron vanamente de probar este resultado, pero en su esfuerzo obtuvieron muchas otras cosas. Euler demostró que el caso $n = 3$ tampoco tenía soluciones. Para el principio del siglo XIX, ya se sabía que el Teorema de Fermat era también correcto para los casos $n = 5$ y $n = 7$. Para 1964, el Teorema había sido demostrado para los números pares y para los números menores que 25,013. Intentos de resolver este problema dieron inicio a ramas completas de las matemáticas como la teoría analítica de los números y la teoría de ideales en anillos.

Fue sólo en 1983 que la siguiente contribución importante fue realizada. El joven matemático alemán Gerhard Faltings demostró que las ecuaciones de la forma $x^n + y^n = z^n$ con $n > 2$ pueden tener a lo más un número finito de soluciones que no son múltiplos unas de otras (observe que si (a, b, c) es solución de la ecuación, entonces también (at, bt, ct) es una solución para cualquier entero t). De hecho, Faltings demostró este resultado como parte de un Teorema más general que había sido conjeturado tiempo atrás por Mordell. Si bien esto no resolvía el problema de Fermat, mostraba ya que había nuevas herramientas matemáticas que podían decir cosas importantes sobre él.

Hubo tantos intentos fallidos de demostrar el Teorema que cuando finalmente la solución llegó, fue una sorpresa para todo mundo. Tal es la fama de este problema, que los periódicos del mundo entero publicaron notas informando que una demostración finalmente había sido hallada. En el verano de 1993, Andrew Wiles, un profesor de Cambridge, Inglaterra, anunció que tenía una demostración contenida en un manuscrito de más de 200 páginas. Wiles había pasado los últimos 7 años de su vida trabajando en una línea que creía lo llevaría a la prueba del Teorema de Fermat.

Poco tiempo después de anunciado su descubrimiento, un panel de matemáticos de varias universidades encontró una falla en la demostración. En efecto, un argumento en la prueba de Wiles, y por lo tanto la prueba toda, estaba incompleto. Primeramente, Wiles pensó que podría reparar fácilmente el problema encontrado, pero no fue así. Pasaron varios meses y sólo en octubre de 1994, con la ayuda del matemático Richard Taylor, Wiles pudo evitar el uso del resultado equivocado y con ello la demostración fue realmente completada.

La demostración de Wiles del Último Teorema de Fermat es una muestra del grado de sofisticación y profundidad que han alcanzado las matemáticas. Mientras que el problema de Fermat requiere una línea para escribirse y cualquier estudiante de secundaria puede entender la afirmación, la demostración requiere de técnicas y resultados de álgebra y geometría que se han ido desarrollando a lo largo de siglos.

Barry Mazur, un matemático que ha contribuido con importantes ideas en el área, describió sus impresiones de las primeras conferencias de Wiles en Cambridge sobre la demostración del Teorema de Fermat con las siguientes palabras:

> *Nunca había estado antes en una serie de conferencias así. Lo que era único en estas conferencias eran las maravillosas ideas, cuántas nuevas ideas eran presentadas y el dramatismo que se incrementaba. Estábamos en suspenso hasta el final.*

Porque Wiles no había anunciado lo que pretendía demostrar: el título de la serie de conferencias era más bien técnico, pero algunos expertos ya sospechaban hacia dónde iba. Lo que Wiles en realidad demostró era la validez de la conjetura de Taniyama-Shimura que se refiere a propiedades de ciertas curvas en el espacio y que puede definirse mejor como un problema de geometría algebraica. La conjetura fue enunciada a mediados de siglo, pero de alguna manera pasó desapercibida durante cierto tiempo hasta que el matemático francés André Weil probó una serie de resultados que mostraban que la conjetura era plausible. Demostrar esta conjetura era suficiente para Wiles, pues Ken Ribet había demostrado años antes que la validez de la conjetura implicaba el Teorema de Fermat.

Los detalles de la demostración del Último Teorema de Fermat (que debería llamarse ahora Teorema de Fermat-Wiles), sólo pueden ser comprendidos por matemáticos especialistas en el campo. Sin embargo, podemos decir que la demostración del Último Teorema de Fermat es uno de los mayores logros del intelecto humano.

5 Conclusiones generales.

Una primera observación acerca del álgebra más relevante producida en este siglo es su estrecha relación con otras áreas de las matemáticas y sus aplicaciones tanto en esas áreas como en otros campos del conocimiento. Esto es parte de un esquema más general. En efecto, las matemáticas en su conjunto han gozado en las últimas décadas del acercamiento con otras ciencias, en particular, la física. Sorprendentemente, algunas de las ideas que emanaron de la física llevaron a importantes descubrimientos en matemáticas puras. Tal vez, el mayor número de estas ideas han surgido de las teorías de campo cuánticas. Por supuesto, la fertilización de ideas se ha dado también en el sentido contrario, cuando las técnicas de álgebra y topología han tenido un importante impacto en la física cuántica.

Tal vez una de las características más marcadas de las matemáticas, y probablemente de las ciencias en general, en esta segunda mitad del siglo XX ha sido la ausencia de filósofos-científicos que indiquen direcciones para el progreso de las ciencias. En este sentido, el físico Steven Weinberg nos indica:

> *No conozco a nadie que haya participado activamente en el avance de la física después de la Segunda Guerra Mundial cuyo trabajo de investigación haya sido significativamente apoyado por el trabajo de filósofos. Resalté antes el problema de lo que Wigner llama "la irrazonable efectividad" de las matemáticas; aquí quiero enfatizar otro fenómeno igualmente inquietante, el de la irrazonable inefectividad de la filosofía.*

El linaje de los matemáticos-filósofos es muy ilustre. Puede al menos remontarse a Pitágoras y Platón e incluye los nombres de Leibniz, Descartes, Pascal, Pierce, Russel, Whitehead y Poincaré entre otros. Muchos otros matemáticos, sin ser filósofos, contaban con una posición filosófica sólida desde la cual enfocaban su trabajo matemático. En este segundo grupo podríamos ubicar fácilmente a Newton, Gauss, Hilbert y otros influyentes personajes. Muchos de estos matemáticos se distinguieron por su capacidad de comprensión global del papel de las matemáticas en las ciencias y en el mundo, lo que les permitió guiar el desarrollo de las matemáticas en su tiempo.

Como hemos visto, las matemáticas se han enriquecido del desarrollo de la computación, del resurgimiento de sus contactos con otras ciencias y han gozado de un crecimiento interno vigoroso con importantes repercusiones conceptuales. Todo esto se ha dado junto con un cambio en la valoración de la trascendencia en que el matemático promedio estima su trabajo. En 1940, G. H. Hardy hablando a título personal, pero sin duda, representando el sentir de gran número de matemáticos decía:

> *Nunca he producido nada útil. Ninguno de mis conocimientos ha supuesto, directa o indirectamente, la más mínima alteración sobre la afabilidad del mundo, ni para bien ni para mal. He ayudado a formarse a otros matemáticos del mismo tipo que yo, y su trabajo ha sido, sea cual sea la ayuda que de mí hayan recibido, tan inútil como el mío propio. Juzgado desde el punto de vista práctico el valor de mi vida como matemático es nulo y, en cualquier caso, fuera de mi actividad profesional es trivial. Tan sólo me queda una posibilidad de escapar del veredicto de absoluta trivialidad: haber creado algo digno de serlo. Es incuestionable que he creado algo: el problema reside en determinar si tiene algún valor.*

Terminado el siglo XX podemos decir que el sentimiento de los matemáticos es muy diferente. El valor del conocimiento y la práctica matemática no se estima solamente en el contexto del trabajo profesional matemático. Su valor en la enseñanza del razonamiento lógico y sus múltiples aplicaciones en otros campos están bien establecidos. El matemático actual está consciente del poder de los métodos que domina y de la trascendencia de sus resultados.

Referencias

[1] V. Arnold, S. Gusein-Zade y A. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps, Birkhäuser (1985).

[2] N. Bourbaki, Elementos de historia de las matemáticas, Alianza Universidad (1972).

[3] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique. Chapitre IV, V. Hermann (1960).

[4] S. I. Gelfand and Yu. Manin, Methods of Homological Algebra. Springer Verlag (1998).

[5] G.H. Hardy, Autojustificación de un Matemático. Ariel (1981). De la edición inglesa de Cambridge University Press (1940).

[6] Roman Kossak, Why are we learning this? Notices AMS. December (1995),

[7] R. Lyndon and P. Schupp, Combinatorial group theory. Springer Verlag (1975).

[8] J. A. de la Peña, Matemáticas para hermenéutas. Revista de la Universidad Nacional 566. Marzo de 1998.

[9] J. A. de la Peña, La enseñanza de las matemáticas: la crisis de las reformas. Revista de la Universidad Nacional 576. Marzo de 1999.

[10] J. A. de la Peña, Álgebra en todas partes. Fondo de Cultura Económica (1999).

[11] Jean Piaget, Remarques sur l'éducation mathámatique. Math. Ecole 58 (1973).

[12] Michel Serres, Eléments d'histoire des sciences. Larousse-Bordas (1997).

[13] René Thom, Les mathámatiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique? L'age de la Science 3 (1970).