MISCELÁNEA MATEMÁTICA 25 (1997) 47–58 SMM

Origen y desarrollo del teorema de aproximación de Weierstrass

Cristóbal Vargas Jarillo

Departamento de Matemáticas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Instituto Politécnico Nacional

Karl Weierstrass (1815–1897) tenía 40 años de edad cuando publicó su primer artículo de matemáticas y 70 cuando publicó el artículo en el que tenemos interés, el que trata sobre el teorema de aproximación.

1 Aproximación por polinomios.

En los cursos de cálculo se nos enseña que una función analítica puede ser escrita como una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

la cuál converge uniformemente a la función f en un cierto intervalo.

Si se considera la sucesión $\{\sigma_n\}$ de sumas parciales de la serie de potencias, tenemos

$$\sigma_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que $\| f - \sigma_n \| < \varepsilon$ para cada $n >$ N. Podemos decir entonces que dado un intervalo existirá un polinomio que aproxima, uniformemente, a la función f arbitrariamente bien.

La pregunta natural es saber si esta aproximación se sigue cumpliendo para la función f cuando sólo es continua.

Nuevamente en los cursos de cálculo nos enseñan que en general no es posible aproximar f de esta manera, dado que las series de potencias representan funciones infinitamente derivables, mientras que una función continua no necesariamente es derivable.

De hecho, nos dan como ejemplo algo catastrófico, una función $h(x)$ que es infinitamente derivable en cualquier punto y que no puede ser escrita como

$$h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \text{ en } |x| < \varepsilon, \text{ para } \varepsilon > 0,$$

esta función es:

$$\begin{aligned} h(x) &= \exp(-1/x^2),\ x \neq 0 \\ h(0) &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, Weierstrass fue capaz de probar el siguiente teorema:

Sean a y b tales que $-\infty < a < b < \infty$ y supongamos que f es continua en $[a, b]$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ y un polinomio $p(x)$ de grado n tal que $\| f - p \| < \varepsilon$.

Es decir, que podemos aproximar a f uniformemente por polinomios.

La demostración se encuentra en [25].

Existen por supuesto muchas demostraciones de tan importante resultado. Una excelente referencia es el libro de Körner [11] y, de hecho, en la siguiente sección seguiremos las ideas de Körner, que a su vez siguen las de Weierstrass.

2 Ecuación del calor.

Joseph Fourier nació en 1768, a los 36 años de edad empezó a estudiar la propagación del calor y en 1807 presentó su trabajo a la Academia de Francia, el cual fue rechazado. Finalmente, en 1822 su trabajo fue publicado, prácticamente sin cambio alguno.

Para entonces los resultados físicos y matemáticos de su teoría ya tenían una aceptación general.

Así que Weierstrass se encontraba con un conocimiento profundo sobre la solución de la ecuación del calor:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,t) \tag{1}$$

para $x \in \mathbb{R}, t > 0$ y con condición inicial

$$\phi(x,t) \to G(x) \text{ si } t \to 0^+.$$

Este conocimiento le permitió saber que:

Si $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función acotada uniformemente continua, y si $\phi(x,t)$ es la convolución

$$\phi(x,t) = G * \left[\frac{1}{\sqrt{2kt}} E\left(\frac{1}{\sqrt{2kt}} x\right) \right],$$

donde $E(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(\frac{-x^2}{2})$, entonces ϕ es una función infinitamente derivable en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tal que:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y) \exp(-y^2/2kt) dy, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

y

i) $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = k \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,t)$

ii) $\phi(x,t) \to G(x)$ uniformemente en x si $t \to o^+$.

Esta es la herramienta que él usó para probar su teorema. La demostración en [11] sigue prácticamente las ideas de Weierstrass. Básicamente, la demostración se basa en el hecho de que la función

$$E_k(x) = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-k^2 x^2/2)$$

puede ser aproximada uniformemente por polinomios

$$Q_{2n}(x) = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=0}^{n} \left(\frac{-k^2 x^2}{2} \right)^r / r!$$

(se sugiere al lector dibujar $E_k(x)$, para algunos valores de k).

Después se usa el hecho de que la convolución de la función G con Q_{2n} converge a la convolución de G con $E_k(x)$, y la observación de que $G * Q_{2n}$ son polinomios.

Otros libros que mencionan este tipo de demostración son Colton [3] y John [10].

3 Polinomios trigonométricos.

Posteriormente vino un joven de apellido Fejer, el cual a los 19 años de edad dio una nueva demostración, ésta vino aproximadamente diez años después de la de Weierstrass, ver [6], [11], [26].

La herramienta principal de Fejer se basa en notar que si las sumas parciales

$$S_n(f,t) = \sum_{r=-n}^{n} \widehat{f}(r)\exp(irt)$$

de una serie de Fourier no convergen, sus promedios

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1} S_j(f,t),$$

se pueden comportar mejor y que un límite de Cesaro debe tomar el lugar del límite usual.

Además,

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-y)k_n(y)dy$$

donde

$$\begin{aligned} k_n(s) &= \frac{1}{n+1}\left[\frac{sen\frac{(n+1)s}{2}}{sen\frac{s}{2}}\right]^2, s \neq 0 \\ k_n(0) &= n+1. \end{aligned}$$

(Quizás el lector debería dibujar algunas de estas funciones $k_n(s)$).

Así, Fejer probó que si f es continua, se puede aproximar uniformemente por polinomios trigonométricos y estos a su vez por polinomios. Bosquejamos la prueba a continuación.

$f(t)$ se aproxima por $\sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt}$, y a su vez la exponencial e^{irt} se aproxima por $\sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!}$.

Entonces, el polinomio aproximante a f será de la forma

$$p(t) = \sum_{r=-n}^{n} a_r \sum_{k=0}^{m} \frac{(irt)^k}{k!}.$$

Los detalles pueden ser encontrados, por ejemplo, en [11] o ser suplidos por el lector.

4 Otras demostraciones.

En 1908 Landau [13] y Lebesgue [17] dieron sendas demostraciones al Teorema de Wierstrass. La demostración de Landau aparece en textos como [15] y la de Lebesgue en Courant y John [4] y Hobson [7]. En Hobson encontramos referencias a otras demostraciones por Runge, Picard, Volterra, Mittag–Leffler y también Lerch. Otra demostración más, en base a la teoría de semigrupos, se puede encontrar en el libro de análisis funcional de Riesz y Sz.–Nagy [22].

5 Bernstein.

Desafortunadamente estas demostraciones no son constructivas, pero Bernstein en 1912 [1] dió una demostración constructiva.

Restringiéndonos al $[0,1]$ los polinomios de Bernstein vienen dados por:

$$(Bnf)(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n}{j} x^j(1-x)^{n-j};\ n = 1, 2, \ldots$$

y estos convergen uniformemente a f en $[0,1]$.

Una propiedad importante de estos polinomios es que se asemejan mucho a la función f, en el sentido de que si $f(x)$ es k veces derivable en $[0,1]$, entonces

$$\| f^{(k)} - p_n^{(k)} \| \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Claro que en esta vida nada es gratis, y la bondad de los polinomios de Bernstein se paga con la lentitud con que la sucesión converge.

Para ver esta debilidad, consideremos el caso en que $f(x) = x^2$; es posible probar que

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(x) - x^2] = x(1-x),$$

entonces $B_n(x) - x^2 \cong \frac{1}{n}x(1-x)$ para n grande.

Así que el error no decrece rápidamente. Para $n = 1000$ todavía tendríamos errores en la tercera cifra decimal.

Para casi todas las aplicaciones estos polinomios no son de mucha utilidad y otras herramientas tienen que ser usadas. Una de éstas, en la norma del sup, es el algoritmo de Remes [20].

En general, para aproximar funciones se utilizan muy diversas herramientas y éstas dependen generalmente de la norma en uso. Excelentes referencias para este tema son [5], [21], [14], una referencia más moderna es [9].

Las necesidades han llevado a buscar extensiones y generalizaciones al teorema de Weierstrass. Una de estas generalizaciones es debida a M.H. Stone [23], la cuál ha tenido importancia teórica, pero desde el punto de vista de aplicaciones no es muy útil. Otras herramientas de aproximación que han sido usadas y con mucho éxito son los Splines (Cerchas en español), los elementos finitos, las funciones racionales y los aproximantes de Padé [2], [9], [24].

Otra línea fue desarrollada por Korovkin [12], al notar que los polinomios de Bernstein podían ser vistos como operadores lineales monótonos [9].

6 Núcleos.

Las diferentes demostraciones del Teorema de Weierstrass, a través del tiempo, han demostrado que tienen cosas en común y es así que ahora se puede hablar de una demostración basada en las propiedades de núcleos o sucesiones de Dirac (esperamos que el lector haya dibujado las funciones k_n de Fejer y las E_k de la ecuación del calor).

En esta sección seguiremos los libros de Lang [15] y [16].

La gente aprendió que las propiedades importantes de las funciones E_n y las k_n, eran las tres siguientes:

i) $k_n(x) \geq 0$, para todo n y todo x.

ii) Cada $k_n(x)$ es continua y

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_n(t)dt = 1$$

iii) Dados ε y $\delta > 0$, existe N tal que si $n \geq N$, entonces

$$\int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{\infty} k_n < \varepsilon.$$

Y si para una función continua a trozos se define f_n como la convolución de f y k_n; es decir,

$$f_n(x) = k_n * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)k_n(x-t)dt,$$

entonces la sucesión f_n aproxima a f en el siguiente sentido.

Si f es continua a trozos y acotada en un compacto $S \subset \mathbb{R}$, entonces f_n converge a f uniformemente en S.

Las funciones k_n se llaman núcleos (Kernel en inglés).

El teorema de Weierstrass se obtiene ahora, considerando los núcleos adecuados. Algunos ejemplos son:

a) Landau

$$\begin{aligned} k_n(t) &= \frac{(1-t^2)^n}{c_n}, \quad |t| \le 1 \\ k_n(t) &= 0, \quad |t| > 1 \end{aligned}$$

y $c_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$ tal que

$$\int_{-1}^{1} k_n(t)dt = 1$$

b) Fejer o Cesaro

$$k_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \frac{sen^2 \frac{nt}{2}}{sen^2 \frac{t}{2}}$$

c) Poisson

Para $0 \le r < 1$

$$k_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

aquí $r \to 1$ en lugar de $k \to \infty$.

d) Ecuación del calor

Para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$

$$k_t(x) = k(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t}$$

aquí $t \to 0$ en lugar de $n \to \infty$.

Una sucesión de funciones $\{k_n\}$ que satisfacen i), ii) y iii) se llama una sucesión de Dirac. Las funciones k_n, también son llamadas funciones suavizadoras (mollifiers en inglés) o regularizadoras ya que las f_n obtenidas son funciones más suaves que f.

Las funciones f_n reciben también el nombre de integrales singulares, ver [19].

De esta última referencia listamos las integrales singulares siguientes:

a) Landau

$$L_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^1 [1 - (t - x)^2]^n f(t) dt, \ 0 < x < 1$$

b) Poisson

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r cos(t - x) + r^2} f(t) dt, \ 0 < r < 1$$

c) Vallée Pousin

$$V_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} cos^{2n} \left\{ \frac{t - x}{2} \right\} f(t) dt, \ -\pi < x < \pi$$

d) Kantorovič

$$k_n(x) = (n + 1) \sum_{k=0}^{n} c_n^k x^k (1 - x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt, \ 0 < x < 1$$

7 Métodos de Partículas.

En años más recientes, la solución a problemas relacionados con muchos cuerpos ha llevado a la búsqueda de nuevos métodos numéricos.

Una clase de estos métodos, útiles en plasmas, astrofísica, mecánica estadística y otras áreas, lleva el nombre de método de partículas (Particle Method en inglés).

Muchas de las propuestas en este tipo de métodos han surgido gracias a consideraciones puramente físicas. Tan es así que estos métodos fueron considerados por muchos como algo ajeno al análisis numérico.

Aquí sólo describimos brevemente un ejemplo, el lector podrá profundizar viendo las referencias [8], [18].

Consideremos que tenemos los valores de una función $f(x)$ solamente en los puntos $x_j = jh \quad (j = 0, \pm 1, \ldots)$. Podemos obtener una función interpolada $\tilde{f}$ por medio de

$$\tilde{f}(x) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x_j) L(x - x_j, h),$$

donde

$$L(u,h) = \begin{cases} \frac{1-|u|}{h}, & |u| \leq h \\ 0, & |u| \geq h, \end{cases}$$

para h suficientemente pequeña

$$\tilde{f}(x_j) = f(x_j).$$

Esto sugiere definir un núcleo interpolador como:

$$f_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x-x',h) f(x')dx' \tag{2}$$

Ahora supongamos que deseamos resolver la ecuación de continuidad de dimensión uno

$$\frac{\partial \rho(x',t)}{\partial x'} + v\frac{\partial \rho(x',t)}{\partial x'} = 0, \ -\infty < x' < \infty$$

con condición inicial

$$\rho(x',0) = G(x').$$

Multiplicando por el núcleo de nuestro interés, de la forma $W(x-x',h)$, y tomando la integral se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x-x',h)\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x'}\right] dx' = 0$$

Integrando por partes obtenemos

$$\frac{\partial \rho_h}{\partial t} + v\frac{\partial \rho_h}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

la condición inicial queda como:

$$\rho_h(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x-x',h)G(x')dx' \tag{4}$$

Si ahora usamos el núcleo interpolante (2), tendremos $\rho_h(x_i) = \rho(x_i)$ y (3) queda, aproximando la derivada, como

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x_i,t) + v\frac{[\rho(x_{i+1},t) - \rho(x_i,t)]}{h} = 0. \tag{5}$$

Ahora tenemos un sistema de ecuaciones ordinarias (5), sujeto a la condición inicial (4) que se puede aproximar por alguna cuadratura.

Otros núcleos pueden ser usados, aquí sólo queremos hacer ver que en el fondo estos métodos lo que hacen es utilizar integrales singulares y aproximarlas numéricamente, lo que no significa que es un trabajo sencillo, pero se espera que los problemas obtenidos sean más tratables.

Aquí terminamos este escrito, esperando haber creado en el lector la necesidad de leer algunas de las referencias citadas.

8 Agradecimientos.

A la M. en C. Araceli Bonifant, por la copia del artículo original de Weierstrass.

Referencias

[1] S.N. Bernstein; *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes de degré donné.* Mém. Acad. Roy. Belg. 4, 1–104 (1912).

[2] C. Brezinski; *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer–Verlag (1991).

[3] D. Colton; *Partial Differential Equations*, Random House (1988).

[4] R. Courant, F. John; *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Limusa (1971).

[5] P. Davis; *Interpolation and Approximation*, Blaisdell, (1963).

[6] L. Fejer; *Untersuchunger über Fouriersche*, Reihen. Math. Ann. 58, 51–69(1904).

[7] E.W. Hobson; *The theory of Functions or a Real Variable*, Vol. II, 2nd ed., Cambridge (1926).

[8] R.W. Hockney, J.W. Eastwood; *Computer simulation using particles*, Institute of Physics Publishing (1994).

[9] G. Hämmerlin, K. H. Hoffmann; *Numerical Mathematics*, Springer–Verlag (1991).

[10] F. John; *Partial Differential Equations*, Springer–Verlag (1982).

[11] T. W. Körner; *Fourier Analysis*, Cambridge (1988).

[12] P. P. Korovkin; *Linear operators and approximation theory*, Hindustan Publ. Corp. (1960).

[13] E. Landau; Rend. di. circ. mat. di Palermo. Vol. XXV, 337(1908).

[14] P.–J. Laurent; *Approximation et optimization*, Hermann (1972).

[15] S. Lang; *Introducción al análisis matemático*, Addison–Wesley Iberoamericana (1990).

[16] S. Lang; *Real and Functional Analysis*, 3d edition, Springer Verlag (1993).

[17] H. Lebesgue; *Sur l'approximation des fonctions*, Bulletin d. Sc. Mat. (2), Vol. XXII (1) (1898).

[18] J. J. Monaghan; *Why Particles Methods Work*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol. 3, 4, 422–433(1982).

[19] I. P. Natanson; *Theory of functions of a Real Variable*, Vol. II, Ungar (1967).

[20] E. Remes; *Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tchebycheff*, C.R. Acad. Sci. Paris 199, 337–340 (1934).

[21] J.R. Rice; *The approximation of functions*, Vol. I, Addison Wesley (1964).

[22] F. Riesz, B. Sz.–Nagy; *Functional Analysis*, Ungar (1965).

[23] M. H. Stone; *The generalized Weierstrass approximation theorem*, Math. Magazine 21, 167–184 y 237–254 (1948).

[24] J. Stoer, R. Bulirsch; *Introduction to Numerical Analysis*, 2^{nd} ed, Springer–Verlag (1993).

[25] K. Weierstrass; *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller*, Argumente. Sitzg. ber. Kgl. Preub. Akad. d. Wiss–Berlin, 663–689 und 789–805. (1885). Reimpresos en Mathematische Werke, Vol. III, p. 1, Berlin, Mayer und Müller.

[26] A. C. Zaanen; *Continuity, Integration and Fourier Theory*, Springer–Verlag (1989).