MISCELÁNEA MATEMÁTICA 25 (1997) 1–10 SMM

Theodor

Antonio Antolín Fonseca

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Pequeñas resultan mis palabras para rendir homenaje a Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, bávaro genial, en el centésimo aniversario de su muerte. Recurriré, pues a mayores. En la sesión del 4 de diciembre de 1899 de la Academia de Ciencias de París, decía Poincaré a sus colegas.

> *La enseñanza del análisis infinitesimal se ha modificado considerablemente desde comienzos del siglo. Por supuesto que hace cien años nadie cuestionaba los principios de dicho análisis, pero los razonamientos en que se pretendía sustentarlos estaban lejos de ser rigurosos y no satisfacían a todos los intelectos. Se conoce la expresión más o menos auténtica adjudicada a un gran matemático de aquel siglo*[1]*, quien habría dicho a uno de sus discípulos:* no se detenga, la fé lo alcanzará.
>
> *El vigoroso intento efectuado por Lagrange por poner los fundamentos del cálculo infinitesimal al abrigo de tales críticas no alcanzó en realidad un éxito completo. Todo se redujo a las series, pero habría sido necesario demostrar la convergencia de esas series.*
>
> *Hoy en día no experimentamos ya esas dificultades; el rigor de nuestras demostraciones no deja ya nada que desear, las nociones más complejas y desde hace poco hasta las más obscuras se reducen en última instancia a la noción perfectamente clara de número entero. Se ha llegado a este resultado reduciendo al mínimo el papel de la intuición.*

[1]Jean le Rond d'Alembert, (1717-1783).

El autor principal de esta revolución es el matemático alemán Weierstrass...[2]

Un cuarto de siglo después, Hilbert, quien consideraba sus propios trabajos *como una continuación directa de la obra de Weierstrass*, escribió:

Weierstrass, por medio de una crítica conducida con profundidad magistral, dotó al análisis matemático de una base sólida. Al dilucidar las nociones de mínimo, de función, de derivada, entre otras, eliminó las objeciones que aún suscitaba el cálculo infinitesimal, limpiándolo de todas las ideas confusas sobre lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, y venció en forma definitiva las dificultades que surjen de los conceptos mismos de infinitamente grande y de infinitamente pequeño. Si hoy en día, gracias a los métodos que descansan sobre el concepto de número irracional, o, de manera más general, sobre el de límite, reina en el análisis una armonía y una certidumbre perfectas, y si en las cuestiones más complicadas de la teoría de las ecuaciones diferenciales e integrales, a pesar de las combinaciones más audaces y de las más diversas formas de paso al límite, todos los resultados coinciden, ello se lo debemos esencialmente a la actividad científica de Weierstrass[3].

Del tributo que dos de los más grandes forjadores de la matemática del siglo veinte rinden a Weierstrass, destaca un aspecto del juicio que su obra ha merecido a la posteridad: nuestro homenajeado mostró la importancia del concepto de convergencia uniforme de una serie de funciones y demostró conocidos teoremas de aproximación de funciones continuas por polinomios y de funciones continuas periódicas por polinomios trigonométricos, contribuyó a la teoría de funciones doblemente periódicas, de las funciones de variable real –recordemos aquí su célebre función continua en los reales sin derivada en punto alguno– de las funciones elípticas y sus generalizaciones, de las funciones abelianas, desarrolló la teoría general de funciones analíticas y su continuación, la más

[2] Dugac, Pierre. ***Eléments d'analyse de Karl Weierstrass.*** Arch. Hist. Exact. Sci. **10** (1973) pp. 138–139.

[3] id., p. 95

específica de funciones enteras y meromorfas, incluyendo la expresión de una función entera como producto infinito, señaló la importancia del problema de existencia en el cálculo de variaciones y avanzó la teoría de formas bilineales y cudráticas, pero se le recuerda sobre todo por su trabajo en los fundamentos del análisis, cuya pieza central es la construcción de los números irracionales a partir de los racionales. Aunque esta construcción fue llevada a cabo también por Charles Méray (1835–1911), por Richard Dedekind (1831–1916) y por Georg Cantor (1845–1918) –su discípulo– sólo Weierstrass basó en ella una reconstrucción rigurosa del cálculo y de la teoría de funciones de variable compleja.

En una serie de cursos magistrales que extendieron su fama a través de Europa, Weierstrass erigió, minuciosa y metódicamente, un edificio analítico de sólidos cimientos que estableció un nuevo paradigma de rigor. En esto consiste la revolución weierstrassina.

Hilbert aplaude la limpieza a que Weierstrass sujetó al cálculo infinitesimal, librándolo de vagas –¡sucias!– nociones de cantidades infinitesimales e infinitas. En otras palabras, Weierstrass concluyó el exorcismo que Cauchy había iniciado medio siglo antes y el espíritu de Leibniz, expulsado del cálculo por él creado, fue a dar a un limbo del que lo rescató Abraham Robinson en 1960.

Dedicaré el resto de esta nota a mostrar lo profundo de ese exorcismo, explicando, de la manera somera que este espacio permite, cómo Weierstrass puso punto final a un capítulo de la historia de la matemática iniciado por Leibniz, y en el que los malhadados infinitésimos no son sino personajes secundarios.

Thomas Hobbes (1588–1679), filósofo inglés conocido sobre todo por su argumento según el cual el contrato social que funda una comunidad humana conduce inevitablemente al absolutismo, desarrolló una curiosa teoría de las verdades científicas. Impresionado por el carácter convencional del lenguaje y por el papel que juegan las definiciones en la presentación deductiva de la geometría, Hobbes llegó a la conclusión de que la verdad de una afrimación es producto de una serie de convenciones. No puede sorprendernos que Leibniz haya rechazado el relativismo epistemológico que se sigue de ahí. En un diálogo que sus editores sitúan en 1677[4], Leibniz se pregunta si la verdad se finca en

[4]Wiener, Philip P., *Ed. Leibniz. Selections*. Charles Scribner's Sons, New York, 1951, pp. 6–11.

las palabras o las cosas. Si en las palabras, la verdad sería el resultado de un mero acuerdo entre nosotros como sostiene Hobbes. Si este fuese el caso, ¿cómo podríamos entonces expresar sistemáticamente verdades acerca de la naturaleza, cuando ésta no parece dispuesta a ajustarse al molde que nuestro capricho le asigne? Si en las cosas, podríamos llamar falsa a una piedra, lo que es absurdo. ¿Dónde radica pues la verdad?

Las palabras, las notas musicales, los numerales, los símbolos algebraicos, los diagramas son, todos ellos, signos arbitrarios, desprovistos de toda conexión necesaria, o íntima, con los objetos que designan. Una misma verdad puede expresarse en diversos idiomas o mediante distintos sistemas de símbolos; así pues, la conexión que debe existir entre un estado de cosas y un enunciado referido a él, para poder considerar verdadero al enunciado, no puede depender de las palabras o símbolos que los constituyen, ni del orden particular en que se concatenan, pues éste también varía. La conexión debe asentarse en la relación entre las partes del enunciado, es decir, en su estructura. El discurso refleja la realidad por medio de la sintaxis.

Leibniz, al uso de la época, considera que los símbolos sólo pueden referirse a nuestras ideas de las cosas y no a las cosas mismas, de modo que el agregado de nuestras ideas se erige en intermediario obligado entre un sistema de símbolos y sus referentes últimos. Hecha esta aclaración, presento, en las palabras del propio Leibniz, una exposición admirablemente concisa de su teoría del lenguaje:

> *Llamo carácter a una representación visible de pensamientos. El arte característica es el arte de confeccionar y disponer caracteres de manera que se refieran a pensamientos o, en otras palabras, que tengan entre sí la misma relación que los pensamientos tienen entre sí. Una* expresión *es un agregado de caracteres que representan la cosa expresada. La* regla para expresiones *es la siguiente: que la expresión de la cosa se componga de los caracteres de las cosas cuyas ideas componen la idea de la cosa expresada.*

Aquí se halla descrito el eje en torno al cual gira todo el conocimiento del siglo dieciocho. Hay en este pasaje algo más que un concepto generalizado de lenguaje, que abarca sistemas simbólicos, artificiales además de lenguas naturales –un avance leibniziano– y un análisis de los que hace a un lenguaje portador de significado. Hay también una fé en que la sintaxis captura el orden natural. Linneo (Carl von Linné, 1707–1778) enumera veintiséis características sexuales de las plantas, que considera *un verdadero alfabeto vegetal de veintiséis letras.* Acto seguido cuenta las *palabras* que pueden formarse según las reglas apropiadas al caso y predice con plena confianza el número de géneros de plantas (con flores) que falta por descubrir.

Tal vez Linneo nos parezca ingenuo (su cuenta falla por seis mil géneros)y la fé descrita arriba, un obstáculo para el avance del saber. Nada más lejos de la verdad: a veces la fé mueve montañas. Lavoisier (Antoine-Laurent, 1743–1794), a quien una reforma de la nomenclatura química (y alquímica) llevó irresistiblemente a fundar la química moderna, predijo con la misma confianza que Linneo y sin otra base que su nomenclatura (sistema de símbolos con una sintaxis adecuada a su materia), la existencia de especies químicas desconocidas en su tiempo (el cianógeno y el bisulfuro de carbono son ejemplos) que fueron posteriormente descubiertos o sintetizados por él o sus seguidores.

Es hora de regresar a las matemáticas. Aquí encontraremos que la visión leibniziana incide, entre otras cosas, en la cuestión de la convergencia de las seeries trigonométricas, en el concepto mismo de función y en última instancia, en el programa de fundamentación del análisis.

Desde 1748 hasta su muerte, tres de los más grandes matemáticos del siglo dieciocho (uno de ellos se cuenta entre los más grandes de todos los tiempos), se enfrascaron en un polémica sobre las soluciones de la ecuación de las vibraciones de una cuerda. El movimiento estudiado se restringe a un plano y queda descrito por una función $y = y(x,t)$ que para cada t fijo representa la forma de la cuerda en el instante t. El célebre enciclopedista D'Alembert (cuyo socarrón consejo encontramos antes) dedujo en 1747 que $y = y(x,t)$ satisface la eucacion

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

(que escribo en notación moderna para conveniencia del lector) y que si se obliga a la cuerda a adoptar la forma $y = f(x)$ y se suelta sin velocidad inicial, su movimiento está descrito por

$$y = (x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] \tag{2}$$

D'Alembert impuso a la función f restricciones que Leonhard Euler (1707–1783) eliminó, suscitándose así la controversia, a la que se unió, en 1753, Daniel Bernoulli (1700–1782), miembro de la segunda generación de una notable dinastía de matemáticos suizos. Los detalles del debate son fascinantes, como lo es el hecho mismo que un desacuerdo sobre una cuestión aparentemente técnica –la solución general de una ecuación diferencial– no haya podido zanjarse en décadas. Aquí sólo hay lugar de presentar un momento del largo debate.

Presentaré en primer término la posición de Bernoulli en sus propias palabras: *...una cuerda tensa puede llevar a cabo vibraciones uniformes de una infinidad de maneras.... Estas distintas maneras se caracterizan por el número de vientres que la cuerda forma al vibrar. Cuando hay uno sólo (Fig. 1) se tienen las vibraciones más lentas, que producen el tono fundamental; cuando hay dos vientres y un nodo en el punto medio del eje (Fig. 2), entonces las vibraciones se duplican y producen la octava del tono fundamental;cuando la cuerda forma tres, cuatro o cinco vientres, con dos, tres o cuatro nodos equidistantes, como sucede en las figuras 3, 4, 5, las vibraciones se multiplican por tres, cuatro o cinco y producen la duodécima, la doble octava o la tercera mayor de la doble octava relativas al tono fundamental [...] Hacemos, pues, notar que la cuerda AB puede llevar a cabo vibraciones no únicamente según la primera, o segunda, o tercera, etc. figuras, sino que es capaz de ejecutar todas las combinaciones posibles de tales vibraciones...*[5].


Fig. 1

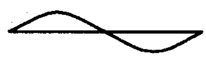
Fig.2


Fig. 3


Fig. 4


Fig. 5

No sin cierta ambiguedad, Bernoulli afirma también que todos los movimientos posibles de las cuerda son combinaciones de las oscila-

[5] Struik, Dirk J., (ed), *A Source Book in Mathematics*, 1200–1800. Havard Universitay Press, Cambridge, Mass., 1969

ciones simples de las que las *figuras anteriores* muestran las cinco primeras. En términos matemáticos, si la longitud de la cuerda es a, entonces la oscilación de la figura 1 está dada por $A sen\,\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi ct}{a}$, la de la figura 2 por $B sen\,\frac{2\pi}{a}\cos\frac{2\pi ct}{a}$, la de la tercera figura por $C sen\,\frac{3\pi x}{a}\cos\frac{3\pi ct}{a}$, etcétera.

El movimiento más general, según Bernoulli, estará dado por la superposición de éstos:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A sen\,\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi ct}{a} + B sen\,\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi ct}{a} + \\ &\quad + C sen\,\frac{3\pi x}{a}\cos\frac{3\pi ct}{a} + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

Es aquí donde Euler disiente: ciertamente (3) representa movimientos posibles de la cuerda, que pueden obtenerse de (2) tomando

$$f(x) = A\,sen\frac{\pi x}{a} + B\,sen\,\frac{2\pi x}{a} + C\,sen\,\frac{3\pi x}{a} + \cdots,$$

pero no representa todos, sino sólo las oscilaciones compuestas. Existen otras clases de movimientos, de los que Euler da un ejemplo: la propagación de un pulso a lo largo de la cuerda; en este caso partes finitas de la cuerda permanecen en reposo durante lapsos finitos, lo que lo hace, según Euler, esencialmente distinto de una oscilación simple o compuesta. Por lo tanto, concluye Euler, *la propagación de un pulso no puede representarse mediante la expansión* (3)[6]. Esta clase de movimiento, sin embargo, sí puede representarse mediante la expresión (2), lo que hace a ésta más general que (3).

Tanto Bernoulli como Euler argumentan de la física a la matemática; puesto que los movimientos posibles de una cuerda tensa son tales, la solución general (1) debe ser tal. Esta forma de argumentar, peculiar a nuestros ojos, no proviene, al menos en el caso de Euler, de una simple falta de diferenciación de los dominios de lo físico y de lo matemático; Euler explica claramente el proceso de abstracción que entra en la obtención de (1) y cómo esta ecuación no puede darnos más que lo que hemos puesto en ella. La fuerza del argumento euleriano

[6]Euler, Leonhard, *Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ebranlée que dans une partie (1765)* 1767. En Leonhardi Euleri Opera Omnia, serie **2**, vol. 10. Ed. Societas Scientianum Naturalium Helveticae, 1911. Leipzig, Berlin y Zurich.

parece radicar en la convicción de que a fenómenos cualitativamente distintos deben corresponder representaciones de formas esencialmente distintas A su vez esta convicción se deriva, con toda probabilidad, del *dictum* de Leibniz: el símbolo que representa una cosa se compone de los símbolos que representan los componentes de la cosa y la disposición de estos símbolos componentes es la representación de la conexión entre las partes de las cosa representada.

Ahora bien, para nuestros fines lo que interesa notar es que mientras persista la fé en esta correspondencia matemática, la cuestión de la convergencia o divergencia de una serie como (3), que corresponde a un fenomeno, no se suscita: $y(x,t)$ tiene, desde luego, un valor definido para cada x y cada t, pues especifica la posición de un punto de la cuerda en un instante dado. Algo análogo puede decirse de series que surgen de un contexto geométrico, pues allí también se da, a los ojos del siglo dieciocho, una solidaridad inquebrantable entre el sistema de símbolos y el universo de discurso que describe.

No hemos tenido sino un atisbo del poder de esta idea a todo lo largo del siglo dieciocho. No obstante su poder, a principios del diecinueve la vemos súbitamente quebrantada en la obra de Fourier (Jean-Baptiste-Joseph, 1768–1830). En una memoria presentada en 1807 al Institut de France, Fourier resuelve el problema de la distribución estacionaria de temperaturas en una placa infinita en una dirección, cuyo lado finito se mantiene a temperatura constante 1, y los infinitos a temperatura 0, como se muestra en la figura Fig 6.

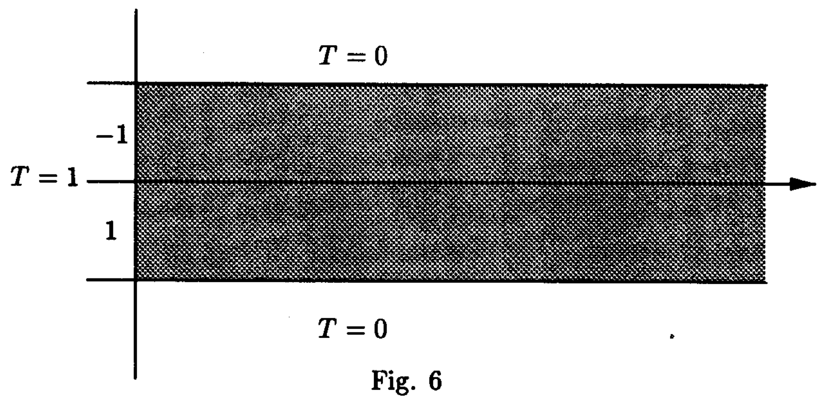

Fig. 6

Se trata de resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

sujeta a las condiciones de fronteras indicadas.

Tras determinar la forma de la solución, a saber,

$$T = a_1 e^{-\frac{\pi x}{2}} \cos\frac{\pi y}{2} + a_2 e^{-\frac{3\pi x}{2}} \cos\frac{3\pi y}{2} + a_3 e^{-\frac{5\pi x}{2}} \cos\frac{5\pi y}{2} + \cdots, \tag{5}$$

Fourier interpreta cada término de (5) como un proceso simple de difusión del calor. Considere la gráfica de $T = a_k e^{-\frac{(2k+1)\pi x}{2}} \cos\frac{(2k+1)\pi y}{2}$ como una lámina; imagine ahora que vierte agua sobre ella desde el borde que se alza sobre el lado finito de la placa; el flujo del agua sobre la lámina modelará el calor en la placa cuando a lo largo de su lado finito se mantiene una distribución de temperaturas dada por $a_k \cos\frac{(2k+1)\pi y}{2}$ y los lados infinitos se mantienen a cero grados. Fourier encuentra que

$$1 = \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2} - \frac{4}{3\pi}\cos\frac{3\pi y}{2} + \frac{4}{5\pi}\cos\frac{5\pi y}{2} - \frac{4}{7\pi}\cos\frac{7\pi y}{2} + \cdots \tag{6}$$

y considera el flujo de calor en la placa cuando su lado finito se mantiene a temperatura constante 1 y los lados infinitos a temperatura cero como superposición de los flujos correspondientes a cada término del miembro derecho de (6): *Es necesario imaginar qué hay tantas placas sólidas diferentes como términos en la ecuación de la superficie general, que cada una de estas placas se calienta por separado como si no hubiese más que un término en la ecuación, que todas las placas permanecen superpuestas, en fin, que las cantidades de calor que afectan a los puntos correspondientes se acumulan sobre uno sólo. Dicho ésto, se puede concebir que el calor que surge en cada instante de la fuente se distribuye así en porciones diferentes, se propaga según una de las leyes elementales discutidas y que todos estos movimientos parciales se llevan a cabo a la vez sin estorbarse*[7].

He aquí un anásis *à la Bernoulli*. Fourier, sin embargo, no obtiene (5) a partir de estas consideraciones, sino resolviendo (4) por el método de separación de variables; lo que hace es interpretar (5), aparentemente con el fin de mostrar que el proceso analítico ha conducido a

[7]Grattan-Guiness, Ivor. *Joseph Fourier, 1768–1830.* M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1972

una solución fisicamente plausible. No existe ya aquí una armonía preestablecida entre el sistema de símbolos y su dominio de significación; la concordancia entre ambos debe, para Fourier, de verificarse en cada caso.

Más notable es el hecho, que apunta en la misma dirección, de que, tras de establecer la plausibilidad física de (6), Fourier procede a demostrar su *covergencia.* En otras palabras, el símbolo empleado para presentar un fenómeno no sólo debe representarlo bien, sino que debe tener sentido al interior de la matemática, independientemente de lo que representa. Vemos aquí, en germen, el programa de aritmetización del análisis. No surge este programa de una incomodidad nacida de la vaguedad de los infinitésimos (Fourier los emplea constantemente sin pedir disculpas), sino de una transformación en la manera de concebir la relación entre los símbolos y sus referentes, entre las palabras y las cosas.

Cauchy, siguiendo el camino señalado por Fourier, convierte el problema de la convergencia de las series en la piedra angular de su reconstrucción rigurosa del cálculo, que adolece de una sola falla profunda: la circularidad de su definición de límite. *Si partimos de la existencia de los números racionales, resulta absurdo definir los números irracionales como límites de números racionales [como lo hizo Cauchy], puesto que a priori no podemos saber si además de los números racionales existen otros números*[8], explicó Weierstrass a sus estudiantes en 1886. La Academia de Ciencias de París le había enviado en 1882 el primer tomo de las Obras Matemáticas de Cauchy; presumiblemente es a éste a quien Weierstrass dirige su crítica. La primera versión de su teoría de los irracionales data del curso de invierno 1865–1886.

La circularidad de la presentación de Cauchy mantenía aún la dependencia del análisis respecto a la intuición geométrica, es decir, mantenía la simbiosis entre el sistema de símbolos y su dominio de aplicación, como la observamos en Bernoulli, y con un mayor grado de sofisticación, en Euler. En Cauchy el espíritu de Leibniz, aunque malherido, no había muerto aún. Weierstrass asestó el tiro de gracia: *el análisis debe conservarse puro de toda geometría*[9].

[8]Dugac, Pierre. *Op. cit.*, p. 87.
[9]Id. p. 72.