MISCELÁNEA MATEMÁTICA **26** (1997) 1–16 SMM

Inducción y Recursión

José Alfredo Amor Montaño
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias-UNAM

El objetivo de este trabajo es dar una justificación rigurosa del método general de prueba conocido como *inducción* y del método general de definición conocido como *recursión*, que ocurren frecuentemente tanto en lógica matemática como en otras ramas de la matemática. Es muy importante tener claras, algunas hipótesis bajo las cuales estos métodos son válidos.

En lo que sigue se usará la teoría de los conjuntos de un modo intuitivo, así como ejemplos que se suponen conocidos, de aritmética, álgebra y lógica.

1 Inducción.

Sea U un conjunto cualquiera. Sea F un conjunto de operaciones sobre U (es decir, $f \in F \Longrightarrow$ existe $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ tal que $f: U^n \to U$).

Definición 1 Sea $X \subseteq U$. Decimos que X *está cerrado bajo* F si y sólo si para todo $f \in F$ (pongamos f de n argumentos), y para todos los $x_1, \ldots, x_n \in X$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Definición 2 Sea $B \subseteq U$. Un subconjunto $X \subseteq U$ es $B-F$*-inductivo* si y sólo si

i) $B \subseteq X$.

ii) X está cerrado bajo F.

Ejemplos

1. Trivialmente $U \subseteq U$ es $B - F$-inductivo, para cualquier $B \subseteq U$ y cualquier conjunto F de operaciones sobre U.

2. Sea U el conjunto Expr. de E-expresiones o sucesiones finitas de símbolos de un lenguaje lógico E. Sea $F = \{\mathrm{Neg}, \mathrm{Disy}\}$ donde $\mathrm{Neg}(\alpha) = ((\neg\alpha)), \mathrm{Disy}(\alpha, \beta) = ((\alpha \vee \beta))$. Entonces el conjunto de las fórmulas del lenguaje $\Phi(E)$ es $E - F$-inductivo. En lo que sigue, $\mathbb{Z}$ denota al conjunto de los números enteros; $\mathbf{N}$ denota al conjunto de los números naturales y $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales.

3. Sea $U = \mathbb{Z}$, $F = \{s\}$, $B = \{o\}$ donde s es la función (operación de un argumento) sucesor. Entonces $\mathbf{N}$ es $B - F$-inductivo, es decir $\{o\} - \{s\}$-inductivo.

4. Sea $U = \mathbb{R}$, $F = \{s, p\}$, $B = \{o\}$ donde s es la operación *sucesor* $s(r) = r + 1$ y p es la operación *predecesor* $p(r) = r - 1$ entonces $\mathbb{Z}$ es $B - F$-inductivo.

5. Sea $U = \mathbb{R}, B = \{o\}, F = \{f, g\}$ donde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x \cdot y$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x + 1$. Entonces $\mathbf{N}$ es un conjunto $\{o\} - \{f, g\}$-inductivo.

6. Sea $G = \langle G, \cdot, e\rangle$ grupo generado por un conjunto $B \subseteq G$ de generadores, $F = \{\cdot\}$ entonces G es $B - F$-inductivo.

7. Sea $U = \{f \mid f: A \to \mathbb{R} \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}\}$, las funciones con dominio y rango contenido en $\mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} B &= \{I \mid I: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, \forall x(I(x) = x)\} \cup \\ &\cup \left\{ \begin{array}{c} C_r \mid C_r: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, \\ \forall x \in A(C_r(x) = r), r \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

y $F = \{$Suma de funciones, Multiplicación de funciones, División de funciones, Extracción de raíz de funciones$\}$, conjunto de operaciones *sobre* U. Entonces el conjunto de todas las funciones algebraicas $\mathbf{A}$, con dominio y rango subconjuntos de $\mathbb{R}$, es $B - F$-inductivo.

Si C es una colección no vacía de conjuntos, $\cap C$ denota la intersección de todos los conjuntos de C; es decir,

$$\cap C = \{w \mid \forall X \in C, w \in X\}$$

8. Si C es una colección $\neq \emptyset$ de conjuntos $B-F$-inductivos, entonces $\cap C$ es un conjunto $B - F$-inductivo, pues:

i) $B \subseteq X$ para todo $X \in C$, de donde $B \subseteq \cap C$.

ii) Si $f \in F$ (de n argumentos) y $x_1, \ldots, x_n \in \cap C$, entonces $x_1, \ldots, x_n \in X$ para todo $X \in C$, de donde $f(x_1, \ldots, x_n) \in X$ para todo $X \in C$ y entonces $f(x_1, \ldots, x_n) \in \cap C$.

Así pues, $\cap C$ es $B - F$-inductivo y concluimos que:

Dado $B \subseteq U$ y F conjunto de operaciones sobre U, siempre hay un menor (respecto $\subseteq$) conjunto $B - F$-inductivo. La familia de todos los conjuntos $B - F$-*inductivos* no es vacía porque $U \in C$.

Lo anterior debe ser obvio, pues la intersección de conjuntos es el mayor ($\subseteq$), contenido en todos; pero si necesariamente es uno de ellos, entonces es el menor ($\subseteq$) de todos ellos.

Definición 3 Dados U, B y F como antes y C la colección de *todos* los conjuntos $B - F$-inductivos, llamamos B^* a $\cap C$, que es el menor conjunto $B - F$-inductivo y lo llamamos *el* conjunto *generado* por F sobre B.

En el ejemplo 2) $E^* = \Phi(E)$. En el ejemplo 3) $\{o\}^* = \mathbb{N}$. En el ejemplo 4) $\{o\}^* = \mathbb{Z}$ y en el ejemplo 7) $B^* = A$. Nótese que en cada caso el asterisco $*$ depende de la F correspondiente.

Así pues, por lo anterior, tenemos que, si Xes un conjunto $B - F$-inductivo cualquiera, entonces $B^* \subseteq X$, por ser B^* el menor $B - F$-inductivo en el sentido de la relación de orden $\subseteq$.

1.1 El Principio de Inducción.

Teorema 1 Principio de Inducción (para $B - F$-inductivos). *Dados $U, B \subseteq U$ y F conjunto de operaciones sobre U, si X es un conjunto $B - F$-inductivo ($B \subseteq X$ y X cerrado bajo F), entonces $B^* \subseteq X$.* ■

Ejemplo 1 Principio de Inducción Matemática, con $U = \mathbf{N}$, $B = \{o\}$, $F = \{s\}$. Sea $X \subseteq \mathbf{N}$; si $0 \in X$ (es decir, $\{o\} \subseteq X$) y $\forall y \in X$, $s(y) \in X$ (es decir, X es cerrado bajo $\{s\}$) entonces $\mathbf{N} \subseteq X$ (es decir, $\mathbf{N} = \{o\}^* \subseteq X$) y entonces $\mathbf{N} = X$.

Ejemplo 2 Principio de Inducción para Fórmulas $\Phi(E)$ con $U = \mathrm{Expr}$, $B = E$ y $F = \{\mathrm{Neg}, \mathrm{Disy}\}$.

Sea $X \subseteq \mathrm{Expr}$; si $E \subseteq X$ y X cerrado bajo $\{\mathrm{Neg}, \mathrm{Disy}\}$ entonces $\Phi(E) = B^* \subseteq X$. Usualmente X es el conjunto de expresiones que cumplen una propiedad, tal que se quiere probar que todas las fórmulas de $\Phi(E)$ cumplen esa propiedad. Entonces se prueban dos cosas: que todas las fórmulas de E cumplen la propiedad ($E \subseteq X$) y que si α y β cumplen la propiedad entonces $\mathrm{Neg}(\alpha)$ y $\mathrm{Disy}(\alpha, \beta)$ cumplen la propiedad (X cerrada bajo $\{\mathrm{Neg}, \mathrm{Disy}\}$). Es común llamar a estas dos pruebas: paso base y paso inductivo.

Otros ejemplos. En teoría de conjuntos y en lógica, para los términos, para las fórmulas, y para cualquier conjunto $B - F$-inductivo *mínimo ó generado por F sobre B.*

Definición 4 Dados U, B y F como antes, definimos:

$B_0 = B$

$\forall n \in \mathbf{N}$, $B_{n+1} = B_n \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in B_n$ y $f \in F$ (de n argumentos) $\}$.

Definición 5 $B_* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n$.

Observación 1 $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n = \bigcup \{B_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ es otra notación.

Teorema 2 *Dados U, B y F como antes, entonces: $B^* = B_*$.*

Demostración: $\subseteq$) B_* es $B-F$-inductivo pues claramente: $B = B_0 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n = B_*$ y si $f \in F$ de n argumentos y $a_1, \ldots, a_n \in B_* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n$ entonces hay un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $a_1, \ldots, a_n \in B_{n_0}$ pues se observa que

$$B = B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots .$$

Así pues, $f(a_1,\ldots,a_n) \in B_{n_0+1} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n = B_*$. Así pues $B^* \subseteq B_*$ ya que B^* es el menor ($\subseteq$) de los $B-F$-inductivos, por Principio de Inducción para $B-F$-inductivos.

$\supseteq$) Veamos que $B_n \subseteq B^*$, por inducción matemática sobre $n \in \mathbf{N}$: $B_0 = B \subseteq B^*$ pues B^* es $B-F$-inductivo.

Supongamos $B_n \subseteq B^*$. Como

$$B_{n+1} = B_n \cup \{f(a_1,\ldots,a_n) \mid a_1,\ldots,a_n \in B_n \text{ y } f \in F\}$$

y como $B_n \subseteq B^*$ y B^* es $B-F$-inductivo (cerrado bajo F) entonces

$$\{f(a_1,\ldots,a_n) \mid a_1,\ldots,a_n \in B_n \text{ y } f \in F\} \subseteq B^*$$

por lo tanto $B_{n+1} \subseteq B^*$.

Así para toda $n \in \mathbf{N}$, $B_n \subseteq B^*$; de donde $B_* = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n \subseteq B^*$. ∎

Supongamos que C está generado a partir del conjunto $B = \{a, b\}$ por la operación binaria f y la operación unaria g. $F = \{f, g\}$. Recuerde la definición de B_n, para $n \in \mathbf{N}$. Entonces $C = B^* = B_*$.

i) Enumere todos los elementos de B_2. ¿Cuántos son a los más?

ii) ¿Cuántos elementos a los más puede tener B_3?

iii) ¿Cuántos elementos tiene B_n?

2 Recursión.

Tres ejemplos de definición.

I) Quiero definir *sumar 3*, en $\mathbf{N}$; a esta definición llamémosla $A_3\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Tengo que $\mathbf{N}$ está generado por $\{s\}$ sobre $\{o\}$. Quiero: $A_3(o) = 3$ y $\forall n \in \mathbf{N}$, $A_3(s(n)) = s(A_3(n))$. Tengo $T\colon \{o\} \to \mathbf{N}$ tal que $T(o) = 3$ (bien definida). Tengo $s\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tal que $s(n) =$ el sucesor de n (bien definida).

Entonces ¿A_3 queda bien definida?

II) Quiero definir *la valuación* h_v en $\Phi(E)$, llamémosla $h_v\colon \phi(E) \to \{0,1\}$. Tengo que $\Phi(E)$ está generado por $\{\text{Neg}, \mathit{Disy}\}$ sobre E.

Tengo dada $v: E \to \{0,1\}$ valuación cualquiera de símbolos, (a cada símbolo le asocia 0 o 1).

Los valores 0 y 1 pueden pensarse intuitivamente como *falso* y *verdadero* respectivamente.

Quiero $h_v(P) = v(P)$, $\forall P \in E$ y quiero $h_v((\neg\alpha))$ = lo contrario de $h_v(\alpha)$ y $h_v((\alpha \vee \beta))$ = el máximo de entre $h_v(\alpha)$ y $h_v(\beta)$.

Sea $NO: \{0,1\} \to \{0,1\}$ tal que $NO(x) = 1 - x$. Sea $D: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ tal que $D(x,y) = \max\{x,y\}$.

Así pues:

$$\begin{cases} h_v(P) = v(P), \ \forall P \in E \\ h_v((\neg\alpha)) = 1 - h_v(\alpha) \\ h_v((\alpha \vee \beta)) = D(h_v(\alpha), h_v(\beta)) \end{cases}$$

Entonces dada v, ¿h_v está bien definida?

III) Quiero definir $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que:

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(s(n)) = h(n) + 1 \\ h(p(n)) = h(n) + 2 \end{cases}$$

Tengo que $\mathbb{Z}$ está generado por $\{s,p\}$ sobre $\{o\}$.

Tengo $+1: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $+1(m) = m + 1$. Tengo $+2: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $+2(m) = m + 2$ y tengo $c: \{o\} \to \mathbb{Z}$ tal que $c(o) = o$.

Además s y p son inyectivas y generan a $\mathbb{Z}$ sobre $\{o\}$. *Entonces* $h(o) = c(o)$ y $h(s(n)) = +1(h(n))$ y $h(p(n)) = +2(h(n))$. Entonces ¿h está bien definida?

Obsérvese que $\quad h(2) = h(s(1)) = h(1) + 1 = 1 + 1 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{pues } h(1)=h(s(0))=+1(h(0))=+1(c(0))=+1(0)=0+1=1 \\ \text{pero } h(1)=h(p(2))=+2(h(2))=+2(2)=2+2=4 \end{array}\right\}$$

¡*Mal definido*!

Obsérvese que $s(0) = 1 = p(2)$. También $h(0) = 0$ y $h(0) = h(p(1)) = +2(h(1)) = +2(1) = 1 + 2 = 3$ por lo tanto $h(0) = 3$!

Definición 6 Sean U, B y F como antes. Sea $C \subseteq U$, decimos que C está *libremente generado por F sobre B* si y sólo si C está generado por F sobre B (es el menor conjunto $B - F$-inductivo); es decir, $C = B^*$ y además

i) Para toda $f \in F$ (pongamos de n argumentos) f es $1-1$ respecto a C es decir,

$$\text{Si } \begin{cases} x_1,\dots,x_n \in C \\ y_1,\dots,y_n \in C \end{cases} \text{ y } f(x_1,\dots,x_n)=f(y_1,\dots,y_n) \text{ entonces } \begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_2 \\ \vdots \\ x_n=y_n \end{cases}$$

ii) Las imágenes de cualquiera dos $f, g \in F$ con $f \neq g$, en C son disjuntas entre sí:

Si $f \neq g$ (pongamos f de n argumentos y g de m argumentos) $f, g \in F$ y $x_1,\dots,x_n \in C$, $y_1,\dots,y_m \in C$, entonces $f(x_1,\dots,x_n) \neq g(y_1,\dots,y_m)$.

iii) La imagen de cualquier $f \in F$ es disjunta de B:

Si $f \in F$ (pongamos de n argumentos) y $x_1,\dots,x_n \in C$ entonces $f(x_1,\dots,x_n) \notin B$. ■

Ejemplos de la primera sección.

2) $\Phi(E)$ está generado libremente por $\{\text{Neg}, \text{Disy}\}$ sobre E pues i) Neg y Disy son inyectivas respecto a $\Phi(E)$, ii) Ninguna negación es una disyunción y iii) Ninguna negación es símbolo de lenguaje y ninguna disyunción lo es.

3) **N** está libremente generado por $\{s\}$ sobre $\{o\}$ pues:

i) Sucesor es inyectiva, ii) se cumple pues no hay más que una operación generadora, iii) 0 no es un sucesor de ningún número natural.

4) $\mathbb{Z}$ *no* está generado libremente por $\{s, p\}$ sobre $\{o\}$ pues aunque cumple i) pues sucesor y predesor son inyectivas, falla ii) pues $s(2) = 3 = p(4)$ y también falla iii) pues $o = p(1) = s(-1)$.

7) El conjunto de las funciones algebraicas **A** *no* está generado libremente por F sobre B, por ejemplo $+(2,3) = 5 = +(4,1)$ y $2 \neq 4$, $3 \neq 1$ por lo que falla ii). Además no cumple i) pues la suma de funciones no es inyectiva respecto a **A**.

2.1 El teorema de recursión.

Sea U un conjunto, $B \subseteq U$, F un conjunto de operaciones sobre U y C un conjunto *libremente generado* por F sobre B.

Si V es un conjunto tal que:

- hay $h: B \to V$
- para cada $f \in F$ de n argumentos, hay una $\widehat{f}: V^n \to V$.

  Entonces hay una única $h^*: C \to V$ tal que

  a) $h^*(b) = h(b)$ para todo $b \in B$ (es decir $h \subseteq h^*$).

  b) Para cualquier $f \in F$ (de n argumentos) y cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in C$

$$h^*(f(x_1, \ldots, x_n)) = \widehat{f}(h^*(x_1), \ldots, h^*(x_n)).$$

Dicho algebraicamente: con las mismas hipótesis, cualquier función $h: B \to V$ puede extenderse a un homomorfismo h^*

$$h^*: \langle C, F\rangle \to \langle V, \widehat{F}\rangle \text{ donde } \widehat{F} = \left\{\widehat{f}/f \in F\right\}.$$

Dicho con un diagrama; con las mismas hipótesis:

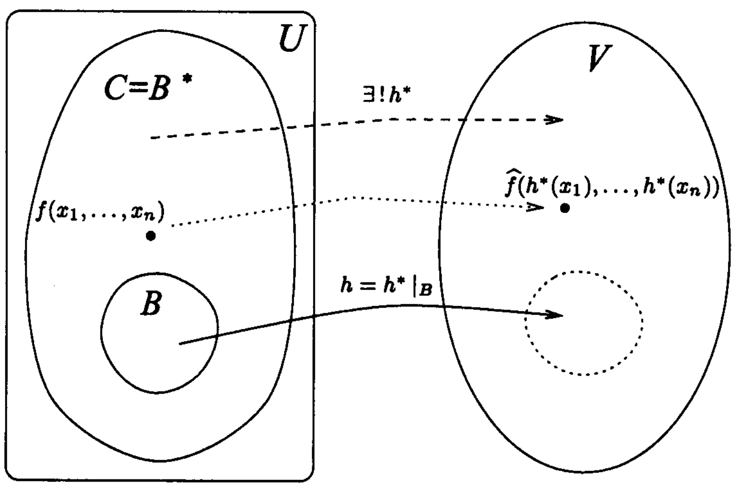

Figura 1: f(operación n-aria sobre U) $\widehat{f}$(operación n-aria sobre V)

Para dar la prueba del teorema, introduciremos la noción de función adecuada y probaremos algunas propiedades. La idea intuitiva de una función adecuada es la de una función *pequeña* que aproxima a la h^* cuya existencia y unicidad se pretende probar.

Definición 7 v es *función adecuada* si y sólo si

1) v es *función*, $\mathrm{dom}\,(v) \subseteq C$ e $\mathrm{Im}\,(v) \subseteq V$.

2) Si $b \in (B \cap \mathrm{dom}\,(v))$ entonces $v(b) = h(b)$.

3) Si $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{dom}\,(v)$ entonces $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{dom}\,(v)$ y

$$v(f(x_1, \ldots, x_n)) = \widehat{f}(v(x_1), \ldots, v(x_n))\,.$$

Sea $A = \{v \mid v \text{ es una función adecuada}\}$, el conjunto de todas las funciones adecuadas.

Obsérvese que $h \in A$.

Con H.I. abreviamos: Hipótesis Inductiva.

Lema 3 *Cualesquiera dos funciones adecuadas son compatibles.*

Demostración: Sean $v, w \in A$. Probaremos por inducción para B–F-inductivos que v y w son compatibles:

$$\forall\, x \in C\,[x \in (\mathrm{dom}\,(v) \cap \mathrm{dom}\,(w)) \to v(x) = w(x)]$$

i) Sea $x \in B$. Supongamos $x \in (\mathrm{dom}\,(v) \cap \mathrm{dom}\,(w))$. Como $v, w \in A$ por 2) tenemos que $v(x) = h(x) = w(x)$.

ii) Sean $f \in F$ de n argumentos y $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$\forall\, i = 1, 2, \ldots, n \quad x_i \in \mathrm{dom}\,(v) \cap \mathrm{dom}\,(w) \Longrightarrow v(x_i) = w(x_i)$. (H.I)

Supongamos ahora que $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{dom}\,(v) \cap \mathrm{dom}\,(w)$. Como $v, w \in A$ por 3) tenemos que

$\bullet$ $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{dom}\,(v) \cap \mathrm{dom}\,(w)$

$\bullet\bullet$ $v(f(x_1, \ldots, x_n)) = \widehat{f}(v(x_1), \ldots, v(x_n))$

$\bullet\bullet\bullet$ $w(f(x_1, \ldots, x_n)) = \widehat{f}(w(x_1), \ldots, w(x_n))$

De la H.I. y de ($\bullet$) tenemos que $\forall\, i = 1, \ldots, n$, $v(x_i) = w(x_i)$; de esto y de ($\bullet\bullet$) y ($\bullet\bullet\bullet$) tenemos que $v(f(x_1, \ldots, x_n)) = w(f(x_1, \ldots, x_n))$.

Observación. Se ha mostrado que:

$$\{x \in C \mid x \in \operatorname{dom}(v) \cap \operatorname{dom}(w) \to v(x) = w(x)\} \subseteq C,$$

es $B - F$-inductivo por lo que es igual a C y entonces v y w son compatibles. ■

Lema 4 *La unión arbitraria de funciones adecuadas es una función adecuada.*

Demostración: Sea $D \subseteq A$. Veamos que $\cup D \in A$.

1) Por el lema 3, D es un conjunto compatible de funciones por lo que $\cup D$ es una función y además:

$$\operatorname{dom}(\cup D) = \bigcup_{v \in D} \operatorname{dom}(v) \subseteq C,$$
$$\operatorname{Im}(\cup D) = \bigcup_{v \in D} \operatorname{Im}(v) \subseteq V.$$

2) Como para cada $v \in D$, se tiene $v(b) = h(b)$ para todo $b \in B \cap \operatorname{dom}(v)$, entonces $\cup D(b) = v(b) = h(b)$ para alguna $v \in D$ y esto para todo $b \in \bigcup_{v \in D} (B \cap \operatorname{dom}(v)) = B \cap \left(\bigcup_{v \in D} \operatorname{dom}(v)\right) = B \cap \operatorname{dom}(\cup D)$.

3) Supongamos que $f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{dom}(\cup D) = \bigcup_{v \in D} \operatorname{dom}(v)$. Así, hay $v \in D$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{dom}(v)$ y como $v \in A$, tenemos que $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{dom}(v) \subseteq \operatorname{dom}(\cup D)$ y que

$$\begin{aligned} \cup D\,(f(x_1, \ldots, x_n)) &= v\,(f(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= \hat{f}\,(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \\ &= \hat{f}\,(\cup D(x_1), \ldots, \cup D(x_n)) \,. \end{aligned}$$

Pues $\cup D(x_i) = v(x_i) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$

■

Lema 5 *Para todo $x \in C$, hay una función adecuada v tal que $x \in \operatorname{dom}(v)$.*

Demostración: Veamos que $\{x \in C \mid \exists\, v \in A\ (x \in \operatorname{dom}(v))\}$ es un conjunto $B - F$-inductivo, con lo que contendrá a C y como ya está contenido en C, resulta ser igual a C.

i) Sea $x \in B$. Sabemos que $h \in A$ y que $\operatorname{dom}(h) = B$ por lo tanto $x \in \operatorname{dom}(h)$.

ii) Sean $f \in F$ (de n argumentos) y $x_1, \ldots, x_n$ tales que $\forall\, i = 1, \ldots, n \;\exists\; v_i \in A$ tal que $x_i \in \operatorname{dom}(v_i)$. (H.I.)

Sea $v' = v_1 \cup \cdots \cup v_n$. Por el Lema 4, v' es una función adecuada y además $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{dom}(v')$.

Sea $v = v' \cup \left\{\langle f(x_1, \ldots, x_n), \widehat{f}(v'(x_1), \ldots, v'(x_n))\rangle\right\}$.

Obsérvese que independientemente de que $f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{dom}(v')$ o no, v está bien definida y que $f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{dom}(v)$. Veamos que v es función adecuada:

- v es función pues es unión de dos funciones compatibles como ya se dijo en la observación anterior, además

$$\operatorname{dom}(v) = \operatorname{dom}(v') \cup \{f(x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq C$$
$$\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(v') \cup \left\{\widehat{f}(v'(x_1), \ldots, v'(x_n))\right\} \subseteq V.$$

•• $v \mid B = h|_{B \cap \operatorname{dom}(v)}$. Es decir $v(b) = h(b)$ para todo $b \in B \cap \operatorname{dom}(v)$. Como $v' \in A$, de la definición de v tenemos que $\forall\, b \in B$, si $b \in \operatorname{dom}(v)$, $v(b) = h(b)$.

••• Sea $g \in F$ (de m argumentos) y $y_1, \ldots, y_m \in C$ tales que

$$g(y_1, \ldots, y_m) \in \operatorname{dom}(v)\,.$$

Tenemos dos casos:

Caso 1) $g(y_1, \ldots, y_m) \in \operatorname{dom}(v')$. Como $v' \in A$, tenemos que $y_1, \ldots, y_m \in \operatorname{dom}(v') \subseteq \operatorname{dom}(v)$, además

$$\begin{aligned} v(g(y_1, \ldots, y_m)) &= v'(g(y_1, \ldots, y_m)) \text{ por definición de } v \\ &= \widehat{g}\,(v'(y_1), \ldots, v'(y_m)) \text{ porque } v' \in A \\ &= \widehat{g}(v(y_1), \ldots, v(y_m)) \text{ por definición de } v\,. \end{aligned}$$

Caso 2) $g(y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Como C está *libremente generado* por F sobre B, tenemos en primer lugar que como las operaciones son tales que sus imágenes son iguales, resulta que:

$$g = f \quad \text{y} \quad m = n\,.$$

En segundo lugar, como las operaciones son inyectivas, tenemos $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$ pues

$$g(y_1, \ldots, y_n) = g(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Así pues, $y_1, \ldots, y_m \in \operatorname{dom}(v') \subseteq \operatorname{dom}(v)$ y además

$$v(g(y_1, \ldots, y_m)) = \widehat{g}(v(y_1), \ldots, v(y_m))$$

recordando que $m = n$ y $g = f$, y la definición de v.

■

Finalmente pasemos a la prueba del Teorema de Recursión:

Existencia: Sea $v = \cup A$ (la unión de todas las funciones adecuadas). Por el Lema 4, tenemos que v es adecuada y por Lema 5 tenemos que $\operatorname{dom}(v) = C$. Así, v es la función que cumple con a) y b), es decir, h^* es $v = \cup A$.

Unicidad: Sean $v, w \in C \to V$ que cumplan ambas a), b). Por el Lema 3, tenemos que $v = w$.

Así pues $h^*: C \to V$ y por ser adecuada.

a) $\forall\, b \in B,\ h^*(b) = h(b)$

b) $\forall\, x_1, \ldots, x_n \in C,\ h^*(f(x_1, \ldots, x_n)) = \widehat{f}(h^*(x_1), \ldots, h^*(x_n)).\ \forall\, f \in F$ (de n argumentos).

Tal h^* *existe* y es *única* por lo tanto *se justifica definirla* con a) y b). ■

Lo anterior es para cualquier: U, B, F como antes y C *libremente generado* por F sobre B y dados $V, h: B \to V$, $\widehat{f}: V^n \to V$ para cada $f \in F$ (del mismo número de argumentos).

Último comentario: Basándose en la prueba del teorema, dada una definición recursiva bien justificada, se puede siempre construir una definición *explícita* equivalente (ya *no* de tipo recursivo). Esto se verá en los ejercicios.

3 Ejercicios.

1. Considere el Teorema de Recursión tal como se redactó. Los conjuntos $B, F, V, \widehat{F} = \left\{\widehat{f} \mid f \in F\right\}$ y $h: B \to V$ están dados y se concluye que $\exists!\, h^*: C \to V$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, x \in B, h^*(x) = h(x) \\ \forall\, x_1, \ldots, x_n \in C, h^*(f(x_1, \ldots, x_n)) = \widehat{f}(h^*(x_1), \ldots, h^*(x_n)) \\ \forall\, f \in F \end{array} \right\}$$

Se probó que $h^* = \cup\{v \mid v \text{ es función adecuada}\}$ cumple lo anterior.

Verifique usted que: $\forall\, x \in C, \forall\, y \in V,$

$$h^*(x) = y \iff \exists\, v$$

$$\left[\begin{array}{cc} & v \text{ es función } \wedge \operatorname{dom}(v) \subseteq C \wedge \operatorname{Im}(v) \subset V \wedge \\ & \forall\, w (w \in B \cap \operatorname{dom}(v) \to v(w) = h(w) \wedge \\ \bigwedge\limits_{\substack{f \in F \\ (n \text{ argumentos})}} & (\forall\, y_1, \ldots, y_n (f(y_1, \ldots, y_n) \in \operatorname{dom}(v) \to y_1, \ldots, y_n \in \operatorname{dom}(v) \\ & \wedge v(f(y_1, \ldots, y_n)) = \widehat{f}(v(y_1), \ldots, v(y_n)))) \\ & \wedge x \in \operatorname{dom}(v) \wedge v(x) = y \end{array} \right]$$

2. Prueba que existe una única función $h^*: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h^*(o) & = & o \\ h^*(S(n)) & = & 1 - h^*(n), \ \forall\, n \in \mathbf{N} \end{array} \right\}$$

[Esta función toma el valor 0 en los pares y el valor 1 en los impares]

Justificar todos los pasos, (dando los conjuntos $B, F, V, \widehat{F}, h$).

3. Pruebe que existe una única función ℓ definida en el conjunto $\Phi(E)$ de las fórmulas de la lógica proposicional, $\ell: \Phi(E) \to \mathbf{N}$ tal que:

$$\begin{array}{rcl} \ell(P) & = & 1, \text{ si } P \text{ es símbolo de enunciado } (P \in E) \\ & & \ell((\neg\alpha)) = 3 + \ell(\alpha) \\ \ell((\alpha \vee \beta)) & = & 3 + \ell(\alpha) + \ell(\beta) \text{ para todo } \alpha, \beta \in \Phi(E) \end{array}$$

Esta función ℓ, proporciona la longitud (número de símbolos) de cada fórmula.

4. Sea $f: A \to A$ y $a \in A$. Por el Teorema de Recursión para números naturales, hay una única $h: \mathbf{N} \to A$ tal que $h(o) = a$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $h(s(n)) = f(h(n))$. Pruebe que si f es inyectiva y $a \notin f[A]$ entonces h es inyectiva.

Notación: $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$.

5. i) Demuestre que hay una única función $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tal que $g(o) = 2$ y $\forall n \in \mathbf{N}$ $g(s(n)) = 3 + g(n)$.

ii) Dar una definición *explícita* de la función g anterior (es decir, una definición *no*-recursiva) de la forma: $\forall m, n \in \mathbf{N}$, $g(m) = n \iff \ldots.$ o bien de la forma $g = \{\langle m, n\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid \ldots.\}$ donde "$\ldots.$" representa una expresión precisa, donde *no* ocurre g. Usar el ejercicio 1.

6. Justificar con el Teorema de Recursión las definiciones recursivas de suma, producto y exponenciación en los números naturales $\mathbf{N}$, usando que están libremente generados a partir de 0 con la función sucesor s.

i) Para $m \in \mathbf{N}$, definimos

$$\begin{cases} m + 0 &= m \\ m + s(n) &= s(m+n) \end{cases}$$

ii) Para $m \in \mathbf{N}$, definimos

$$\begin{cases} m \cdot 0 &= 0 \\ m \cdot s(n) &= m + (m \cdot n) \end{cases}$$

iii) Para $m \in \mathbf{N}$, definimos

$$\begin{cases} m^0 &= 1 \\ m^{s(n)} &= m \cdot (m^{(n)}) \end{cases}$$

7. La prueba dada del Teorema de Recursión puede llamarse *de abajo hacia arriba*, ya que partiendo de las funciones adecuadas se da h^* como la unión de todas ellas.

Dar *otra* prueba del Teorema de Recursión (*de arriba hacia abajo*):

Dados $U, B, F, C, V, h, \widehat{F}$, como antes.

Obsérvese que: $h \subseteq U \times V$. Para cada $f \in F$, sea

$$G_f\colon (U \times V)^n \to U \times V$$

tal que

$$G_f\left(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle\right) = \left\langle f(x_1, \ldots, x_n), \widehat{f}(y_1, \ldots, y_n)\right\rangle .$$

Sea $G = \{G_f\}_{f \in F}$.

Sea $h^* = \cap\{S \subseteq U \times V \mid S \text{ es } h - G\text{-inductivo}\}$.

8. Considere las dos sucesiones de números naturales $a, b\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$

$$a = 1, 2, 4, 16, 256, 65536, \ldots .$$
$$b = 1, 2, 4, 16, 65536, \ldots .$$

donde $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = b_1 = 2$, $a_2 = b_2 = 2^2$, $a_3 = (2^2)^2 = 2^{(2^2)} = b_3$, $a_4 = \left((2^2)^2\right)^2 \neq 2^{(2^{(2^2)})} = b_4, \ldots$.

Dar una definición recursiva de cada una de las dos sucesiones a y b y justificarlas con el Teorema de Recursión. Usar como dada, la función exponenciación a la n, con una base fija m, m^n así:

$$E(n) = \begin{cases} E_m(o) & = & 1 \\ E_m(s(n)) & = & E_m(n) \cdot m \end{cases}$$

9. Este ejercicio requiere conocer el concepto lógico de lenguaje de primer orden de un tipo ρ, L_ρ y conceptos de interpretación, asignación de valores a variables y satisfacibilidad de fórmulas.

Sea ρ un tipo cualquiera, $R = \langle A, F\rangle$ una ρ-estructura (interpretación para el lenguaje de tipo ρ, L_ρ), S una asignación para las variables (es decir $S\colon \{x \mid x \text{ es variable de } L_\rho\} \to A$). Justificar con el Teorema de Recursión la definición de que *una fórmula* φ *sea satisfactible en* $\mathcal{R}$ *por la asignación* S: $\mathcal{R} \models_s \varphi$.

Esto requiere de una definición alternativa del estilo $\mathcal{R} \models_s \varphi \iff$ "......" donde en "......" *no* aparece el mismo concepto $\mathcal{R} \models_s \alpha$, para α fórmula, aplicando el Teorema de Recursión con $U = \rho - \text{Expr}$ conjunto de expresiones o sucesiones finitas de símbolos de un lenguaje L_ρ.

$B = At = \{\alpha \,|\, \alpha$ es fórmula atómica de $L_\rho\}$, $F = \{\mathrm{Neg}, \mathrm{Disy}\} \cup \{Pt_i\}_{i \in \mathbb{N}}$; aquí: $Pt_i\colon \rho - \mathrm{Expr} \to \rho - \mathrm{Expr}$, tal que $Pt_i(\alpha) = (\forall\, x_i \alpha)$. $C = \rho -$ Form conjunto de fórmulas de tipo ρ.

Dando de alguna manera conjuntos adecuados $V, h\colon B \to V$ y $\widehat{f}$ para cada $f \in F$, (de igual número de argumentos); de tal modo que pueda usarse $h^*\colon C \to V$ con las propiedades dadas por el teorema, de que existe y es única, para definir "......" usando de alguna manera la h^*.

10. Justificar con el Teorema de Recursión la definición recursiva de *la variable x ocurre libre en la fórmula φ* dada por recursión como:

x ocurre libre en φ atómica, si x ocurre en φ.

x ocurre libre en $\varphi = (\neg\alpha)$ si x ocurre libre en α.

x ocurre libre en $\varphi = (\alpha \vee \beta)$ si x ocurre libre en α ó x ocurre libre en β.

x ocurre libre en $\varphi = (\forall\, y\alpha)$ si $x \neq y$ y x ocurre libre en α.

Además dar la definición alternativa, no recursiva.