MISCELÁNEA MATEMÁTICA **25** (1997) 39–46 SMM

El teorema de aproximación de Weierstrass

Roberto Murillo

Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Cauchy, en su *Cours d'analyse* [1], propone una demostración del siguiente teorema:

El límite de una sucesión de funciones continuas es continua

Sin embargo, como observó Abel en 1826, este teorema *admite excepciones.* Esta es una manera cautelosa de decir que el teorema es falso y que son necesarias hipótesis adicionales.

La hipótesis que faltaba era la de *convergencia uniforme*, sin embargo, en esta época, las nociones de convergencia, continuidad, diferenciabilidad y aún la de función estaban en plena formación. No fue sino hasta veinte años después de la aparición del *Cours d'analyse* que la idea de convergencia uniforme empezó a tomar forma con los trabajos, entre otros, de Seidel, Stokes y Weierstrass.

Karl Weierstrass es reconocido, sobre todo, por el nivel de rigor que introdujo a las matemáticas contemporáneas. Este rigor, en palabras de Felix Klein [2, p, 286]: *Consiste principalmente en su tratamiento cuidadoso de las series infinitas. Aquí sobresale el concepto de convergencia uniforme, que después se convertiría en una importante herramienta para las demostraciones.*

Weierstrass a su vez, fue inspirado al estudio de las series infinitas por Christof Gundermann (1798–1852), su profesor en la Universidad de Müster [3, p. 204 y 258]. Lo que demuestra la importancia de un buen profesor en la formación de un matemático. Punto que el mismo Weierstrass probaría a travez de alumnos como Cantor, Hölder, Sonia Kowalewski, Mittag–Leffler y Max Planck entre otros.

Un ejemplo de la importancia de la convergencia uniforme se encuentra en el teorema, demostrado por Weierstrass en 1841, que asegura que el límite uniforme de una sucesión de funciones analíticas es analítica [4, ver Vol. I, pag, 67]. Sin embargo, en ese artículo no se define explícitamente el concepto de convergencia uniforme. Según Birkhoff [5, pag. 71–74], la primera discusión de este concepto fue publicada por Stokes en 1847.

En vista del Teorema de Weierstrass mencionado en el párrafo anterior, es decepcionante que el límite uniforme de una sucesión de funciones reales diferenciables no sea necesariamente diferenciable.

En 1885, Weierstrass demostró un teorema más sorprendente (Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente [4]).

Cualquier función real continua, definida en un intervalo cerrado y acotado, es el límite uniforme de una sucesión de polinomios.

Si recuerda la construcción, debida al mismo Weierstrass, de una función continua pero no diferenciable en ningún punto, podrá apreciar la magnitud de ésta aseveración. Incluso esa función puede aproximarse uniformemente con polinomios (en intervalos cerrados y acotados).

Para los analistas profesionalistas, este teorema resulta ser de los más útil al permitirles, por ejemplo, simplificar la demostración de ciertos teoremas. Si la propiedad a demostrar se preserva al tomar límites uniformes, es suficiente demostrar el teorema para polinomios.

Como consecuencia, se ha dedicado mucho esfuerzo a generalizar este teorema, con la esperanza de poder aplicarlo a situaciones más generales. En dimensiones mayores a uno, en lugar de intervalos cerrados y acotados se usa la noción más general de conjunto compacto. La clase de funciones polinomiales puede reemplazarse por otros tipos de funciones. Más adelante mencionaremos algunas de estas generalizaciones.

Los polinomios de aproximación de Weierstrass no son los del Teorema de Taylor. Weierstrass no exige que sus polinomios coincidan con la función en ningún punto y los coeficientes de un polinomio P_n no tienen, en principio, relación con los de P_{n+1}. Es esta flexibilidad para escoger los polinomios lo que se le permite aproximar cualquier función continua sin necesidad de usar la diferenciabilidad.

Presentaremos una demostración elemental del Teorema de Aproximación de Weierstrass y algunos comentarios sobre otras demostraciones. Pero antes, demostraremos un lema.

Lema 1 (E. Schenkman [6] pp. 65–66) *Si* $0 < a < b < c$ *y dados* $0 < \varepsilon < \frac{m}{2}$*, existe un polinomio* $Q(x)$*, creciente en* $[-c, 0]$*, decreciente en* $[0, c]$*, tal que* $Q(x)$ *está entre* $m - \varepsilon$ *y* m *cuando* $x \in [-a, a]$ *y tal que* $Q(x)$ *está entre* 0 *y* ε *cuando* $x \in [-c, -b] \cup [b, c]$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $m = 2$.

Observe que

$$\int_0^1 2y(n+1)(1-y^2)^n dy = 1\,,$$

como $y \leq 1$ en el intervalo $[0, 1]$, entonces

$$\int_0^1 (n+1)(1-y^2)^n dy > 1\,,$$

sea $k_n < n + 1$ tal que

$$\int_0^1 2k_n(1-y^2)^n dy = 1\,,$$

sea

$$P_n(z) = \int_z^1 2k_n(1-y^2)^n dy\,.$$

Es fácil comprobar que P_n es un polinomio en z tal que

$$P_n(-1) = 2,\ P_n(0) = 1,\ P_n(1) = 0\,,$$

y $P_n(z)$ es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

Observe también que, si $\lambda \in (0, 1)$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\lambda^n = 0\,.$$

Entonces, si $\varepsilon \in (0,1)$ y si $\delta \in (0,1)$, existen n tal que para todo $y \in [\delta, 1]$,

$$(n+1)(1-y^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Para esa n tenemos $P_n(\delta) < \varepsilon$. de manera análoga, existe una n tal que $P_n(-\delta) > 2 - \varepsilon$. Por lo tanto, si $\varepsilon \in (0,1)$ y si $\delta \in (0,1)$, entonces existe n tal que, para $z \in [-1, -\delta]$, tenemos $P_n(z) \in [2 - \varepsilon, 2]$ y para $z \in [\delta, 1]$, tenemos $P_n(z) \in [0, \varepsilon]$.

Si $\varepsilon \in (0,1)$ y $0 < a < b < c$, sea $\alpha \in (0, \frac{1}{c^2 - a^2})$, sea $\beta \in (\alpha a^2, \alpha b^2)$ y sea

$$\delta = \min\left\{\beta - \alpha a^2, \alpha b^2 - \beta\right\}.$$

Entonces, el polinomio $Q(x) = P_n(\alpha x^2 - \beta)$ satisface las condiciones del teorema. ■

La siguiente demostración del Teorema de Aproximación de Weierstrass es debida a E. Schenkman [6, pp. 65–66].

Teorema 1 (Aproximación de Weierstrass) *Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ tal que,* para todo $x \in [a,b]$

$$\|f(x) - P(x)\| < \varepsilon.$$

Demostración: Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $f([a,b]) \subset [0,M]$, para algún $M > 0$. Si f es continua en $[a,b]$, entonces es uniformemente continua en el mismo intervalo y existe k tal que

$$\|x - y\| < \frac{b-a}{k} \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{M}{10}.$$

Sea $a = x_0, x_1, \ldots, x_k = b$, una partición del intervalo $[a,b]$ de norma $\frac{b-a}{k}$. Considere los subintervalos de esta partición contenidos en $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}M, M\right]\right)$ y sea A su unión.

Entonces, A se puede escribir como una unión disjunta de r intervalos cerrados $I_1, \ldots, I_r$, cada I_i flanqueado por intervalos H_i y J_i de longitud $\frac{b-a}{2k}$ y tales que

$$f(H_i \cup J_i) \subset [0.4M, 0.6M].$$

Aplicando el lema con $m = \frac{1}{2}M$ y $\varepsilon = \frac{M}{10r}$, para cada i existe un polinomio Q_i tal que $Q_i(x) \in \left[\frac{1}{2}M - \varepsilon, \frac{1}{2}M\right]$ si $x \in I_i$ y $Q_i(x) \in [0, \varepsilon]$ en el complemento de $H_i \cup I_i \cup J_i$.

Sea $P_1(x) = Q_1(x) + \cdots + Q_r(x)$, entonces

$$(f - P_1)([a,b]) \subset [0, 0.6M].$$

Inductivamente, para cada k existen polinomios $P_1, \dots, P_k$ tales

$$(f - P_1 - \cdots - P_k)([a,b]) \subset [0, 0.6^k M].$$

Si $0.6^k < \varepsilon$, entonces $P = P_1 + \cdots + P_k$ es el polinomio buscado.

■

La demostración original de Weierstrass construye una sucesión de polinomios no negativos Q_n tales que $\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1$ y $\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = 0$ uniformemente en $\delta \leq \|x\| \leq 1$. Define entonces

$$P_n(x) = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt$$

(una convolución) y demuestra que la sucesión de polinomios P_n converge uniformemente a f a $[0,1]$. Puede encontrar esta demostración en [7].

Existen muchas otras demostraciones de este teorema. Una de ellas utiliza un Teorema de Fejér sobre la convergencia de la sucesión de promedios de la Serie de Fourier de una función periódica. Con la transformación $x = \cos\theta$, una función f en el intervalo $[-1,1]$ se convierte en una función par h en $[-\pi,\pi]$ y Fejér la aproxima con la media aritmética de la serie de Fourier. Esta aproximación resulta ser un polinomio en $\cos\theta$.

Otra demostración muy popular se debe a S. Bernstein [8]. Él construye los polinomios

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\binom{n}{k}(x-a)^k(b-x)^{n-k},$$

para $x \in [a,b]$ y demuestra que convergen uniformemente a f en ese intervalo. No sólo eso, si f es de clase $\mathbb{C}^p$, las derivadas $B_n^{(p)}$ convergen uniformemente a la derivada $f^{(p)}$.

El Teorema de Aproximación de Weierstrass se extiende fácilmente al conjunto $C([a,b])$ de las funciones continuas en $[a,b]$ con valores en los complejos. Podemos parafrasear el teorema diciendo que las combinaciones lineales finitas del conjunto $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ son densas en el conjunto $C([a,b])$, (con la norma del supremo). Los siguientes teoremas son generalizaciones de este resultado. Los dos primeros pueden encontrarse en [9].

Teorema 2 (Müntz–Szasz, 1916) *Si* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$, *entonces las combinaciones lineales finitas del conjunto* $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda^2}, x^{\lambda_3}, \ldots\}$ *son densas (con la norma del supremo) en el conjunto de funciones continuas* $C([a,b])$, *si y sólo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty\,.$$

Al tratar de extender el Teorema de Aproximación de Weierstrass al conjunto $C(K)$ de funciones complejas continuas definidas en un compacto $K \subset \mathbb{C}$, observamos que, si en interior de K es no vacío, el límite uniforme de los polinomios debe ser analítico en K^0, entonces debemos añadir esa hipótesis a las funciones que queremos aproximar.

Curiosamente, también necesitamos una condición extra para el conjunto K: Su complemento debe ser conexo. Puede encontrar en Rudin [9] un ejemplo de la necesidad de esta hipótesis. La suficiencia fue demostrada por S. N. Mergelyan en 1952.

Teorema 3 (Mergelyan) *Si K es un conjunto compacto en $\mathbb{C}$ cuyo complemento es conexo y si $f\colon K \to \mathbb{C}$ es continua en K y analítica en K^0, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $P(z)$ tal que, para todo $x \in K$*

$$\|f(z) - P(z)\| < \varepsilon\,.$$

En 1948, M. H. Stone demostró una generalización del teorema de aproximación de Weierstrass que caracteriza otras clases de funciones que pueden rreemplazar a los polinomios como funciones aproximadoras. Para enunciar ése teorema es necesario dar algunas definiciones.

Dado un espacio topológico X, denotaremos por $C(X)$ al conjunto de funciones reales y continuas definidas en X.

Una familia $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}(X)$ es una *álgebra*, si para todo $f, g, \in \mathcal{A}$ y para todo $c \in \mathbb{R}$, tenemos: $f + g \in \mathcal{A}$, $fg \in \mathcal{A}$ y $cf \in \mathcal{A}$.

Dada una coleccón $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}(X)$, la *subágebra $\mathcal{A}(D)$ generada por $\mathcal{D}$*, es la más pequeña de las subálgebras de $\mathbb{C}(X)$ que contienen a $\mathcal{D}$.

La *Cerradura uniforme de $\mathcal{A}$* es el conjunto $\overline{\mathcal{A}}$ de las funciones en $\mathbb{C}(X)$ que pueden aproximarse uniformemente mediante elementos de $\mathcal{A}$. La colección $\mathcal{D}$ *separa puntos* si dados cualesquiera dos puntos $x \neq y$ en X, existe una función $f \in \mathcal{D}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Tenemos entonces:

Teorema 4 (Stone–Weierstrass) *Si K es un espacio compacto y Hausdorff y $D \subset \mathbb{C}(K)$, donde $\mathcal{D}$ separa punto y contiene la función idénticamente igual a 1, entonces*

$$\overline{\mathcal{A}(\mathcal{D})} = \mathbb{C}(K)\,.$$

Algunas generalizaciones del Teorema de Stone-Weierstrass al caso en que X no es compacto pueden encontrarse en [10].

Como puede verse, este Teorema ha generado mucha actividad, desde su publicación hasta nuestros días. En [11] se exponen otros resultados relacionados y algunas aplicaciones.

Referencias

[1] A. L. Cauchy. *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*, Ser. 2 **3**. Gauthier-Villars, Paris, pp. 1908–1938.

[2] F. Klein. *Entwicklung der mathematik im 19ten jahrhundert*, Springer, Berlin 1927: Chelsa, New York 1950

[3] U. Bottazzini. *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, New York 1986.

[4] K. Weierstrass. *Mathematische werke von Karl Weierstrass*, 7 vols. Mayer and Muller, Berlin 1894–1927.

[5] G. Birkhoff. *A source book in classical analysis*, Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts 1973.

[6] E. Schenkman. *The Weierstrass approximation theorem*, Americam Mathematical Monthly **79**, (1972).

[7] W. Rudin. *Principios de Análisis Matemático*, Mc. Graw Hill (1980).

[8] S. Bernstein. *Démostration du theéorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilitités*, Comm. Soc. Math. Kharkoff (2) **13**, pp. 1–2 (1912).

[9] W. Rudin. *Real and complex analysis*, Mc. Graw Hill 1987.

[10] S. Willard. *General topology*, Addison-Wesley 1970.

[11] P. J. Davies. *Interpolation and approximation*, Ed. Dover (1975).