Problemas de estabilidad en la mecánica celeste

Carlos Perelló*

El problema de la mecánica celeste consiste en estudiar el movimiento de cuerpos pesados bajo la influencia de sus atracciones gravitacionales mutuas. Excepto en casos particulares simples, dicho problema está muy lejos de ser resuelto en forma satisfactoria.

Supongamos que tenemos m partículas en R^3, el espacio euclidiano real de dimensión tres. Para conocer la posición del sistema en un momento dado necesitaremos dar tres números reales —las coordenadas— para cada una de las partículas. Esto nos sugiere el substituir las m partículas por una sola en R^{3m}, las $3m$ coordenadas, en función del tiempo nos dan la evolución de la configuración del conjunto de partículas. Sin embargo, no basta el conocimiento de la posición inicial del sistema para determinar la evolución del mismo; además de las posiciones necesitamos saber las velocidades iniciales de las partículas que lo integran. Como que se necesitan tres coordenadas más por partícula para conocer dicha velocidad, esto nos da un total de $6m$ números reales necesarios para conocer el "estado" de nuestro sistema en un tiempo dado. Así pues, en R^{6m}, tenemos que a cada punto corresponde una única trayectoria u órbita que describe el movimiento de las partículas en función del tiempo. A este espacio se le llama "espacio fase" y al conjunto de las trayectorias en él, se le llama el "retrato fase" de nuestro sistema. De aquí en adelante tomaremos $3m = n$ y denotaremos a este número, que es el número de coordenadas necesarias para fijar la posición de nuestro sistema, como el "número de grados de libertad" del mismo.

Hay dos maneras de abordar el estudio de las trayectorias de un sistema dinámico como el que nos ocupa. Una es el tratar de encontrar en forma explícita los valores de $x(t)$ (aquí $x(t)$ es un punto en R^{2n} para cada t) para una condición inicial dada ($x(0)$, por ejemplo). Este es el método cuantitativo y, a excepción de

* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

ciertos sistemas muy sencillos, no se han podido obtener resultados explícitos.

Sin embargo, el uso de calculadoras analógicas o digitales, permite el computar la órbita, para una condición inicial dada, con tanta aproximación como se requiera. Este método es el que se usa, por ejemplo, para calcular las trayectorias de los satélites artificiales. Por medio del cálculo numérico se puede también encontrar base para investigaciones en el segundo tipo de estudio mencionado anteriormente: el estudio cualitativo del retrato fase.

El problema cualitativo, consiste en encontrar ciertos invariantes de tipo topológico en nuestro retrato fase; es decir, como se "ve" el conjunto de trayectorias en el espacio fase que nos concierne. Los problemas cualitativos son los de acotamiento de órbitas, de estabilidad, de existencia de ciertas variedades invariantes con propiedades separatrices interesantes, la caracterización de conjuntos límites, etc.

El objetivo sería llegar a una clasificación "topológica" de todos los posibles retratos fase: se considerarán dos sistemas equivalentes si existe un difeomorfismo entre ellos, que mande trayectorias en trayectorias. El programa es muy ambicioso y sólo se han podido atacar aspectos parciales del problema. Se conoce, por ejemplo, cómo son esencialmente los sistemas llamados "integrables" y algunas de las propiedades cualitativas de aquellos sistemas que difieren poco de éstos.

El movimiento de nuestros planetas está descrito por ecuaciones diferenciales que son un caso particular de lo que se llama un sistema hamiltoniano clásico, o sea, un sistema de la forma

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{1}$$

donde $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ son los *n-vectores* que nos fijan un punto en el espacio fase, H es una función derivable de los $2n$ parámetros p, q y $\dot{p}$, $\dot{q}$ denotan las derivadas de p y q con respecto al parámetro t, el tiempo.

En el caso que interesa a la mecánica celeste, H, el hamiltoniano, representa a la energía total del sistema, suma de energías potenciales y cinéticas, y es una función analítica de p y q, al menos si se eliminan del espacio fase vecindades de aquellos puntos que corresponden a coincidencias de dos de las partículas de nuestro sistema.

En el retrato fase $\dot{p}$ y $\dot{q}$ se pueden interpretar como las componentes del *2n-vector* tangente a la trayectoria en el punto p, q.

Liouville mostró que el flujo definido en R^{2n} por un sistema hamiltoniano preserva el volumen. Es decir, si se considera un conjunto medible, M_0, al transportar los puntos de M_0 a lo largo de las trayectorias que pasan por ellas por un tiempo t, se obtiene un nuevo conjunto medible, M_t, con la misma medida de M_0. Aquí la medida de que hablamos es la de Lebesgue en R^{2n}. Este resultado se sigue inmediatamente de que la divergencia del vector $(\dot{p}, \dot{q})$ es nula, como se puede ver a partir de (1):

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} \quad \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

Aquí suponemos que H admite al menos dos derivadas continuas, y $\frac{\partial}{\partial p}$ $\frac{\partial}{\partial q}$ denotan al vector obtenido derivando con respecto a cada una de las componentes de p y de q.

El hecho de que el hamiltoniano H sea una primera integral del sistema, es decir, invariante a lo largo de las trayectorias, se sigue de (1) también:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \left(- \frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0$$

Nótese entonces que, en general, $H =$ constante define una hipersuperficie invariante de dimensión $2n - 1$.

Hay que decir que en vez de R^{2n} se puede considerar todo esto en una variedad diferenciable M^{2n} dotada de una estructura canónica y dando en ella una 1-forma cerrada, dH.

Como ejemplo de un sistema hamiltoniano con un solo grado de libertad, daremos el que se origina de la consideración del péndulo simple:

$$\ddot{q} + w^2 \operatorname{sen} q = 0,$$

donde q representa el ángulo que dicho péndulo forma con la vertical. En forma de sistema tenemos

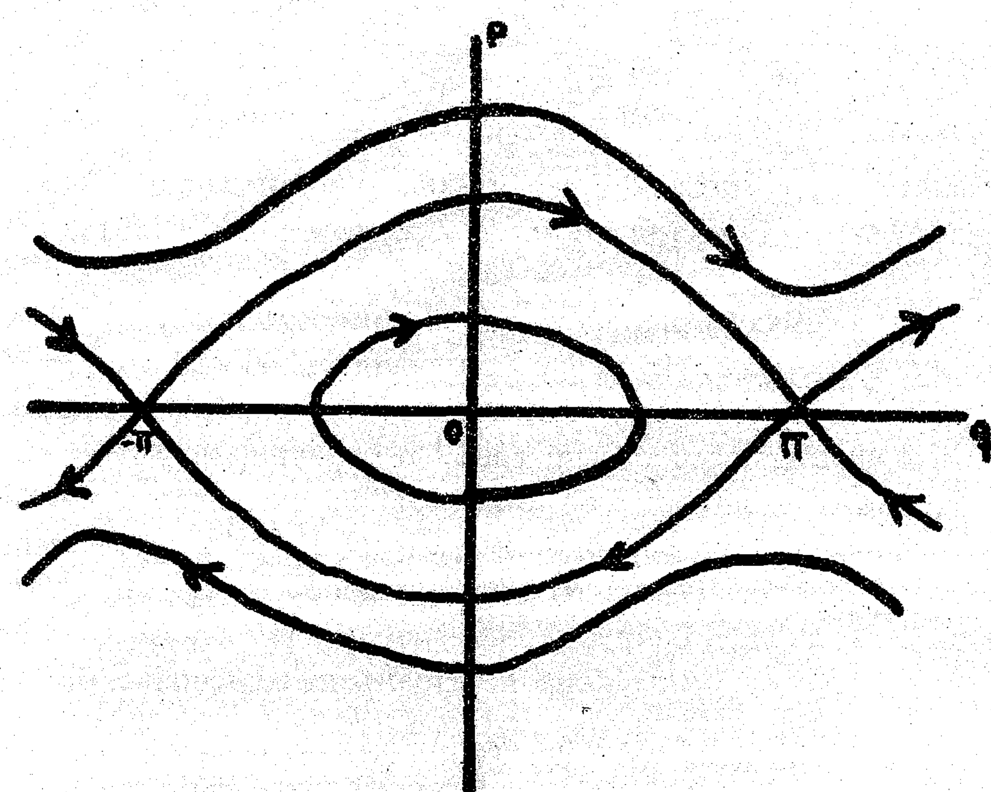
$$\dot{q} = p, \dot{p} = - w^2 \operatorname{sen} q,$$

que es de la forma (1) con

$$H = \frac{1}{2} p^2 - w^2 \cos q.$$

Siendo H = constante invariante y de dimensión 1, las órbitas nos quedan entonces determinadas, y el retrato fase es el que se sugiere en la figura 1.

Nótese que, a excepción hecha de los puntos críticos (puntos en que $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 0$) y de las trayectorias que tienden a ellas, el conjunto de puntos correspondientes a una trayectoria es o S^1 (una imagen topológica de la circunferencia) o R^1 (una imagen topológica de la recta), según que la órbita sea acotada o no. Este fenómeno es general para sistemas "integrables". Liouville demostró que si en un sistema con n grados de libertad se conocen n primeras integrales independientes en involución, entonces el sistema es enteramente integrable por cuadraturas. A esto le llamamos un sistema "integrable".



Se dice que las n primeras integrales $H = F_1, F_2, \ldots, F_n$ (funciones de (p, q) invariantes a lo largo de las trayectorias), están en involución si los paréntesis de Poisson entre cualquier par de ellas se anulan: $(F_i, F_j) = 0$. Aquí

$$(F, G) = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial G}{\partial p}$$

Las ecuaciones $F_i = f_i$ (f_i constantes) determinan en general una variedad invariante del sistema de dimensión n, sea M una de sus componentes. La independencia de las F_i nos dice que los vectores gradientes forman un sistema linealmente independiente. Se prueba entonces, que M debe ser un producto de la forma $S^1 \times S^1 \times \ldots \times R^1 \times R^1$ con n términos. En particular, si M es acotada (compacta), debe ser de la forma $S^1 \times \ldots \times S^1 = T^n$, un toro de dimensión n. Más aún que esto, en la vecindad de M el espacio de un producto de B^n, un intervalo de R^n, en que para cada punto de B^n se tiene una variedad M invariante. En general, exceptuando los puntos en variedades de dimensión $2n$-1 o menor, la estructura del retrato fase viene dada por las variedades M recién mencionadas. Es decir, el espacio nos ha quedado dividido en compartimientos abiertos, separados por estas variedades de dimensión $2n$-1 o menor, y en cada una de ellas la estructura es de producto: $M \times B^n$. Si el compartimiento es acotado, $M = T^n$. En una de estas partes acotadas se pueden introducir variables de "acción-ángulo", (I, φ), $I \in B^n$, $\varphi(\mathrm{mod}\ 2\pi) \in T^n$, tales que la aplicación $I, \varphi \rightarrow p, q$ sea canónica, (es decir, que no se cambie la estructura hamiltoniana del sistema), y que $F_i = F_i(I)$.

Las ecuaciones quedan ahora en la forma

$$I = 0, \varphi = \omega(I), (\omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I})$$

(Para poder hacer esto se ha pedido en algún momento que

$$\det \left| \frac{\partial I}{\partial f} \right| \neq 0)$$

La acción I se define por $I_i(f) = \oint_{\gamma i\ (f)} p dq$, donde $\gamma_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$ son una base de los 1-ciclos sobre cada toro $M_f : F = f$.

La segunda de las ecuaciones de nuestro sistema nos dice ahora que el flujo en cada toro es casi periódico, y de hecho periódico si las componentes de ω son racionalmente dependientes (ver figura 2).

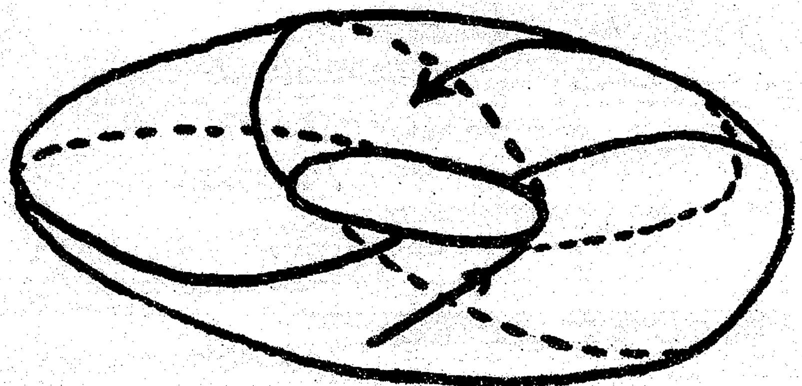


FIGURA 2

Hemos obtenido así, justificación teórica para las observaciones hechas con anterioridad sobre los problemas integrables: que las trayectorias acotadas de sistemas integrables son casi periódicas.

Entre los problemas integrables conocidos, cabe mencionar el de los dos cuerpos, el del movimiento de un punto libre a lo largo de una geodésica en la superficie de un elipsoide triaxial o de un cuerpo de revolución, el de un cuerpo rígido simétrico pasado fijo en un punto de su eje y el de un sólido asimétrico con su centro de gravedad fijo.

No todos los sistemas son integrables. Esto se ha demostrado exhibiendo casos en que, claramente, las órbitas acotadas no se hallan sobre toros invariantes. Sin embargo, no es claro aún que problemas, entre los aún no integrados, son o no integrables. Entre este tipo de problemas, se encuentra el de los n cuerpos, incluyendo el problema plano restringido de los tres cuerpos. También pertenecen a esta categoría el movimiento de un punto libre a lo largo de las geodésicas de un convexo y el movimiento de un cuerpo pasado asimétrico.

Se pregunta ahora que es lo que pasa si se altera un sistema hamiltoniano integrable en una cantidad pequeña. Por ejemplo, si se suma a H una cantidad H_1 de valor absoluto pequeño. Para comenzar el análisis se puede suponer que el sistema integrable original esté dado en la región que nos interesa (acotada) en términos de variables acción-ángulo.

Tomamos pues como nuestro espacio fase $\Omega = R^n \times B^n$ y sean $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n) \pmod{2\pi}$, las coordenadas sobre B^n y T^n respectivamente.

Si se tiene un hamiltonianio $H = H_0\ (p)$ (caso integrable, véase (2)), nuestro sistema viene dado por

$$\dot{p} = 0, \dot{q} = \omega_0\ (p) \quad (\omega_0(p) = \frac{gH_0}{\partial p}), \tag{3}$$

y describe un movimiento casi periódico de frecuencias $\omega(p)$ sobre los toros invariantes $p =$ constante.

Si $\frac{\partial \omega_0}{\partial p} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \neq 0$, entonces las frecuencias varían de un toro al otro.

Consideremos ahora al hamiltoniano perturbado:

$$H = H_0(p) + H_1\ (p, q),$$

$$H_1(p, q + 2\pi) = H_1\ (p, q) << 1.$$

El sistema es en este caso:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q}, \quad \dot{q} = \omega_0(p) + \frac{\partial H_1}{\partial p}. \tag{4}$$

Kolmogorov demostró en 1954 que para la mayor parte de las condiciones iniciales se conservan los toros invariantes con movimientos casi periódicos. Vamos a ser más precisos:

Supóngase que H es analítico en una vecindad compleja $[\Omega]$ del espacio fase Ω, (Re p, Re $q \in \Omega$, $|Im\ p| < \rho, |Im\ q| < \rho$). También se supone que el sistema sin perturbar es no degenerado:

$$\det |\frac{\partial \omega_0}{\partial p}| = \det |\frac{\partial^2 H_0}{p^2}| \neq 0.$$

Se escoge un vector frecuencia inconmensurable, $\omega = \omega^*$, (que no satisface una relación $(k, \omega) = (k_1 \omega_1 + \ldots + k_n \omega_n = 0$ con $k_1, \ldots, k_n$ enteros, $k \neq 0$). Sea $T_0(\omega^*)$ el toro invariante del sistema sin perturbar que tiene por ecuación $p = p^*$, donde $\omega_0(p^*) = \omega^*$. Las frecuencias sobre $T_0(\omega^*)$ son pues ω^*.

Se tiene entonces el siguiente

Teorema. *Para cada* $\delta > 0$ *existe* $\epsilon > 0$ *y una aplicación* $p = p(Q), q = q(Q)$ *de un toro* $T = \{Q, \bmod 2\pi\}$ *en* Ω, *tales que* $\dot{Q} = \omega^*$ *y que* $|p(Q) - p^*| < \delta$, $|q(Q) - q| < \delta$, *siempre y cuando en* $[\Omega]$

$$|H_1| < \epsilon = \epsilon(\delta, \omega^*, H_0, \Omega, \rho) > 0.$$

Los toros T (ω^*) forman un conjunto de medida positiva, y la medida del complemento tiende a cero con H_1.

En otras palabras más intuitivas, lo que se dice es que si H_1 es suficientemente pequeño, para casi todas las ω^* existe un toro ($T(\omega^*)$ invariante del sistema perturbado, y $T(\omega^*)$ es muy próximo a $T_0(\omega^*)$.

La idea de la demostración se basa en un proceso de aproximaciones sucesivas.

Se busca una transformación canónica $p, q \rightarrow p', q'$ que transforme a

$$H = H_0(p) + H_1(p, q) \text{ en } H_0(p') + H_2(p', q'),$$

en que H_2 sea de un orden de pequeñez superior a H_1.

Al tratar de encontrar dicha transformación nos encontramos con el problema de la convergencia de la serie de Fourier definidora de la función generatriz de la transformación canónica: En el denominador de los coeficientes aparecen los términos (ω, k) que pueden hacerse arbitrariamente pequeños (y aún cero si ω no es inconmensurable) al crecer $|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|$. Como que ω depende de p', q', es indudable que en todo abierto nos encontraremos con problemas.

Para subsanarlo Kolmogorov pensó en escoger ω^* apropiadamente, de hecho de manera que $|(\omega, k)| \geqslant K|k|^{-n-1}$, para cierta K, lo cual se realiza para casi todas las ω. Una vez escogida ω^* se tiene $T_0(\omega^*)$ y se puede encontrar el toro $T_1(\omega^*)$ invariante bajo el flujo definido por medio de $H_0(p')$, y que se encuentra en la vecindad de $T_0(\omega^*)$. Se puede ahora buscar una segunda transformación canónica que nos lleve el hamiltoniano a la forma

$$H_0(p'') + H_3(p'', q''),$$

con H_3 de un orden de pequeñez mayor que H_2. Aquí, de nuevo se puede encontrar $T_2(\omega^*)$ en las cercanías de $T_1(\omega^*)$, e invariante bajo el sistema definido con $H_0(p'')$. El quid del asunto se encuentra en que $H_{n+1}(p^{(n)}, q^{(n)})$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ y en que los $T_n(\omega^*)$ tienden a un toro $T(\omega^*)$ invariante bajo el sistema definido por $H_0(p^{(\infty)}) = H(p, q)$, y en que las trayectorias tienen frecuencias ω^*. Lo que hace posible esta convergencia es que $|H_n|$ es del orden de $|H_{n-1}|^s$, $s > 1$, o sea que se tiene un proceso de aproximación del tipo del que se tiene en el método de aproximación de Newton.

Para demostrar por este método que estos toros invariantes llenan un conjunto de medida positiva hay que usar las funciones monogénicas de Borel.

El teorema nos da pues la siguiente imagen: $H =$ constante es una variedad invariante de dimensión $2n-1$ en la que se encuentran encajados toros de dimensión n, entre los cuales puede haber regiones en que dichos toros no existen (regiones llamadas de inestabilidad). Si $n = 2$ se tienen toros de dimensión 2 en una región de una variedad de dimensión 3. Como que éstos separan se puede concluir el acotamiento de las órbitas que pasan por los puntos de la región, pues quedan emparedados entre toros.

Sin embargo, para $n > 2$ no se puede concluir nada semejante, pues, por ejemplo si $n = 3$ se tienen T^3 encajados en una región de R^5, la cual no separan, y las órbitas que no pertenecen a los toros invariantes no tienen por qué permanecer acotadas. De hecho se pueden dar ejemplos explícitos en que estas órbitas pueden alejarse tanto como se quiera. En los ejemplos, este escape se logra con la ayuda de intersecciones transversales de las variedades estables e inestables correspondientes a ciertos toros de tipo hiperbólico.

Este teorema permite concluir la estabilidad del movimiento de un planetoide en el problema circular plano restringido de los tres cuerpos ($n = 2$), también la estabilidad de las rotaciones rápidas de un cuerpo rígido pesado asimétrico, o bien se puede aplicar al problema de las geodésicas sobre superficies cercanas a elipsoides o a superficies de revolución.

El teorema ha sido generalizado por Arnold a otros casos, llamados degenerados, en que la condición (5) no se cumple. De aquí se sabe que la mayoría de las trayectorias de un sistema planetario con un sol central mucho más pesado que los planetas que le dan vueltas en órbitas casi circulares y casi coplanares son casi periódicas y se encuentran sobre toros invariantes. O sea que, en la mayoría de los casos no habrá alejamientos al infinito ni choques entre los cuerpos del sistema.

El mismo Arnold ha usado su método para demostrar la existencia de toros de dimensión n invariantes y llenando un conjunto de medida positiva, en la vecindad de trayectorias cerradas y posiciones de equilibrio en casos elípticos generales. (Este mismo método ha permitido demostrar el teorema de Kolmogorov sin la maquinaria de las funciones monogénicas de Borel). Con este resultado se obtiene para $n = 2$ la estabilidad de órbitas cerradas de tipo elíptico general. Es así como Leontovich, ha demostrado la estabilidad de las soluciones periódicas de Lagrange en el problema plano y circular restringido de los tres cuerpos. Moser ha logrado reducir la demanda de analiticidad de H a la de la existencia de un número suficientemente grande de derivadas.

Nótese que hasta ahora todo ha sido hecho en las variedades $H = h =$ constante, o sea que cuando hemos concluido estabilidad ésta ha sido adiabática, es decir, sin cambios de H (energía). Se puede dar otra forma al teorema utilizando la construcción de superficies de sección de Poincaré-Birkhoff, que permite concluir estabilidad independientemente de que el proceso sea adiabático.

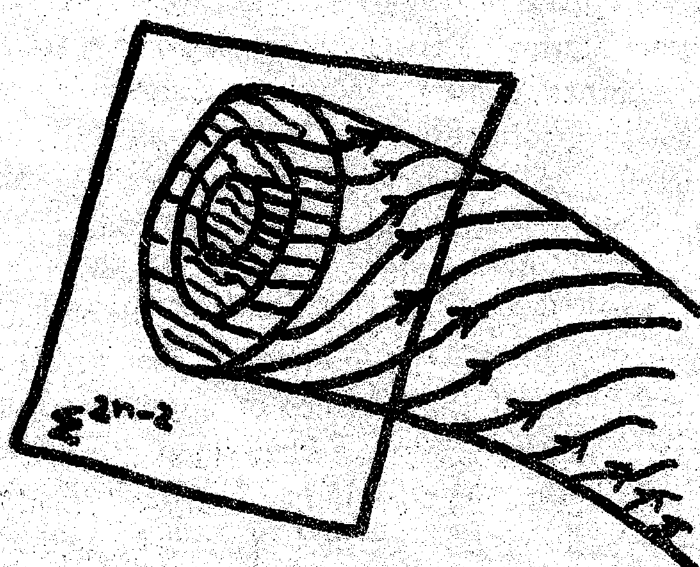


FIGURA 3

Si $\omega_1 \neq 0$ se puede considerar una subvariedad Σ^{2n-2} de Ω^{2n} dada por $q_1 = 0, H = h$ (véase figura 3).

Sea $x \epsilon \Sigma^{2n-2}$, $x(t)$ la órbita del sistema hamiltoniano que sale de x. Sea Ax el primer punto de intersección de $x(t)$ con Σ^{2n-2}. A está bien definida en una vecindad del toro T^{n-1} dado por

$p =$ cte. $q_1 = 0$, si $\omega_1(p) \neq 0$ y si H_1 es suficientemente pequeña.

Resulta que en esta vecindad $p_2, \ldots p_n; q_2, \ldots, q_n$ (mod 2π) forman un sistema de coordenadas acción angulo. La aplicación A es canónica, es decir,

$$\int_\gamma PdQ = \int_{A\gamma} PdQ, \qquad (PdQ = p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n).$$

Si $H_1 = 0$, A se escribe como

$$A: p, q \to p, q + \omega(p); \omega_k(p) = 2\pi \frac{\omega_k}{\omega_l} \qquad (k = 2, \ldots, n).$$

Es decir, cada toro $p =$ cte. es invariante y pivota $\omega(p)$ bajo la acción de A (aquí se trata de difeomorfismos).

Para H_1 pequeño se obtiene el siguiente teorema (hemos substituido $p_2, \ldots, p_n; q_2, \ldots, q_n$ de nuevo por $p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n$), en que $\Omega = R^n \times B^n$, como antes:

Si B es una aplicación canónica global (es decir, $\int_\gamma pdq = \int_{B\gamma} pdq$ para toda $\gamma \epsilon \Omega$) suficientemente próxima a la identidad, entonces para casi cada ω^* existe $T(\omega^*)$ invariante bajo BA y cercano a $T_0(\omega^*)$. Aquí, como antes $T_0(\omega^*)$ está dado por $p = p^*, \omega(p^*) = \omega^*$.

Como que se ignora si toda transformación analítica canónica cercana a A se puede obtener usando la sección de un sistema hamiltoniano, este teorema no se puede deducir del anterior, y ni aun restringiéndose a un sistema hamiltoniano se tienen resultados equivalentes, pues la condición (5) viene ahora substituida por

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} & \dfrac{\partial H_0}{\partial p} \\ & \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial p} & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (6)$$

que es independiente de ella.

La condición (6) garantiza la presencia de toros invariantes en cada nivel de energía, y esto trae consigo la estabilidad para $n = 2$.

Por otro lado, en las aplicaciones ambas condiciones se verifican.

BIBLIOGRAFIA

POINCARE, H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, París, 1899.

BIRKHOFF, G.D., *Dynamical systems*, American Mathematical Society, Nueva York, 1927.

SIEGEL, C.L. *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer, Berlín, 1956.

KOLMOGOROV, A.N., *Sobre la conservación de movimientos casi periódicos con un cambio pequeño de la función hamiltoniana* (en ruso), Dokl. Akad. Nauk, 98(4), (1954), pp. 527-530.

ARNOLD, V.I. *Sobre la estabilidad de las posiciones de equilibrio de un sistema hamiltoniano de ecuaciones diferenciales ordinarias en el caso elíptico general* (en ruso), Dokl. Akad. Nauk, 137(2), (1961), pp. 255-257. Traducido al inglés en Sov. Math. Dokl. 2, pp. 247-249.

ARNOLD, V.I. *Demostración de un teorema de A.N. Kolmogorov sobre la invariancia de movimientos casi periódicos bajo perturbaciones pequeñas del hamiltoniano* (en ruso), Uspeji Mat. Nauk, 18(5), (1963) pp. 13-40. Traducido al inglés en Russian Math. Surveys, 18(5), (1963), pp. 9-36.

ARNOLD, V.I. *Denominadores pequeños y problemas de estabilidad del movimiento en mecánica clásica y celeste* (en ruso), Uspeji Mat. Nauk, 18(6), (1963), pp. 91-196. Traducido al inglés en Russian Math. Surveys, 18(6), (1963), pp. 85-193.

ARNOLD, V.I. Y AVEZ, A. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier- Villars, París, (1967).

MOSER, J. *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wissenschaff. Göttingen Kl. II. 1(1962), pp. 1-20.