Miscelánea Matemática **34** (2001) 59–71 SMM

Fermat y el Cálculo Diferencial e Integral*

Shirley Bromberg
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-I
09340 México, D.F.
México
stbs@xanum.uam.mx

Juan José Rivaud**
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-I
09340 México, D.F.
México
jrivaud@mail.cinvestav.mx

1. Introducción.

El *último Teorema de Fermat* encendió la imaginación de generaciones y generaciones de matemáticos que soñaron con su demostración. Para estas generaciones, el trabajo matemático desarrollado por Fermat quedó oculto tras el brillo legendario del Teorema. Sin embargo, a lo largo de los años muchas voces se alzaron para reivindicar también a Fermat como co-fundador de la Geometría Analítica, como iniciador junto con Pascal de la Teoría de Probabilidades y como descubridor del Cálculo Diferencial e Integral.

Queremos ahondar en la validez y alcances de esta última afirmación: ¿ Es Fermat, junto con Leibniz y Newton, fundador del Cálculo? o

*Una versión preliminar de este trabajo fue presentada en las III Jornadas de Historia y Filosofía de las Matemáticas, CIMAT A.C., Guanajuato, septiembre de 2001.

**Con Licencia Sabática de la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del CINVESTAV.

con más modestia: ¿En qué medida el trabajo de Fermat es antecedente y precursor del Cálculo?

Fermat, y los geómetras del siglo XVII (el término “matemático”se emplearía en el siglo por venir), querían ser los herederos del saber de los antiguos. Así el primer interés de Fermat es abordar los problemas geométricos de los griegos: cuadraturas, trazado de tangentes, rectificación de curvas y problemas geométricos de optimización, pero se perfila un cambio en los métodos/técnicas usados. En efecto, el *Arte Analítico* de F. Viète proporciona un nuevo significado para el *análisis* de los problemas y Fermat usa las ténicas de Viète para introducir un “método de coordenadas”que le permite convertir problemas geométricos en problemas que hoy denominaríamos algebraicos.

Señalemos que la notación que estamos usando está lejos de ser la usada por Fermat, la cual era bastante rudimentaria; además, él la usa con mucho descuido. Nuestra notación es la que se desarrolló a partir de Leibniz y vale la pena recalcar que en el caso del álgebra, la forma es contenido. Sin embargo, tratamos de estar tan cerca como sea posible de las ideas de Fermat.

2. La cuadratura de las parábolas.

Arquímedes descubrió, mediante una heurística muy elaborada basada en la Ley de la Palanca, que la cuadratura del sector de parábola ABC es igual a 4/3 del área del respectivo triángulo, donde B, al que llamaremos *centro* del arco, es el punto de la parábola donde la tangente es paralela a la cuerda AC. Para demostrar formalmente su resultado usa el método de exhaución.

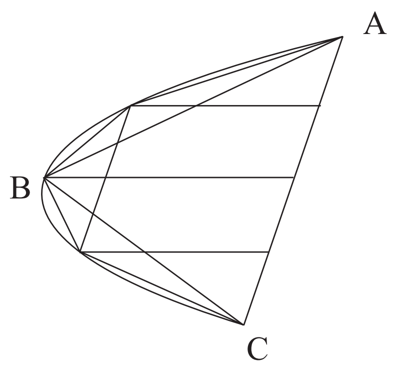

Figura 1.a: Aproximación por defecto

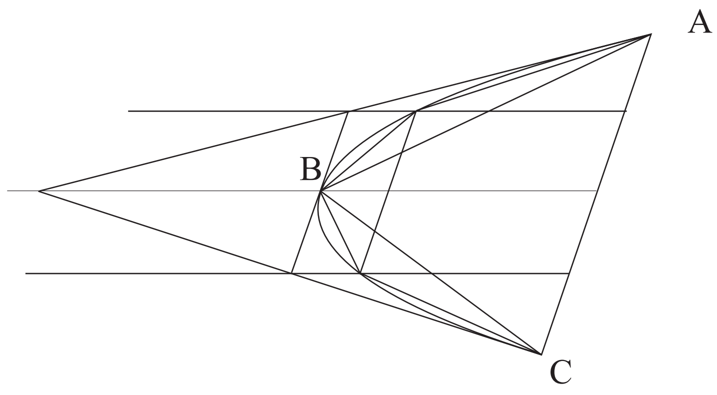

Figura 1.b: Aproximación por exceso

Aproxima, por defecto, el área del sector con la suma de las áreas de la familia de triángulos que tienen como base una cuerda de la parábola y como vértice el centro del arco correspondiente (ver figura 1.a)

Para aproximar por exceso, toma la suma de áreas de triángulos determinados por las tangentes a la parábola en los extremos de los arcos de la familia anterior (ver figura 1.b) Usando las relaciones entre las áreas de los triángulos de las dos familias obtiene estimaciones que le permiten usar el método de exhaución y demostrar su resultado. Las relaciones antes mencionadas muestran que Arquímedes tenía un profundo conocimiento de la parábola. Notemos que en esta prueba, Arquímedes utiliza la suma de una progresión geométrica y, según Fermat, es el único caso en que lo hace. En el resto de problemas que Arquímedes aborda utiliza la suma de una progresión aritmética.

En contraste, veamos cómo Fermat calcula la cuadratura de la parábola $y^q = x^p$, (con $p \neq q$) donde lo podemos apreciar como digno sucesor de Arquímedes encontrando un truco ingenioso *ad hoc*. Finalmente termina su argumento empleando el principio de exhaución. Supongamos que q es un número natural y p un entero tal que $p + q > 0$. Consideremos la progresión geométrica $x_0, x_0r, x_0r^2, x_0r^3, \ldots$. Una parábola generalizada convierte progresiones geométricas en progresiones geométricas, como se ve al calcular las ordenadas respectivas, las cuales están dadas por:

$$y_0 = x_0^{p/q}, y_1 = x_0^{p/q}r^{p/q}, y_2 = x_0^{p/q}r^{2p/q}, y_3 = x_0^{p/q}r^{3p/q}, \ldots.$$

Aproximando el área entre $x = 0$ y $x = x_0$, al modo del método de exhaución, con $r < 1$, tenemos una aproximación por defecto y otra

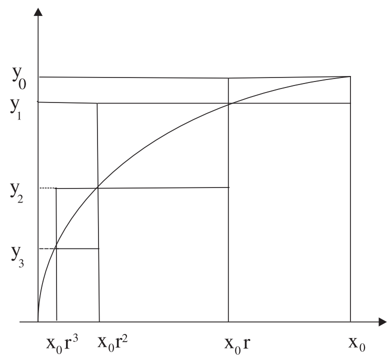

Figura 2: Parábola $y^2 = x$

por exceso dadas por

$$\sum (x_0 r^j - x_0 r^{j+1}) y_j \text{ y } \sum (x_0 r^j - x_0 r^{j+1}) y_{j+1}.$$

donde las sumas se están tomando desde 0 hasta ∞. Operando se obtiene que el área está comprendida entre

$$\begin{aligned} \sum (x_0 r^j - x_0 r^{j+1}) x_0^{p/q} r^{jp/q} &= x_0^{1+p/q}(1-r) \sum r^{j(1+p/q)} \\ &= \frac{1-r}{1-r^{(1+p/q)}} x_0^{1+p/q} \end{aligned}$$

y

$$\sum (x_0 r^j - x_0 r^{j+1}) x_0^{p/q} r^{(j+1)p/q} = \frac{(1-r)r^{p/q}}{1-r^{(1+p/q)}} x_0^{1+p/q},$$

que se obtiene en forma análoga.

Notemos que Fermat está usando la "suma total"de una progresión geomética de razón $r^{1+p/q} < 1$ (esto puesto que $r < 1$ y $1 + p/q > 0$).

Nos resta estudiar $(1-r)/1 - r^{(1+p/q)}$. Para simplificar la escritura, escribimos $r^{1+p/q} := s$. Entonces

$$\frac{1-r}{1-r^{(1+p/q)}} = \frac{1-r}{1-r^{p+q}} \cdot \frac{1-r^{p+q}}{1-r^{(1+p/q)}} = \frac{1+s+\cdots+s^{q-1}}{1+r+\cdots+r^{p+q-1}}$$

Finalmente, el área del sector está comprendida entre

$$\frac{1+s+\cdots+s^{q-1}}{1+r+\cdots+r^{p+q-1}} x_0^{1+p/q} \geq \mathcal{A} \geq \frac{r^{p/q}(1+s+\cdots+s^{q-1})}{1+r+\cdots+r^{p+q-1}} x_0^{1+p/q}.$$

Usando el método de exhaución se muestra que el área es:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1+p/q} x_0^{1+p/q}.$$

Podemos interpretar también este resultado en términos de límites. En efecto, tenemos que:

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1+s+\cdots+s^{q-1}}{1+r+\cdots+r^{p+q-1}} x_0^{1+p/q} = \lim_{r\to 1^-} \frac{r^{p/q}(1+s+\cdots+s^{q-1})}{1+r+\cdots+r^{p+q-1}} x_0^{1+p/q}$$

y ambos son iguales a:

$$\frac{1}{1+p/q} x_0^{1+p/q}.$$

Cuando $1+p/q<0$, tomamos $r>1$ y obtenemos el área del sector de "parábola"$y^q=x^p$ entre x_0 e ∞. Y, por supuesto, para $1+p/q=0$, ambas sumas, i. e. para $r<1$ y para $r>1$, divergen.

El resultado que Fermat obtiene es mucho más general que los obtenidos por otros matemáticos de la época como Cavalieri. Este último calcula cuadraturas específicas que requieren de razonamientos cada vez más complicadas. Aquellos matemáticos e historiadores que quieren ver en la fórmula

$$\int_0^{x_0} x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x_0^{\alpha+1},$$

(α un racional mayor que -1) un precursor del teorema fundamental del cálculo, olvidan que Fermat no tenía una definición de derivada.

3. Determinación de máximos/mínimos.

El método que utiliza Fermat, originalmete pensado para polinomios pero luego aplicado a funciones algebraicas más generales, se basa en la observación siguiente: *Si Z es el valor máximo o mínimo de una cantidad A entonces la ecuación $Z=A$ tiene una única raíz.* Pero en los problemas geómetricos que aborda, para cualquier valor de A distinto del máximo o del mínimo la ecuación algebraica tiene dos raíces. ¿ Qué pasa entonces con la otra raíz en el máximo o mínimo? La respuesta es que en el máximo (o mínimo) las dos coinciden , es decir, se trata de una raíz doble y el problema se transforma en encotrar la x que satisfaga esta condición algebraica.

Un cambio de notación nos permite replantear la condición con más claridad: Supongamos que la función $f(x)$ toma el mismo valor c en x y en $x+h$, entonces el problema consiste en encontrar el valor de x para el cual $h=0$ es raíz doble de la ecuación $f(x+h)-f(x)=0$, y para este x la función f tendrá un máximo o mínimo, siendo el contexto el encargado de discriminar entre los dos casos. Ahora bien, independientemente de x y de h, la ecuación en cuestión tiene como raíz $h = 0$. Luego, podemos reescribir la expresión de la izquierda como

$$f(x+h) - f(x) = hG(x,h).$$

y preguntarnos ahora, ¿ para qué valor de x se tiene $G(x,0) = 0$? Este valor de x nos da el extremo buscado.

Para llevar a cabo este análisis, sólo se requiere teoría de ecuaciones y álgebra elemental, y dar los pasos que siguen:

1. manipular algebraicamente la ecuación $f(x+h)-f(x) = 0$ hasta llevarla a la forma
$$hG(x,h) = 0.$$
2. despejar de la ecuación
$$G(x,0) = 0,$$

el valor x buscado. A continuación veremos dos ejemplos de Fermat al respecto.

3.1. Un primer ejemplo.

El primer ejemplo es *dividir un segmento dado en dos segmentos de manera que el área del rectángulo determinado por ellos tenga área máxima.*

Utilizando el método de Viète, Fermat escribe $AB = b$. Entonces el área del rectángulo determinado por cualquier punto del segmento está dada por $x(b-x) = bx - x^2$ y como la suma de las raíces de la ecuación $bx - x^2 = 0$ es igual a b, cuando se trata de una raíz doble x_0 se debe tener $x_0 = b/2$. Miremos ahora la resolución de este mismo problema utilizando la "regla de los dos pasos":

$$f(x+h) - f(x) = b(x+h) - (x+h)^2 - bx + x^2 = h(b - 2x - h),$$

es decir $G(x,h) = b - 2x - h$ y la solución de $G(x,0) = 0$ es, en efecto, $x_0 = b/2$. Este es un ejemplo muy sencillo donde pueden apreciarse la afirmación de Fermat. En efecto, la cantidad $bx - x^2 = c$ tiene, para c menor que el máximo, dos soluciones, excepto para $x = b/2$.

Su método le permitió resolver problemas mucho más complicados como la proposición 6 del Libro VII de la "Colección Matemática"de Pappus que, en traducción de Fermat, dice:

Dada la línea $BDEF$ en la cual los puntos B, D, E, F estás dados. Se busca el punto N entre D y E de manera que la razón entre el rectángulos BNF y DNE sea la menor posible.

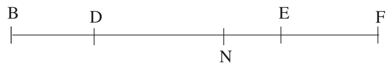

Figura 3: Proposición VII.6 de Pappus

3.2. Segundo ejemplo: La ley de Snell.

Desde la antigüedad se había observado que un rayo de luz cambia su dirección o se “quiebra”, cuando pasa de un medio óptico a otro. Tolomeo dió una ley que, para ángulos de incidencia pequeños, funciona aceptablemente. En 1621, el científico holandés Willebrod Snell (1591-1626) enunció, sin proporcionar ninguna argumentación a su favor, la ley que lleva su nombre:

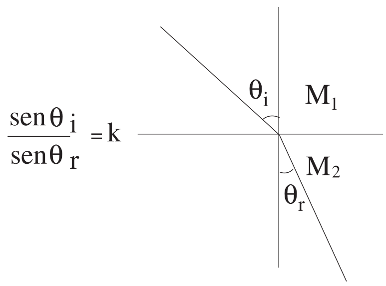

Figura 4: La ley de Snell

donde θ_i es el ángulo de incidencia, θ_r el ángulo de refracción y k una constante que sólo depende de los medios ópticos en cuestión.

Fermat enuncia su principio de “*mínimo tiempo*” que afirma: la luz al viajar de un punto a otro, atravesando uno o más medios ópticos, sigue la trayectoria que utiliza en su recorrido el menor tiempo posible. A partir de este principio prueba la Ley de Snell, planteando para ello un problema de mínimos al que aplica su método.

Esta es una de las pocas incursiones, si no la única, de Fermat en la física matemática y provocó la conocida controversia con Descartes. A continuación exponemos la solución al problema dada por Fermat.

Pensemos que el plano está constituído por dos medios ópticos delimitados por el eje de las x, que en el semi-plano superior la luz viaja a velocidad v_1 y en el inferion a velocidad v_2. Encontrar la trayectoria de menor tiempo (siguiendo los requisitos anteriores) para ir del punto $(0, a)$ (con $a > 0$) al punto (b, c), donde $c < 0$, equivale a encontrar en qué punto $(x, 0)$ nuestra trayectoria debe cruzar del eje de las abscisas (ver Figura 4). Si t_1 es el tiempo empleado en ir de $(0, a)$ a $(x, 0)$, y t_2 el tiempo que toma ir desde $(x, 0)$ a (b, c), claramente puede verse que:

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_2}.$$

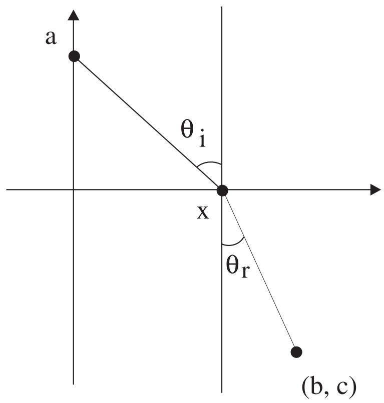

Figura 5:

Luego debemos encontrar las condiciones que deben satisfacerse para que la cantidad

$$d = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_2}$$

sea mínima. Esto sucede cuando la expresión

$$\left(\frac{\sqrt{(x+h)^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-(x+h))^2 + c^2}}{v_2}\right) - \left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_2}\right)$$

tiene, en h=0, una raíz doble.

Para dar el primer paso del método, "racionalizamosçada una de las fracciones y obtenemos,

$$0 = \frac{(\sqrt{(x+h)^2 + a^2} - \sqrt{x^2 + a^2})(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x+h)^2 + a^2})}{v_1(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x+h)^2 + a^2})} +$$

$$\frac{\left(\sqrt{(b-(x+h))^2+c^2}-\sqrt{(b-x)^2+c^2}\right)\left(\sqrt{(b-x)^2+c^2}+\sqrt{(b-(x+h))^2+c^2}\right)}{v_2(\sqrt{(b-x)^2+c^2}+\sqrt{(b-(x+h))^2+c^2})}$$

La expresión queda entonces

$$0=\frac{((x+h)^2+a^2)-(x^2+a^2)}{v_1(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(x+h)^2+a^2})}+\frac{((b-(x+h))^2+c^2)-((b-x)^2+c^2)}{v_2(\sqrt{(b-x)^2+c^2}+\sqrt{(b-(x+h))^2+c^2})},$$

y simplificando

$$h\left(\frac{2x+h}{v_1(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(x+h)^2+a^2})}-\frac{2b-x-h}{v_2(\sqrt{(b-x)^2+c^2}+\sqrt{(b-(x+h))^2+c^2})}\right)=0,$$

con lo que queda concluído el primer paso. Para dar el siguiente paso, en el segundo factor hacemos $h=0$ y obtenemos

$$\frac{2x}{v_1(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2+a^2})}-\frac{2(b-x)}{v_2(\sqrt{(b-x)^2+c^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2})}=0$$

o sea

$$\frac{x}{v_1(\sqrt{x^2+a^2})}=\frac{(b-x)}{v_2(\sqrt{(b-x)^2+c^2})}$$

Es decir

$$\frac{\mathrm{sen}\theta_1}{v_1}=\frac{\mathrm{sen}\theta_2}{v_2},$$

que claramente es equivalente a la ley de Snell. Notemos que el argumento nos dice que k es el cociente de las velocidades v_1 y v_2, lo que nos da un significado preciso de esta constante.

Para terminar con este ejemplo, apuntamos que este problema de optimización no pertenece a la tradición griega y fue resuelto por primera vez por Fermat usando su método. Posteriormente Fermat dió una prueba geométrica de este resultado, que no tiene ninguna virtud, ya que además de engorrosa no aporta ninguna luz al problema.

4. Trazado de tangentes.

4.1. La parábola.

Dice Fermat (ver [Ir]): "si, por ejemplo, consideramos la parábola BDN de vértice D, de diámetro DC, dado B un punto sobre ella, por el cual queremos trazar la recta BE tangente a la parábola y que encuentra el diámetro en E, entonces cuando tomamos sobre la recta BE un punto cualquiera O, se tendrá que $CD/CI > BC^2/OI^2$,

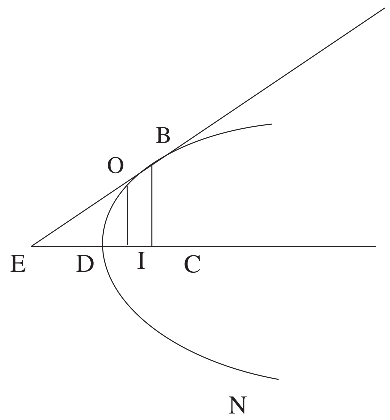

Figura 6: Parábola

puesto que O es exterior a la parábola. Por otra parte, por semejanza de triángulos, se tiene que: $BC^2/OI^2 = CE^2/IE^2$. Por consiguiente, $CD/CI > CE^2/IE^2$. Como el punto b es dado, así dados también están C y el segmento CD. Llamamos $CD = d$ y $CE = a$, $CI = e$. Se tiene entonces que

$$d/(d-e) > a^2/(a^2+e^2-2ae).$$

De donde $d(a^2+e^2-2ae) > (d-e)a^2$. Luego, *adigualando,* y cancelando términos semejantes obtenemos

$$de^2 - 2ade \quad Ad. \quad - ea^2,$$

o, lo que es lo mismo,

$$de^2 + ea^2 \quad Ad. \quad 2ade,$$

y dividiendo todos los términos por e,

$$de + a^2 \quad Ad. \quad 2ad.$$

Se suprime de; queda $a^2 = 2ad$, o bien $a = 2d$, lo *es conforme a la realidad.*

Fermat afirma que su método es general, pero Descartes dice que Fermat está utilizando un método que da un resultado verdadero en el único caso en que ello sucede. Y es que Descartes no quiere ver en la desigualdad $CD/CI > BC^2/OI^2$, que Fermat está usando las propiedades de la parábola y que cuando se cambie de curva habrá que cambiar la relación. Sólo tiempo después, a raíz del éxito de Fermat en resolver los retos que le propone y con el juicio de Desargues [1], Descartes acepta la calidad de su oponente. Descartes creyendo entonces que su método era general y que Fermat no tenía método alguno, lo reta a encontrar la tangente a la curva que tiene por ecuación $x^3 + y^3 = pxy$. Esta curva, cuya trayectoria no dibujan ni Fermat ni Descartes (es dibujada por Roberval quien la llama "lazo real"), es conocida como el "folio de Descartes".

5. Conclusiones.

5.1. ¿Qué es el cálculo diferencial e integral.

En una primera aproximación podríamos decir que el Cálculo es el método que usa cantidades infinitamente pequeñas o ideas similares en Geometría. Sin embargo, no podemos discutir los antecedentes del Cálculo sin antes aclarar con más detalle qué entendemos por éste.

Parecería que en ello no hay problema, pero la idea que se tiene del Cálculo ha ido alterada con el desarrollo de las Matemáticas. Esto ha traído como consecuencia serios cambios, no siempre para bien, en los programas de estudio y en los textos de la materia, introduciendo en forma estríctamente rigurosa y formal, ideas y conceptos cuyo estudio matemático y formalización es posterior al Cálculo en casi un siglo. Ejemplos de ello son los conceptos de límite, continuidad, integral de Riemann o convergencia de series y sucesiones, así como la idea misma de función.

Por supuesto, no negamos la relevancia de ellos, pero en los años del nacimiento del Cálculo se manejaron en forma implícita e intuitiva, y, hasta cierto punto, con inocencia y dando por hecho que tenían el mejor de los comportamientos. Pero son estas características las que le permiten tener el éxito que tuvo en el tratamiento y solución de los problemas que atacó, lo que también le dio, no sólo, confianza en sus métodos sino también familiaridad en su uso, punto importante sobre todo porque el Cálculo se desarrolla y crea a la par de sus aplicaciones, unas veces precediendo a la teoría y otras inmediatamente después de ésta.

Los problemas de determinación de tangentes y de cuadraturas cambian radicalmente con las nociones de derivada e integral y el Teorema

[1] Descartes pide a Desargues que funja como juez de la controversia y, después de estudiar los argumentos, éste concluye que "M. Descartes tiene razón, M. Fermat no está equivocado", ver [M].

Fundamental del Cálculo, que pone de manifiesto que se trata de problemas inversos. Consecuencia de ello es que para calcular un área ya no tenemos que recurrir al método de exhaución, al principio de Cavalieri, o ideas similares, sino que ahora el problema queda resuelto, y de manera radicalmente diferente, con el cálculo de una antiderivada.

En esta problemática, la idea central es la de derivada, la cual tiene características novedosas pues ésta como todos sabemos está definida como el límite del cociente de dos cantidades que tienden a cero, dándonos así la razón de cambio puntual. Esta razón de cambio puede significar la velocidad (instantánea), densidad y muchas otras cosas más con fuerte contenido físico, que es lo que le da su versatilidad en las aplicaciones. Pero el que esté definida como el límite de un cociente de dos cantidades que tienden a cero causó polémica desde el primer momento, lo cual no impidió que momento a momento se usase más y más. Es a través de la noción de derivada que los problemas de la nueva física se reducen a relaciones entre estas funciones "derivadas" y la función original dando lugar a una ecuación diferencial o sencillamente a una antiderivada o, más simple aún, a la evaluación de la derivada en un punto dado. La derivada permite aglutinar y aclarar una buena cantidad de métodos diversos para resolver distintos problemas: trazado de tangentes, cálculos de máximos y mínimos, cálculo de longitudes, áreas y volúmenes así como la determinación de centros de gravedad. En el caso del cálculo de longitudes, áreas y volúmenes ya no es necesario recurrir a las aproximaciones ad hoc, reduciéndose al cálculo de una antiderivada, método realmente revolucionario.

5.2. Precursor ¿en qué sentido?

Fermat se interesa en resolver estos problemas y los aborda usando las técnicas introducidas por F. Viète en el Arte Analítico y, posiblemente es, en este sentido, el primer "analista", y un iniciador del camino analítico dentro de las Matemáticas. Su influencia entre sus contemporáneos es suficientemente amplia como para que Newton hubiese dicho que algunas de sus primeras ideas sobre el trazado de tangentes a curvas y el estudio de máximos y mínimos provenían directamente de Fermat [Si].

Como matemático interesado principalmente en resolver problemas, Fermat no está dispuesto a perder un método que se justifica por su eficiencia. Esto no quiere decir que ignore o menosprecie la teoría y él mismo afirma que "sus métodos son tan certeros como la primera proposición de los Elementos (de Euclides)"[M], pero no es su principal interés. Fermat hace teoría porque la confrontación con los otros matemáticos de su época así se lo exige. Y, sin lugar a dudas, en esta confrontación, Fermat aprende mucho más que Descartes. Con la lectura de la Geometría, y sus reflexiones, el método se refina y se enriquece.

El fenómemo de *presentismo* (i.e. interpretar el conocimiento de una época con los ojos, ideas, métodos y teoría del presente) aunado a la tendencia natural de interpretar la lectura de textos ajenos con lo que nosotros ya sabemos, con gran frecuencia lleva a ver en Fermat un precursor del Cálculo y sus ideas, por ejemplo, encontrando pasos al límite o cocientes diferenciales donde no los hay. Este es un fenómeno que con Fermat se repite desde su época (ver Huygens). Si queremos ver a Fermat como un precursor del Cálculo nos tenemos que restringir por un lado, a la problemática que aborda y que comparte con muchos otros, y por el otro a la utilización del método de Viète, el cual lleva aparejado la introducción de la geometría analítica. Ésta es un requisito para el desarrollo del Cálculo pero que no puede confundirse con éste.

Referencias

[Ir] D. Bessot, et al *Aux Origines du calcul infinitésimal.* Commission inter-IREM, Épistémologie et Histoire des Mathématiques, Ellipsis,1999.

[M] M. S. Mahoney, *The Mathematical career of Pierre de Fermat.* Second Ed., Princeton University Press, Pinceton, N.J., 1994.

[Si] F Simmons, *Ecuaciones Diferenciales.* McGraw-Hill, México, 1977.

[St] D. J. Struik, (Editor) *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Harvard University Press, Cambridge, Ma. 1969.