Miscelánea Matemática **45** (2007) 97–104 SMM

Daniel Bernoulli y Leonardo Euler o el encuentro de dos formas de ver la matemática

Jorge X. Velasco Hernández
Programa de Investigación en
Matemáticas Aplicadas y Computación
Instituto Mexicano del Petróleo
velascoj@imp.mx

1. Introducción

Debo advertir al lector de este artículo que mi interés en el tema que aquí trato surge de mi curiosidad por entender por qué pareciera que existen dos mundos independientes entre los matemáticos: el de los llamados puros y el de los aplicados. Las diferencias entre ambos no son claras; forman más bien un contínuo que va de los puristas mas recalcitrantes hasta los empíricos más incorregibles. Hay quienes llaman matemáticas aplicadas al estudio de ecuaciones en espacios abstractos porque la "motivación" del problema surge de la física o la biología aunque sus resultados no tengan el menor interés para la física o la biología; y hay quienes le dan el mismo calificativo a la aplicación más rutinaria de un método numérico que no aporta nada en absoluto al conocimiento matemático; hay quienes dicen que la matemática aplicada es, ante todo, matemática, y hay otros, no menos entusiastas, que sostienen que la matemática es uno más, entre otros, de los métodos y lenguajes de la ciencia.

Esta discusión toma un caracter muy particular en estos tiempos modernos en donde, independientemente de puntos de vista, las matemáticas y la física, las matemáticas y la biología, etc. se han integrado de manera impresionante para generar avances científicos y sobre todo tecnológicos que han cambiado y están cambiando no sólo nuestra forma de pensar sobre el mundo sino nuestra vida cotidiana misma.

Esta situación no ha existido siempre. Creo que es posible defender la tesis de que antes de la mitad del siglo XIX las matemáticas eran unicamente un accesorio del trabajo experimental, donde las explicaciones de los fenómenos físicos, por ejemplo se expresaban por lo general en lenguaje llano y no en el lenguaje clásico de la física : las matemáticas o más precisamente el cálculo [1].

El aspecto de la polémica y discusión entre Daniel Bernoulli y Leonardo Euler que me interesó más cuando lo conocí fue el hecho evidente de que la solución de una ecuación diferencial parcial de un matemático en general no es la solución que busca el biólogo o el físico (y viceversa). El avance de la ciencia y la tecnología es, a mi manera de ver, un compromiso entre estas dos visiones del mismo problema: si no se identifica un problema preciso a resolver, su solución no puede generalizarse y también, si no hay una teoría general desarrollada sobre esas soluciones, un problema específico pudiera ser irresoluble.

En el siglo XVIII cuando Euler y Bernoulli discutieron, no había nadie trabajando en la interfase entre matemáticas y física, es decir, no existian ni "físicos teóricos" ni "matemáticos aplicados", eran "matemáticos" a secas y "experimentalistas" a veces: en última instancia, ambos grupos, lo que hacían era "filosofía natural".

Es interesante observar que las disputas sobre lo que es ser matemático son posibles gracias a la existencia de gente trabajando, y haciendo matemáticas (cualquiera que sea el significado que le queramos dar al verbo "hacer") en muchas áreas de la ciencia. Realmente no sé que tan fácil la tengan los físicos teóricos pero los biólogos o los matemáticos trabajando en el desarrollo de ciencia y tecnología no cuentan con un nicho identificado como suyo: no son ni chicha ni limonada, al menos para las instancias calificadoras y sancionadoras de "ciencia normal" en este país. La multidisciplina de ahora, necesaria para atacar los problemas complejos de la ciencia y la tecnlogía es una forma de trabajo y, a decir verdad, dificilmente tiene paralelos en la época en la que vivieron Bernoulli y Euler.

Sin embargo, el dilema de Daniel Bernoulli es realmente semejante, por analogía, al que tenemos ahora. El cálculo se desarrolló pegado a la mecánica según la concebían los matemáticos del siglo XVIII; la evolución de la física ha permitido desde mediados del siglo XIX el crecimiento de ambas ciencias de una manera ejemplar. Eso sin embargo, no ha ocurrido en otras ni en los aspectos asociados al desarrollo tecnológico, particularmente en nuestro país.

Antes de pasar a la sección siguiente debo advertir al lector que el texto que sigue expresa mi manera personal de ver la problemática descrita en los párrafos precedentes. Mi área de trabajo es la de la aplicación de las matemáticas y la computación a los fenómenos biológicos principalmente y es desde esa perspectiva que ofrezco al lector esta visión de la interacción entre Bernoulli y Euler. Seguramente se encontrarán afirmaciones y enunciados debatibles en lo que abajo expongo pero creo no haber cometido injusticias flagrantes en mi exposición. Cualquier error histórico o filosófico que haya cometido no se justifica ciertamente con esta advertencia pero, al menos, espero que lo explique. Como es costumbre en estos casos, esos errores los asumo completamente; asimismo insto al lector a comunicarme su opinión o crítica contactandome via mi dirección de correo escrita arriba. Las referencias al final del artículo son las que he consultado específicamente para escribirlo; las opiniones son propias.

2. El problema de la cuerda vibrante.

El problema de la cuenta vibrante según fue enfocado por D' Alambert y Euler es, para mí un ejemplo de cómo la matemática surgía de la física pero no para la física. En 1740 o por ahí ambos investigadores se metieron en una disputa, algo difícil y personal, sobre la solución de la ecuación de onda en dos dimensiones. ¿Su problema? la definición o naturaleza de lo que era una función, la definición de continuidad y la de diferenciabilidad. ¿La física? no, no lo creo. A ambos les preocupaba la caracterización adecuada de función y los conceptos de continuidad y diferenciabilidad.

D' Alambert dedujo la ecuación de onda en la siguiente forma (usando notación moderna)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)$$

y construyó la solución

$$y(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

que, sujeta a las condiciones de frontera

$$y(0,t) = y(L,t),$$

se reducía a

$$y(x,t) = F(x+t) + F(x-t)$$

siempre y cuando la función F fuese periódica, impar y diferenciable en todas partes. D' Alambert demostraba con esto que la ecuación de onda admitía "un número infinito de soluciones".

Euler entra en escena al criticar varias de las suposiciones que D' Alambert hiciera para encontrar su solución. Una de particular interés para nosotros es la de suponer que la forma inicial de la curva o cuerda era continua y diferenciable "como una anguila". Esta suposición para Euler, le quitaba generalidad a la solución de D' Alambert pues omitía funciones, notablemente la que representa una cuerda al ser pulsada como la que se muestra en la figura.

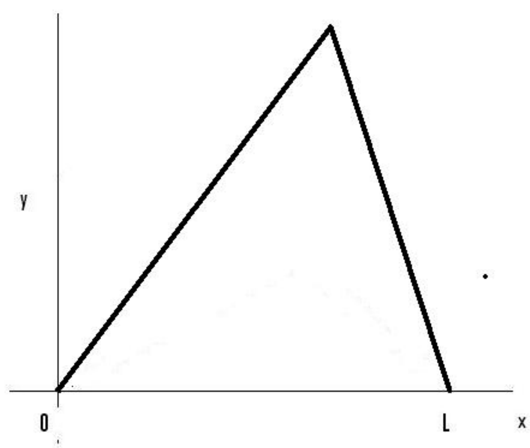

Figura 1: Forma inicial de una cuerda elástica

Euler derivó una ecuación de onda ligeramente más general que la de D' Alambert [4]

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)$$

con la solución

$$y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

que con las mismas condiciones de frontera resulta en

$$y(x,t) = F(x+ct) + F(x-ct).$$

Euler argumentaba, a diferencia de D' Alambert,que la función F quedaba determinada por la posición y velocidad inicial de la cuerda. Si denotamos por $w(x)$ y $v(x)$ a éstas, respectivamente, entonces la solución puede representarse como

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(w(x+ct) + w(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(s)ds\right).$$

Las funciones w y v podían ser arbitrarias (en el sentido que podían representar cualquier curva que pudiera “dibujarse a mano”) e incluía, implícitamente, a la curva “triangular” de la figura. Como dicen los autores [2] a D'Alambert no le quitaba el sueño sacrificar realismo físico por pureza matemática; Euler, por el contrario, usaba la realidad física para contraargumentar la generalidad de las soluciones obtenidas por el francés aunque su interés no fuera tanto realismo físico sino la generalidad de las soluciones admitidas por la ecuación de onda.

Daniel Bernoulli, por su parte, tenía una idea de solución distinta a la de sus distinguidos interlocutores. En enfoque de Bernoulli era experimental: hacía experimentos sobre, por ejemplo, cuerdas vibrantes, y de ellos y sus resultados deducía sus ecuaciones o soluciones de las mismas. La función que describía a la cuerda vibrante, en particular el desplazamiento vertical y de una cuerda elástica fijada en sus extremos a una distancia a, dedujo que tenía que ser de la forma [2]

$$y(x) = \alpha \sin\frac{\pi x}{a} + \beta \sin\frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{a} + \delta \sin\frac{4\pi x}{a} + \cdots$$

que incorporaba el hecho experimental de que cualquier modo de vibración de la cuerda puede obtenerse superponiendo modos vibratorios simples representados por cada término. Esta fórmula, como el lector se habrá dado cuenta, no es correcta pues le falta, a cada término, el producto por la función coseno (función del tiempo). Más aún, Bernoulli fue incapaz de mostrar como podían obtenerse los coeficientes α, β, γ, $\delta, \ldots$cosa que sí hizo Euler un poco después con el método por todos conocido de integrar la expansión después de multiplicarla por senos o cosenos.

Es claro que la solución de Bernoulli no es tan general como la de D'Alambert pero algo que aún el gran Euler no pudo realmente entender es que la solución de Bernoulli permitía funciones iniciales como la triangular que, como vimos antes, era fuente de críticas por parte de Euler a la solución de D'Alambert.

Bernoulli y Euler mantuvieron un itercambio epistolar fructífero y es posible afirmar [1] que cada uno dependía del otro para su trabajo: Bernoulli dependía de Euler para guíar sus matemáticas y Euler de Bernoulli para la comprensión de los fenómenos físicos de los que

partían sus estudios matemáticos aunque, al final, el problema físico de la cuerda vibrante no lo resolvieron ni juntos ni individualmente, ni desde una perspectiva experimental, donde la matemática jugara un papel metodológico predominante, ni desde el punto de vista matemático donde la física del problema guiara y definiera la teoría. Euler nunca consideró importante el trabajo matemático de Daniel Bernoulli y, tenía razón pues sus métodos eran algo torpes aunque poseedores una gran intuición física. Bernoulli, por su parte, tampoco apreciaba mucho los trabajos matemáticos de Euler pues estaban lejos de los experimentos. Bernoulli llegó a escribir que el "tomaba sus pruebas de la naturaleza y no de algún principio de análisis"
citeG p.43.

3. Pensamientos asociados.

Ochenta años después de estos sucesos Fourier publicaba, en 1822, su *Theorie Analytique de la Chaleur* donde demostraba que cualquier función real podía representarse en cualquier intervalo finito por una serie de senos o cosenos y que, además, una vez que el intervalo y la serie se fijan, sus coeficientes quedan determinados de manera única. Lo primero Bernoulli lo había sólo intuido; lo segundo había preocupado hondamente Euler.

La construcción de la solución de un problema real requiere de la interacción entre personas con distintas perspectivas, con distintos puntos de vista. Sin Bernoulli la construcción de soluciones como superposición de modos elementales, no hubiera ocurrido; sin Euler las definiciones formales de continuidad y diferenciabilidad que permiten, entre otras cosas, los resultados de Fourier, tampoco.

Este número de *Miscelanea* está dedicado a Leonardo Euler y yo, en este artículo, hablo con entusiasmo más de su rival que del festejado y por ello creo que el lector merece una explicación. Ambos, Euler y Bernoulli son figuras fascinantes del s. XVIII que me sirven de pretexto para hablar sobre matemáticas aplicadas según las entendemos en este s.XXI. Entender no significa poder definir, sino simplemente reconocer como parte de nuestra cultura científica que no es equivocado hablar de un concepto o idea particular, en este caso la idea o concepto de matemáticas aplicadas. Aparte de ese sentido conceptual que acabo de señalar, hay otro menos sutil y, por lo mismo más directo, y es que los grandes hombres necesitan de otros como ellos pero con puntos de vista contrarios, antagónicos, para lograr sus hazañas (casi me atrevo a decir que los grandes hombres necesitan de grandes adversarios, quizás hasta de grandes enemigos para hacer lo que hacen). Comparado con Euler, el trabajo matemático de Bernoulli es humilde. El mismo lo reconoció. En 1736 decía "He dejado las matemáticas casi completamente y si no fuera que me lo pide mi relación con la Academia, las dejaría en su totalidad". No obstante esta frase, escrita seguramente en uno de esos momentos de depresión momentánea que nos llega alguna vez a todos, Daniel Bernoulli es, por derecho propio, un hombre extraordinario, un científico inusual y visionario.

Daniel Bernoulli era raro en su época porque fue un experimentalista que podía seguir los argumentos de los matemáticos y opinar con autoridad si los resultados de éstos hacían referencia a los experimentos o eran sólo resultados matemáticos sin interés para la física (aunque los matemáticos los llamaran resultados de "mecánica"). La mayoría de los experimentalistas de su época, no podían hacer lo mismo. Por esta razón los llamados de Bernoulli para que los experimentos guiaran la solución matemática de los problemas era poco menos que irrelevantes para el gremio. La discusión de la solución de Bernoulli se dió en los círculos matemáticos (D'Alambert, Euler, Lagrange) que decidieron ignorarlo, mientras que en el campo experimental sus colegas no lo comprendieron por su colectiva ignorancia matemática. Daniel Bernouilli era bastante más universal que el mismo Euler aunque en poder matemático no fue su par. Para concluir cito a continuación un pasaje de una biografía de Daniel Bernoulli que me pareció adecuada para rematar este artículo. Daniel Bernoulli, dicen los autores, [3] "... pudo encontrar en el Análisis Matemático los medios para extraer de los cálculos todos los detalles de los fenómenos; nadie mejor que él supo preparar los experimentos para obtener la ratificación de los resultados de la teoría. En el más amplio sentido fue filósofo y físico. Daniel Bernoulli publicó 86 trabajos sobre los más variados temas [..........] y ganó 10 Premios de la Academia de Ciencias de París sobre temas de importancia estatal, siendo sólo superado por el líder de todos los matemáticos de la época, Leonhard Euler que ganó 13 Premios. Cuando murió en 1782, moría uno de los primeros matemáticos aplicados y uno de los últimos verdaderos hombres de ciencia ilustrados".

Referencias

[1] Garber E. The Language of Physics. Birkhauser, Boston, 1999

[2] Grattan-Guinnes, I. *Daniell Bernoulli and the varieties of mechanics.* NAW 5/1 nr. september 2000

[3] http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/DBernoulli Biblio.asp Autores: Carlos Sánchez y Concepción Valdés. Universidad de la Habana

[4] Wheeler, G. and WP. Crummet. *The vibrating string controversy.* Am. J. Phys 55 (1), January 1987