

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7503>

# El problema de las jaulas y los polígonos generalizados

Diego González-Moreno

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas  
UAM - Cuajimalpa  
dgonzalez@cua.uam.mx

## 1. Introducción y definiciones básicas

El principal objetivo de este trabajo es mostrar la relación que existe entre las  $(k; g)$ -jaulas y las geometrías finitas, y como podemos utilizar los resultados de la geometría para construir familias de gráficas que cumplen interesantes propiedades. Estas construcciones tienen como consecuencia la obtención de cotas superiores para una familia de gráficas muy estudiada: las  $(k; g)$ -jaulas.

Comenzamos dando una serie de definiciones que serán necesarias para seguir este texto. Una *gráfica*  $G$  es un par  $(V(G), E(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto finito y diferente del vacío de objetos llamados *vértices* y  $E(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de  $V(G)$  llamados *aristas*. Las gráficas se pueden representar a través de diagramas, esto se hace dibujando a los vértices como puntos y a las aristas por medio de líneas que unen dichos puntos.

Dos vértices  $u, v \in V(G)$  son *adyacentes* si la pareja  $(u, v)$  es una arista de  $G$ , por comodidad, utilizamos  $uv$  para denotar a la arista  $(u, v)$ . Un conjunto de vértices es *independiente* si no hay aristas entre sus vértices. Al número de vértices de la gráfica se le conoce como el *orden*. El *grado de un vértice*  $v$  es el número de aristas que inciden en él y se denota por  $d(v)$ . Si  $d(v) = k$  para todo  $v \in V(G)$ , decimos que  $G$  es  *$k$ -regular*. Al conjunto de vértices adyacentes a  $v$  se le conoce como la *vecindad de  $v$*  y se denota por  $N(v)$ .

Una *trayectoria*  $T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  es una sucesión finita de vértices distintos tales que  $v_i v_{i+1} \in E(G)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . La *longitud de una trayectoria* es el número de aristas que utiliza. Un *ciclo*  $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , con  $n \geq 3$ , es una *trayectoria* donde  $v_1 = v_n$ . Si

el ciclo tiene longitud  $n$  lo denotamos por  $C_n$ . El  *cuello*  de una gráfica  $G$  es la longitud del ciclo más pequeño de  $G$ . Sea  $S \subset V(G)$ , dado  $v \in V(G)$ , una  $(v, S)$ -trayectoria es una  $uv$ -trayectoria donde  $v \in S$ . La  *distancia de  $v$  a  $S$*  es la mínima longitud de una  $(v, S)$ -trayectoria.

Un  *árbol*  es una gráfica conexa y sin ciclos. Una gráfica de orden  $n$  es  *completa*  si para todo  $v \in V(G)$  se cumple que  $d(v) = n - 1$ . A la gráfica completa de orden  $n$  la denotamos por  $K_n$ . Una gráfica  $G$  es  *bipartita*  si existe una partición de  $V(G)$  en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tal que toda arista de  $G$  tiene un extremo en  $V_1$  y el otro extremo en  $V_2$ . Y  $G$  es  *bipartita completa*  si todo vértice en  $V_1$  es adyacente a todo vértice en  $V_2$ .

Este trabajo esta organizado de la siguiente forma. En la siguiente sección estudiaremos a las jaulas y algunos problemas relacionados. Luego veremos un poco de estructuras de incidencia, de los polígonos generalizados y de cómo estos se pueden estudiar a través de una gráfica. Finalmente daremos una construcción que utiliza la existencia de los polígonos generalizados para poder acotar el orden de una jaula.

## 2. Jaulas

Durante el Coloquio Húngaro de Teoría de las Gráficas de 1959, Kártész [11], haciendo notar que la gráfica de Petersen (véase la figura 1) era la gráfica 3-regular con cuello 5 más pequeña que hay, propuso el siguiente problema: determinar el número de vértices que tiene la gráfica  $k$ -regular con cuello  $g$  más pequeña que hay<sup>1</sup>.

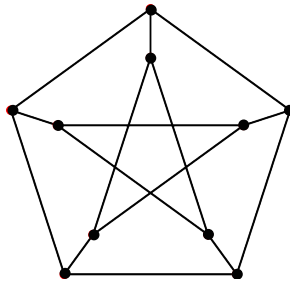


Figura 1. La gráfica de Petersen.

A una gráfica  $k$ -regular con cuello  $g$  se le conoce como  $(k; g)$ -gráfica y a una  $(k; g)$ -gráfica con el menor orden posible se le llama  $(k; g)$ -jaula. Entonces, el problema propuesto por de Kártész es encontrar el orden

<sup>1</sup>Anteriormente Tutte [16] estudió un problema similar, gráficas 3-regulares con cuello  $g$  y transitivas.

de una  $(k; g)$ -jaula, al cual denotaremos con  $\nu(k; g)$ . A este problema se le conoce como *El problema de la jaula*.

Una pregunta muy relacionada con este problema es ¿para qué valores de  $k$  y  $g$  existe una  $(k; g)$ -jaula? El primero en responderla fue Sachs [14], quien dio una forma de construir  $(k; g)$ -gráficas. Poco tiempo después, el mismo Sachs junto con Erdős [7] dieron una demostración no constructiva de la existencia de las  $(k; g)$ -jaulas y obtienen una cota superior para  $\nu(k; g)$ .

**Teorema 2.1** (Erdős y Sachs, 1963). *Sean  $k \geq 2$  y  $g \geq 3$  dos enteros, entonces*

$$\nu(k; g) \leq 4 \sum_{i=1}^{g-2} (k-1)^i.$$

Ha habido un enorme esfuerzo por encontrar  $(k; g)$ -jaulas y a pesar de esto hasta el momento hay pocas conocidas. Hay algunos valores de  $k$  y  $g$  para los que se conoce  $\nu(k; g)$ . Por ejemplo, no es difícil ver que las  $(2; g)$ -jaulas son los ciclos de longitud  $g$  y por lo tanto  $\nu(2; g) = g$ . Cuando  $g = 3$ , la gráfica completa con  $k + 1$  vértices es la  $(k; 3)$ -jaula, por lo tanto  $\nu(k; 3) = k + 1$ . Si  $g = 4$ , la gráfica completa bipartita  $K_{k,k}$  es la  $(k; 4)$ -jaula e implica que  $\nu(k; 4) = 2k$ .

Respecto a propiedades que satisface el orden de una jaula, Fu, Huang y Rodger [10] probaron que  $\nu(k; g)$  es una función monótona respecto al cuello. Esto quiere decir que si  $k, g_1$  y  $g_2$  son enteros tales que  $3 \leq k \leq g_1 < g_2$ , entonces

$$\nu(k; g_1) < \nu(k; g_2). \tag{1}$$

En el cuadro 1 se muestra una lista con las cotas superiores para algunos valores de  $\nu(k; g)$ . Cuando el número está escrito en negritas quiere decir que el valor es exacto. Para saber más sobre los valores conocidos de  $\nu(k; g)$  recomendamos ver el trabajo escrito por Exoo y Jajcay [8].

### 2.1 La cota de Moore

Aunque determinar el valor de  $\nu(k; g)$  es un problema muy complicado se puede dar una cota inferior de una forma no muy difícil.

**Teorema 2.2.** *Sean  $k \geq 2$  y  $g \geq 3$  enteros. Entonces*

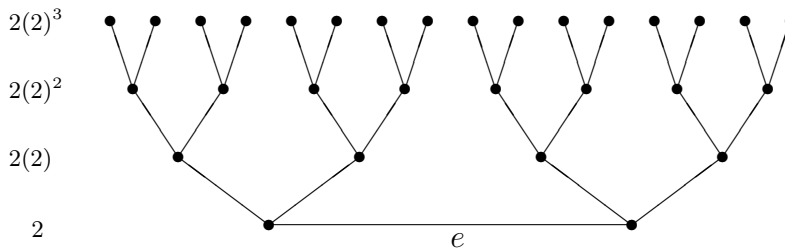
$$\nu(k; g) \geq \nu_0(k; g) = \begin{cases} \frac{2(k-1)^{\frac{g}{2}} - 2}{k-2} & \text{si } g \text{ es par,} \\ \frac{k(k-1)^{\frac{g-1}{2}} - 2}{k-2} & \text{si } g \text{ es impar.} \end{cases} \tag{2}$$

$k/g$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	<b>10</b>	<b>14</b>	<b>24</b>	<b>30</b>	<b>58</b>	<b>70</b>	<b>112</b>	<b>126</b>	272	384	620
4	<b>19</b>	<b>26</b>	<b>67</b>	<b>80</b>	275	384		<b>728</b>			
5	<b>30</b>	<b>42</b>	152	<b>170</b>		1296	2688	<b>2730</b>			
6	<b>40</b>	<b>62</b>	294	<b>312</b>				<b>7812</b>			
7	<b>50</b>	<b>90</b>		672				32928			
8	80	<b>114</b>	778	<b>800</b>				<b>39216</b>			
9	96	<b>146</b>	1145	<b>1170</b>			74752	<b>74898</b>			
10	124	<b>1820</b>	1612	<b>1640</b>				<b>132860</b>			
11	154	240		2618				319440			
12	203	<b>266</b>	2894	<b>2928</b>				<b>354312</b>			
13	230	336		4342				739192			
14	288	<b>366</b>		<b>4760</b>				<b>804468</b>			
15	312	462		7648				1957376			

**Cuadro 1.** Cotas superiores para  $\nu(k; g)$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una  $(k; g)$ -jaula. Primero, supongamos que  $g$  es par y consideremos una arista  $e \in E(G)$ . El conjunto de vértices que están a distancia a lo más  $g/2 - 1$  de la arista  $e$  induce un árbol en  $G$  (en caso contrario  $G$  tendría un ciclo de longitud menor a  $g$ , véase la figura 2). Así

$$\begin{aligned}
 |V(G)| &\geq 2(1 + (k - 1) + (k - 1)^2 + \dots + (k - 1)^{g/2-1}) \\
 &= 2 \sum_{i=0}^{g/2-1} (k - 1)^i = \frac{2(k - 1)^{\frac{g}{2}} - 2}{k - 2}.
 \end{aligned}$$

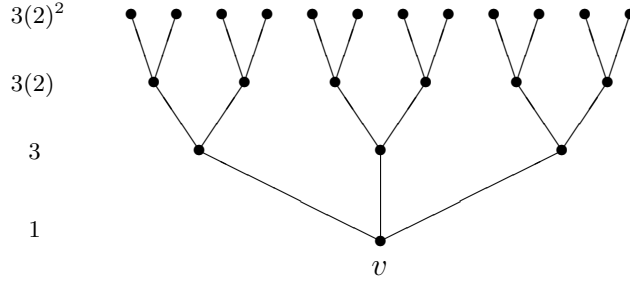


**Figura 2.** Gráfica inducida por los vértices a distancia a lo más  $8/2 - 1$  de la arista  $e$  en una  $(3; 8)$ -jaula.

En el caso que  $g$  sea impar, consideremos un vértice  $v \in V(G)$  y al conjunto de vértices que están a distancia a lo más  $(g - 1)/2$  de  $v$  (véase la figura 3). Al igual que en el caso anterior, este conjunto de vértices

induce un árbol en  $G$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 |V(G)| &\geq 1 + k + k(k-1) + k(k-1)^2 + \dots + (k-1)^{(g-3)/2} \\
 &= 1 + k \sum_{i=0}^{(g-3)/2} (k-1)^i = \frac{k(k-1)^{\frac{g-1}{2}} - 2}{k-2}. \quad \square
 \end{aligned}$$



**Figura 3.** Gráfica inducida por los vértices a distancia a lo más  $(7-1)/2$  del vértice  $v$  en una  $(3;7)$ -jaula.

La cota que acabamos de obtener y denotamos por  $\nu_0(k;g)$  se le conoce como la *cota de Moore*. El caso en el que  $\nu(k;g) = \nu_0(k;g)$ , se dice que la  $(k;g)$ -jaula es una *gráfica de Moore* o una *jaula de Moore*. Hay mucha literatura acerca de las gráficas de Moore. Se sabe que si  $k \geq 3$ , entonces existe una gráfica de Moore solo para  $g \in \{3, 4, 5, 6, 8, 12\}$ . Para mayor información sobre gráficas de Moore se puede leer el trabajo de Miller y Sirán [13].

La existencia de una gráfica de Moore no es muy común. En 1973, Bannai e Ito [3] y Damerell [5] establecen condiciones para determinar la existencia de una jaula de Moore. En el siguiente teorema se resumen las condiciones encontradas.

**Teorema 2.3.** *Existe una  $(k;g)$ -jaula de Moore si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. Si  $k = 2$  y  $g \geq 3$  (ciclos).
2. Si  $g = 3$  y  $k \geq 2$  (gráficas completas).
3. Si  $g = 4$  y  $k \geq 2$  (gráficas bipartitas completas).
4. Si  $g = 5$  y  $k = 3$  (gráfica de Petersen),  $k = 7$  (gráfica de Hoffman-Singleton), y quizá  $k = 57$ .
5. Si  $g \in \{6, 8, 12\}$  y existe un  $n$ -ágono generalizado de orden  $k-1$ .

De acuerdo con el inciso 5 del teorema anterior, quitando los ciclos, la gráfica completa y las bipartitas completas, la existencia de una  $(k;g)$ -jaula de Moore con cuello par está relacionada con la existencia de un polígono generalizado, que es un caso particular de las geometrías finitas.

### 3. Estructuras de incidencia, gráficas y polígonos generalizados

Una *estructura de incidencia* es una tripleta  $\psi = (P, L, I)$  en la cual  $P$  y  $L$  son conjuntos distintos del vacío tales que  $P \cap L = \emptyset$ , e  $I \subset P \times L$  es una relación entre los elementos de  $P$  y  $L$ .

Estas estructuras se estudian principalmente en contextos geométricos, así que pensemos a  $P$  como un conjunto de puntos y a  $L$  como un conjunto de líneas, mientras que  $I$  será una relación de incidencia entre los puntos y las líneas. En este trabajo solo vamos a considerar estructuras de incidencia finitas, es decir, en la cuales  $P$  y  $L$  tienen cardinalidad finita.

Cuando se estudian este tipo de estructuras es común pedirles que satisfagan las siguientes propiedades.

- Dos puntos distintos son incidentes en a lo más una línea.
- Dos líneas comparten a lo más un solo punto.

A una estructura de incidencia que satisface estos dos axiomas se le conoce como *espacio lineal parcial*.

A toda estructura de incidencia  $\psi = (P, L, I)$  se le puede asociar una gráfica bipartita, a la cual denotaremos por  $G_\psi$ . Colocamos un vértice por cada elemento en  $P \cup L$  y dos vértices  $p$  y  $l$  serán adyacentes si y solo si  $p \in P$ ,  $l \in L$  y  $(p, l) \in I$ . A esta gráfica bipartita se le conoce como la *gráfica de incidencia de  $\psi$*  o la *gráfica de Levi*, en honor a Levi, quien fue el primero en asociarle esta gráfica a una estructura de incidencia.

Los polígonos generalizados son un caso especial de estructuras de incidencia. Fueron definidos por Tits [15] en 1959, quien lo utilizó como una herramienta para el estudio de ciertas configuraciones de puntos. Aquí daremos una definición equivalente a la dada por Tits, la cual considera algunas propiedades de la gráfica de incidencia.

**Definición 3.1.** Sea  $n \geq 3$  y  $s, t \geq 1$  números enteros. Una estructura de incidencia  $\psi$  es un  *$n$ -ágono generalizado* de orden  $(s, t)$  si cumple los axiomas.

- Todo punto es incidente con  $s + 1$  líneas.
- Toda línea es incidente con  $t + 1$  puntos.
- El diámetro de la gráfica de incidencia  $G_\psi$  es  $n$ .
- El cuello de la  $G_\psi$  es  $2n$ .

Si  $s = t$  decimos que  $\psi$  es un  *$n$ -ágono generalizado regular de orden  $s$*  o *polígono generalizado regular de orden  $s$* . Feit y Higman [9] probaron que un  $n$ -ágono generalizado existe solo cuando  $n \in \{3, 4, 6, 8\}$ ,

y un  $n$ -ágono generalizado regular cuando  $n \in \{3, 4, 6\}$ . Además probaron que si  $q$  es la potencia de un número primo, entonces existe un  $n$ -ágono generalizado regular de orden  $q$  para  $n \in \{3, 4, 6\}$ . A los 3-ágonos generalizados se les conoce como *planos proyectivos*, los 4-ágonos generalizados son los *cuadrángulos generalizados* y a los 6-ágonos generalizados se les llama *hexágonos generalizados*.

Ahora, si consideramos la gráfica de incidencia  $G_\psi$  de un  $n$ -ágono generalizado  $\psi$  de orden  $(s, t)$ , esta va a ser una gráfica bipartita en la cual  $d(p) = s + 1$ , para todo  $p \in P$  y  $d(\ell) = t + 1$ , para toda  $\ell \in L$ . Además, si  $\psi$  es regular ( $s = t$ ), entonces  $G_\psi$  será una gráfica  $(s + 1)$ -regular con cuello  $2n$ , es decir, una  $(s + 1, 2n)$ -gráfica. En el caso de los polígonos regulares  $\psi$ , se puede probar que el orden de  $G_\psi$  coincide con la cota de Moore (ecuación (2)). Entonces, utilizando el resultado de Feit y Higman sobre la existencia de  $n$ -ágonos regulares, tenemos que si  $k - 1$  es la potencia de un número primo, entonces la gráfica de incidencia de  $\psi$  es una  $(k; 2n)$ -jaula para  $n \in \{3, 4, 6\}$ .

En la figura 4 se muestra un 3-ágono generalizado de orden 2 (o plano proyectivo) y su gráfica de incidencia. Este polígono regular se conoce como el plano de Fano, y es el 3-ágono generalizado más pequeño que existe. Se puede ver que todo punto pertenece a tres líneas, cada línea contiene tres puntos. Además, la gráfica de incidencia tiene el diámetro tres y cuello 6. A esta gráfica se le conoce como la gráfica de Heawood, la cual se puede ver que es una es una  $(3; 6)$ -jaula, ya que alcanza la cota de Moore.

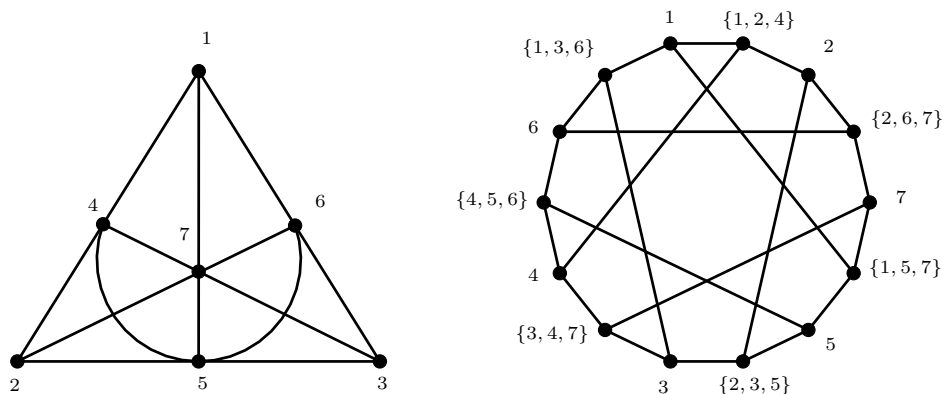


Figura 4. El plano de Fano y su gráfica de incidencia.

#### 4. Construcciones de $(k; g)$ -gráficas

Veamos una técnica para generar  $(k; g)$ -gráficas con  $g \in \{6, 8, 12\}$ . Este método se basa en la existencia de polígonos generalizados regulares de orden la potencia de un número primo. Estas ideas aparecen en [1] y tienen el mismo espíritu que las utilizadas por Brown [4] para  $g = 6$  y por Balbuena, Marcote y Pelayo [12] para  $g = 8$ .

Sea  $g \in \{6, 8, 12\}$  y  $k \geq 3$ . Si  $k - 1$  es la potencia de un primo, de acuerdo a lo visto anteriormente, podemos construir una  $(k; g)$ -jaula de Moore, la cual es la gráfica de incidencia de un  $n$ -ágono generalizado de orden  $k - 1$  con  $n \in \{3, 4, 6\}$ .

Supongamos ahora que  $k - 1$  no es la potencia de un primo. Sea  $q$  la menor potencia de un primo tal que  $q \geq k$ . Sabemos por el resultado de Feit y Higman que existe un polígono generalizado regular  $\psi$  de orden  $q$ . Considera la gráfica de incidencia  $G_\psi$ . Sabemos que el orden de esta gráfica es  $\nu_0(q + 1, g)$  y por lo tanto  $G_\psi$  es una  $(q + 1; g)$ -jaula de Moore.

Dada una arista  $e = xy$  de  $G_\psi$  y para cada entero  $i \geq 0$  sea

$$N_i(e) = \{z \in V(G) \mid d(\{x, y\}, z) = i\},$$

es decir,  $N_i(e)$  es el conjunto de vértices a distancia  $i$  de la arista  $e$ .

Observa que el conjunto de vértices a distancia  $\ell \leq (g - 2)/2$  de la arista  $e$  no tiene ciclos y es conexo, entonces es un árbol (véase la figura 5). Por lo tanto

$$|N_i(e)| = 2q^i,$$

para  $i \in \{0, 1, \dots, (g - 2)/2\}$ . Además, como

$$|V(G_\psi)| = \nu_0(q + 1; g) = 2 \sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} q^i,$$

tenemos que

$$V(G_\psi) = \bigcup_{0 \leq i \leq \frac{g-2}{2}} N_i(e).$$

Esto implica que la subgráfica de  $G_\psi$  inducida por el conjunto  $N_{\frac{g-2}{2}}(e)$  es una gráfica  $q$ -regular.

Supongamos que

$$N(x) \setminus \{y\} = \{x_1, x_2, \dots, x_q\} \text{ y } N(y) \setminus \{x\} = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}.$$

Para cada  $1 \leq i \leq q$ , definimos los conjuntos

$$\mathcal{B}(x_i) = \left\{ z \in N_{\frac{g-2}{2}}(e) \mid d(x_i, z) = \frac{g-4}{2} \right\}$$



y

$$\mathcal{B}(y_i) = \left\{ z \in N_{\frac{g-2}{2}}(e) \mid d(y_i, z) = \frac{g-4}{2} \right\}.$$

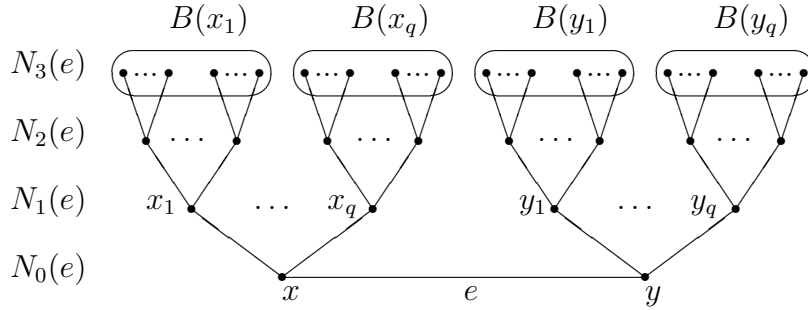
Como para cada vértice  $z \in N_{\frac{g-2}{2}}(e)$  existe, en  $G_\psi$ , exactamente una  $(\{x, y\}, z)$ -trayectoria de longitud  $(g-2)/2$ . Entonces el conjunto

$$\{\mathcal{B}(x_1), \dots, \mathcal{B}(x_q), \mathcal{B}(y_1), \dots, \mathcal{B}(y_q)\}$$

es una partición de  $N_{\frac{g-2}{2}}(e)$ . Además tenemos que

$$|\mathcal{B}(x_i)| = |\mathcal{B}(y_i)| = q^{(g-4)/2}, i \in \{1, 2, \dots, q\}.$$

Observa que si existe una arista entre dos vértices de  $U = \mathcal{B}(x_1) \cup \dots \cup \mathcal{B}(x_q)$ , entonces  $G$  tendría un ciclo de longitud a lo más  $g-1$ . Por lo tanto  $U$  es un conjunto independiente. De forma similar se puede ver que  $W = \mathcal{B}(y_1) \cup \dots \cup \mathcal{B}(y_q)$  es otro conjunto independiente. Por otra parte, un vértice en  $\mathcal{B}(x_i)$  puede ser adyacente a lo más a un vértice en  $\mathcal{B}(y_j)$ , de otra manera  $G_\psi$  tendría un ciclo de longitud menor a  $g$ . Como la gráfica inducida por  $U \cup W = N_{\frac{g-2}{2}}(e)$  es  $q$ -regular, las observaciones que acabamos de hacer, se sigue que la subgráfica inducida por  $\mathcal{B}(x_i) \cup \mathcal{B}(y_j)$ , con  $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$ , es un emparejamiento, es decir, una gráfica 1-regular.



**Figura 5.** Gráfica inducida por los vértices a distancia a lo más 3 de la arista  $e$  en una  $(q+1; 8)$ -jaula.

Ahora, para cada  $1 \leq k \leq q$  sea  $G_k$  la subgráfica de  $G_\psi$  inducida por  $\bigcup_{i=1}^k (\mathcal{B}(x_i) \cup \mathcal{B}(y_i))$ .

Por las observaciones anteriores tenemos que  $G_k$  es una gráfica  $k$ -regular con cuello  $g(G_k) \geq g$  y orden  $2kq^{(g-4)/2}$ . Utilizando la monotonía del orden respecto al cuello, tenemos que

$$\nu(k; g) \leq 2kq^{(g-4)/2}.$$

Para dar una forma más concreta de la cota de una  $(k; g)$ -jaula, utilizamos el siguiente resultado de Dusart [6] sobre la existencia de números primos en intervalos de enteros.

Sea  $k$  un entero. Si  $6 \leq k \leq 3276$ , entonces el intervalo  $[k, 7k/6]$  contiene un número primo. Si  $k \geq 3275$ , el intervalo  $[k, k(1 + \frac{1}{2\ln^2(k)})]$  contiene un número primo.

Utilizando este resultado podemos acotar el valor de  $q$  y dar una cota para el problema de la  $(k; g)$ -jaula en términos de  $k$ .

**Teorema 4.1.** [1] Sea  $g \in \{6, 8, 12\}$  y  $k \geq 3$ . Sea  $q$  la menor potencia de un número primo tal que  $q \geq k$ .

$$\nu(k; g) \leq \begin{cases} 2k(k-1)^{\frac{g-4}{2}} \left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{g-4}{2}} & \text{si } 7 \leq k \leq 3275, \\ 2k(k-1)^{\frac{g-4}{2}} \left(1 + \frac{1}{\ln^2(k)}\right)^{\frac{g-4}{2}} & \text{si } k \geq 3276. \end{cases}$$

La construcción que presentamos en esta sección y que da lugar al teorema anterior pertenece a un tipo de construcciones que utilizan un proceso conocido como el método de escisión. De forma muy general este método se explica de la siguiente manera: si  $G$  es una  $(k; g)$ -gráfica y  $H$  es una subgráfica de  $G$  cuyos vértices tienen grado 1 o  $k$ , entonces al eliminar de  $G$  los vértices de  $H$  obtenemos una nueva gráfica cuyos vértices tienen grado  $k-1$  o  $k$ . El objetivo es agregar aristas entre los vértices de grado  $k-1$  de forma que el cuello de la gráfica resultante sea  $g$ , con esto se obtiene una  $(k; g)$ -gráfica con menos vértices que  $G$ . Utilizando este método Balaban [2] construyó la  $(3; 11)$ -jaula a partir de la  $(3; 12)$ -jaula, la cual es la gráfica de incidencia de un hexágono generalizado.

## Bibliografía

- [1] G. Araujo, D. González, J. Montellano-Ballesteros y O. Serra, «On upper bounds and connectivity of cages», *Australas. J. Combin.*, núm. 38, 2007, 221–228.
- [2] A. T. Balaban, «Trivalent graphs of girth nine and eleven, and relationships among cages», *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, núm. 18, 1973, 1033–1043.
- [3] E. Bannai y T. Ito, «On finite moore graphs», *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.*, núm. 20, 1973, 191–208.
- [4] W. G. Brown, «On Hamiltonian regular graphs of girth 6», *J. London Math. Soc.*, núm. 42, 1967, 514–520, <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-42.1.514>.
- [5] R. M. Damerell, «On Moore graphs», *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, núm. 74, 1973, 227–236, <https://doi.org/10.1017/S0305004100048015>.
- [6] P. Dusart, «The  $k^{\text{th}}$  prime is greater than  $k(\ln k + \ln \ln k - 1)$  for  $k \geq 2$ », *Math Comp.*, núm. 68, 1999, 411–415, <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01037-6>.
- [7] P. Erdős y H. Sachs, «Reguläre graphen gegebener taillenweite mit minimaler knotenzahl», *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle- Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, núm. 12, 1963, 251–257.

- [8] G. Exco y R. J. Jajcay, «Dynamic cage survey», *The Electronic Journal of Combinatorics DS14*, 2013, 1–55, <https://doi.org/10.37236/37>.
- [9] W. Feit y G. Higman, «The non-existence of certain generalized polygons», *J. Algebra*, núm. 1, 1964, 114–131, [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(64\)90028-6](https://doi.org/10.1016/0021-8693(64)90028-6).
- [10] H. Fu, K. Huang y C. A. Rodger, «Connectivity of cages», *J. Graph Theory*, núm. 24, 1997, 187–191, [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199702\)24:2<187::AID-JGT6>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199702)24:2<187::AID-JGT6>3.0.CO;2-M).
- [11] F. Kárteszi, «Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di minimo», *Boll.Un. Mat. Ital.*, núm. 3, 1960, 522–528.
- [12] X. Marcote, C. Balbuena y I. Pelayo, «On the connectivity of cages of girth five, six and eight», *Discrete Math.*, vol. 307, núm. 11-12, 2007, 1441–1446, <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.082>.
- [13] M. Miller y J. Sirán, « Moore Graphs and Beyond: A survey of the Degree/Diameter Problem», *The Electronic Journal of Combinatorics DS16*, 2013, 1–92, <https://doi.org/10.37236/35>.
- [14] H. Sachs, «Regular graphs with given girth and restricted circuits», *Journal of the London Mathematical Society*, núm. 31-38, 1963, 423–429, <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-38.1.423>.
- [15] J. Tits, «Sur la trivalit e et certains groupes qui s'en d'eduisent», *Inst. Hautes Études, Sci.Publ. Math.*, núm. 2, 1959, 13–60.
- [16] W. T. Tutte, «A family of cubical graphs», *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1947, 459–474, <https://doi.org/10.1017/S0305004100023720>.