Miscelánea Matemática **61** (2015) 21-29 SMM

Reseña de «A Course in Commutative Algebra» de G. Kemper

Alexis García Zamora
U. A. Matemáticas, U. de Zacatecas,
Camino a la Bufa y Calzada Solidaridad, C.P. 98000,
Zacatecas, Zac. México
alexiszamora06@gmail.com

El objetivo de estas páginas es presentar a profesores y potenciales estudiantes de Álgebra Conmutativa un libro relativamente nuevo sobre el tema. He utilizado este texto en varias ocasiones para enseñar Álgebra Conmutativa a estudiantes sin previo conocimiento de la materia y creo que los resultados han sido satisfactorios. Siguiendo las sugerencias de un árbitro anónimo, al que aprovecho para dar las gracias, he dividido el texto en tres secciones. En la primera, que en la versión original era prácticamente la totalidad del artículo, destaco las que pienso son ventajas del texto con respecto a sus (algunos ilustres) predecesores y qué puede específicamente encontrarse en él que lo hace singular. En la sección 2 se incluye un breve resumen comentado de cada uno de los capítulos del texto y en la 3 sugerencias sobre lecturas posteriores en Álgebra Conmutativa y áreas afines.

1. Un libro de Álgebra para aprender Geometría

Después de la publicación de textos como [3], [10], [12] o el ya clásico [1] parecería difícil argumentar sobre la utilidad de un nuevo libro de Álgebra Conmutativa. Sin embargo, la lectura del que nos ocupa ([8]) se justifica ampliamente.

La primera advertencia es que este texto supone que el lector tiene un cierto conocimiento previo de álgebra y en consecuencia definiciones como ideal, módulos y cocientes no están incluidos en el contenido.

Lo segundo es que (tal vez a diferencia de sus antecesores, incluido el libro de Eisenbud ([3])) este texto va especialmente dirigido a estudiantes que se están enfrentando a un primer curso de Geometría Algebraica. Esto determina totalmente la elección y organización de los temas y aún la presentación de los mismos. Dos ejemplos notables:

No cabe duda que la descomposición primaria es un instrumento extremadamente útil en Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica. Sin embargo, en los primeros pasos en el aprendizaje de la Geometría Algebraica se puede prescindir casi por completo de esta construcción y trabajar en su lugar con el conjunto (finito) de primos mínimos que contienen a un ideal en un anillo noetheriano, es decir, con la versión algebraica de las componentes irreducibles de un conjunto algebraico. Este es precisamente el punto de vista que adopta Kemper.

Por otro lado, un tema central en Geometría Algebraica es la teoría de la dimensión, sin la cual es muy difícil avanzar más allá de construcciones geométricas básicas. En la mayoría de los textos de Álgebra Conmutativa la teoría de la dimensión no aparece en la discusión hasta capítulos más bien avanzados (es, por ejemplo el capítulo 5 de [10], donde se expone después de temas como módulos planos, completados o valuaciones). No es el caso aquí: la teoría de dimensión ocupa la segunda parte del libro, en la página 51, inmediatamente después de la presentación de la correspondencia entre ideales y conjuntos algebraicos e incluye todos los puntos que un estudiante de Geometría Algebraica debe dominar desde el principio, y que todo instructor espera encontrar de un modo coherente y ordenado en el texto por el que se guía. Me refiero, al menos, al teorema del ideal principal, a la relación entre dimensión y grado de trascendencia de $k-$álgebras finitamente generadas y a los aspectos locales, principalmente los sistemas de parámetros.

Con esto quiero enfatizar que no rehuye el texto de los temas complicados por una vana búsqueda de una simplicidad a toda costa. El punto de vista es totalmente razonable y muy útil: evitar complicaciones teóricas cuando sea posible y enfrentar las construcciones complicadas cuando sea inevitable.

Mi experiencia personal con esta obra como libro de texto tuvo otra arista muy particular. Tuve la suerte de enseñar paralelamente en el mismo semestre y al mismo grupo de estudiantes de maestría, cursos de Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica. Utilicé como textos principales el libro de Kemper para Algebra Conmutativa y el clásico «Basic Algebraic Geometry» de I.R. Shafarevich ([13]) para Geometría Algebraica. Ambos textos se complementan de un modo tan preciso que es imposible dejar de preguntarse si el autor no tuvo en mente, al menos en los momentos iniciales de la redacción de su libro, elaborar una especie de manual de «lo que usted debe saber de Álgebra Conmutativa para leer el libro de Shavarevich». Lo cierto es que si un estudiante a medida que va conociendo los resultados del libro de Kemper se remite al de Shavarevich puede comprender la mayoría de lo expuesto en el último libro haciendo notar que las demostraciones son prácticamente aplicaciones directas de los resultados del primero.

De ningún modo debe inferirse que los méritos del libro se reducen a esta afinidad con la Geometría Algebraica. Varios hechos importantes en la presentación ayudan a un mejor entendimiento del Álgebra Conmutativa en sí misma. Me gustaría resaltar:

1. La introducción del novedoso concepto de radical de Rabinowitsch en el contexto del teorema de los ceros de Hilbert. Dado un anillo R, conmutativo y con 1, la definición es:

$$\mathrm{Spec}_{rab}(R) := \{R \cap m \mid m \in \mathrm{Spec}_{max} R[x]\}.$$

El clásico «truco de Rabinowitsch» tiene entonces la siguiente interpretación:

Proposición 1.1. *Sea $I \subset R$ un ideal, entonces:*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}_{rab}(R) \\ I \subset P}} P.$$

El teorema de los ceros de Hilbert es entonces la afirmación de que para una $k-$álgebra afín A

$$\mathrm{Spec}_{rab}(A) \subset \mathrm{Spec}_{max}(A),$$

lo cual se sigue del hecho de que, para $k-$álgebra afines A y B y morfismos de $k-$álgebras

$$\phi : A \to B,$$

ϕ^{-1} induce una aplicación:

$$\phi^{-1} : \mathrm{Spec}_{max}(B) \to \mathrm{Spec}_{max}(A).$$

2. Un camino para evitar el uso de polinomios de Hilbert. En efecto, el uso de los polinomios de Hilbert y de Hilbert–Samuel puede ser evitado en un principio si se sustituye el hecho de que la función de Hilbert es polinomial para $n >> 0$ por la existencia de un entero δ (el menor posible) tal que la función de Hilbert puede ser acotada por abajo por un polinomio de grado δ. Esta observación permite evitar en una primera lectura los capítulos 9 al 11 del libro (por supuesto este δ coincide con el grado del polinomio de Hilbert).

3. Sin embargo, estos capítulos del 9 al 11 contienen, primero en el capítulo 9 la definición y resultados básicos sobre bases de Gröbner y luego en los siguientes dos capítulos, respectivamente, un estudio detallado de las fibras de un morfismo algebraico y las series de Hilbert. La presentación de estos últimos temas está fuertemente basado en bases de Gröbner, lo que permite un enfoque algorítmico. Por supuesto,

incluir un capítulo sobre bases de Gröbner será indispensable en cualquier texto introductorio futuro de Álgebra Conmutativa y aparece ya en [3].

Esta reseña no estaría completa si no señalara los puntos que, en mi opinión, resultan problemáticos para el instructor y el estudiante. Al menos debo mencionar dos:

1. La insistencia en evitar el uso del producto tensorial. Pienso que en la actualidad el producto tensorial de módulos es una herramienta que el estudiante de una maestría en matemáticas domina (o debería dominar). Al menos esta mínima concesión a la utilización de métodos homológicos en el Álgebra Conmutativa, siguiendo el punto de vista de [10], hubiera ayudado a simplificar definiciones y argumentos, muy en particular la definición de la fibra de un morfismo.

2. La inclusión de un capítulo, o al menos una sección, sobre series de potencia exponiendo al menos los métodos elementales de Zariski-Samuel ([14], vol II, cap. VII, hasta el teorema 6), además de servir como introducción a un método esencial en Álgebra Conmutativa hubiera permitido dar una demostración de que todo anillo local regular es de factorización única, hecho que en el libro se demuestra sólo para dimensión uno. Esto hubiera reforzado aún más la armonía con el libro de Shavarefich.

Unas palabras sobre los ejercicios. Cada capítulo termina con un conjunto de ejercicios, su grado de dificultad es variable, y el expediente usual de incluir al final del texto sugerencias para los más difíciles se sigue. También en los pocos casos en que el resultado de un ejercicio será utilizado de un modo u otro en el texto se incluyen sugerencias detalladas. Los ejercicios ayudan a la comprensión del texto, sobre todo presentando ejemplos ilustrativos. Varios de los famosos contraejemplos de Nagata aparecen de este modo.

2. Resumen del contenido del libro

En esta sección damos un breve resumen del contenido de cada capítulo del libro. Hemos traducido el título de los capítulos al español.

Capítulo 1 El teorema de los ceros de Hilbert. El tema principal es el famoso teorema de los ceros de Hilbert (Hilbert's Nullstellensatz). Este teorema permite establecer la relación precisa entre ideales de $k[x_1, \ldots, x_n]$, donde k es un campo algebraicamente cerrado, y los conjuntos cerrados algebraicos de $\mathbb{A}^n$. El capítulo comienza demostrando:

Lemma 2.1. *Sea A una $k-$álgebra. Entonces:*

a) *Si A es un dominio entero algebraico sobre k, entonces A es un campo.*
b) *Si A es un campo y está contenido en un $k-$dominio afín, entonces A es algebraico sobre k.*

Este es el lema básico sobre el que se desarrolla la demostración del teorema de los ceros. Los otros dos hechos esenciales para demostrar el teorema son la proposición 1.11 y los comentarios que le siguen en la sección 1. del presente artículo. Por supuesto, es en este capítulo donde se introduce el concepto de radical de Rabinowitsch al que hicimos referencia en la sección 1.

El capítulo termina con una dicusión de Anillos Coordenados, esto es anillos que aparecen como el anillo de funciones polinomiales de una variedad irreducible afín. Su caracterización algebraica es: $k-$álgebras finitamente generadas que son dominios enteros.

Capítulo 2 Anillos Noetherianos y Artiniamos. Contiene las definiciones y propiedades básicas de los anillos y módulos noetherianos y artinianos. Debemos resaltar un punto de vista de la presentación: no es necesario separar la teoría de anillos de la de módulos, ambas pueden desarrollarse paralelamente. Igualmente el concepto de anillos y módulo artinianos puede presentarse dentro de la teoría de los noetherianos, sólo como un caso particular. Se incluye una demostración del teorema de la base de Hilbert.

Capítulo 3 La Topología de Zariski. Este capítulo es en realidad una introducción a la Geometría Algebraica afín, como su título lo indica el concepto de topología de Zariski es presentado, pero en sus dos versiones: directamente como el conjunto de cerrados afines en $\mathbb{A}^n$ y de manera abstracta en el espectro primo de un anillo conmutativo y con 1. También se discuten los conceptos de espacio topológico irreducible y componentes irreducibles. Por primera vez en el texto se hace notar un resultado básico, que será recurrente en lo que sigue: en un anillo noetheriano R para todo ideal I existen un número finito de primos mínimos entre los que contienen a I (en la situación geométrica corresponden a las componentes irreducibles del cerrado $V(I)$). Se sigue inmediatamente que $\sqrt{I}$ es intersección de este número finito de primos.

Capítulo 4 Un resumen del Léxico. Como su nombre lo indica este breve capítulo sólo sirve para recapitular la correspondencia entre cerrados algebraicos e ideales radicales explicada en capítulos anteriores. Ningún resultado nuevo es demostrado.

Estos primeros 4 capítulos forman la Parte I del texto. Podría comenzarse un curso de Geometría Algebraica exponiendo los resultados de esta primera parte. Después de desarrollado este material sería posible exponer sin mayor dificultad las secciones I.2, I.3 y I.4 de libro de Shafarevich ([13]).

La Parte II del libro está dedicada a la Teoría de la Dimensión y comprende los capítulos 5, 6, 7 y 8.

Capítulo 5 Dimensión de Krull y Grado de Trascendencia. Se introduce el concepto de dimensión de Krull, tanto de un anillo como de un espacio topológico. Se demuestra el hecho fundamental de que la dimensión de Krull de un álgebra afín coincide con su grado de trascendencia sobre k. Además se demuestran otros importantes resultados: primera versión del Teorema del Ideal Principal (Teorema 5.13), caracterización de anillos artinianos en término de dimensión y dimensión del producto de variedades afines.

Capítulo 6 Localización. Se introducen las nociones de localización de un anillo y un módulo con respecto a un sistema multiplicativo y sus propiedades fundamentales. Luego sigue la definición de anillos locales y de altura de un ideal y finalmente la dimensión de Krull de un módulo. Es un capítulo corto y muy especialmente en este caso encuentro útil complementar la información con algunos de los ejercicios al final del capítulo.

Capítulo 7 El Teorema del Ideal Principal. Comienza demostrando el lema de Nakayama, esta es la ilustración de un principio general del texto: un resultado técnico no es enunciado y demostrado hasta que sea realmente de utilidad para la demostración de un teorema importante. Después del lema de Nakayama se demuestra el Teorema del Ideal Principal (si un ideal primo P está generado por n elementos entonces $ht(P) \leq n$). Inmediatamente sigue otra ilustración del principio anterior: el lema de Evitabilidad de los Primos (Prime Avoidance) se presenta para seguidamente demostrar el recíproco del Teorema del Ideal Principal (para ideales primos). Se introduce el concepto de sistemas de parámetros y finalmente se demuestra el Teorema de Dimensión de la Fibra. Todos los teoremas están enunciados en término de altura, en lugar de dimensión. Es aquí donde pienso que utilizar el producto tensorial para definir la fibra de un morfismo pudiera simplificar la presentación.

Capítulo 8 Extensiones Enteras. Un capítulo fundamental por la importancia y cantidad de resultados presentados. Se incluye la definición de elementos y extensiones enteras, los teoremas de ascenso y descenso y el hecho de que si $R \subset S$ es una extensión entera, entonces $\dim R = \dim S$. Se demuestra el teorema de normalización de Noether y la finitud de la normalización de un dominio afín.

Después de la lectura de estos capítulos se podrá seguir fácilmente la exposición de la sección I.6 del libro de Shafarevich.

La parte III del texto comprende los capítulos 9 (**Bases de Gröbner**), 10 (**Revisión de Fibras e Imagenes de Morfismos**) y 11 (**Series de Hilbert y Dimensión**). La lectura de esta parte puede ser omitida y pasar directamente a la parte IV y demostrar el ejercicio 12.1, como fue indicado en la sección 1 de esta reseña y el autor hace notar en la introducción. No daremos un resumen de cada capítulo por separado sino de toda la tercera parte. La principal novedad aquí es el enfoque algorítmico basado en órdenes monomiales. Se explica la definición y construcción de bases de Gröbner y como aplicaciones se demuestran teoremas de genericidad del lugar dónde un módulo es localmente libre y el Teorema de Dimensión de la fibra. También se da una breve introducción a la Teoría de Invariantes y se introduce la serie de Hilbert y un algoritmo para calcularla en el caso afín, se demuestra el resultado fundamental que el grado del polinomio de Hilbert coincide con la dimensión de la variedad en el caso afín. Un algoritmo para calcular la dimensión de un álgebra afín también es presentado. Es tal vez la parte más técnica y menos convencional del texto. Debemos notar que los métodos algorítmicos, en especial aplicados a la teoría de invariantes son el campo de especialización del autor, esto tal vez hace al mismo tiempo de esta parte la más interesante del libro.

Capítulo 12 Teoría de Dimensión. Se enfoca en anillos locales noetherianos. El objetivo principal es demostrar que para un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ la dimensión de R coincide con la de $gr(R)$, el anillo graduado asociado, que se define como $\oplus_{d=0}^{\infty}\mathfrak{m}^d/\mathfrak{m}^{d+1}$. En el camino para demostrar este resultado se introducen importantes conceptos y se demuestran lemas de mucha utilidad. Por ejemplo, se define la longitud de un módulo, el polinomio de Hilbert–Samuel, el álgebra de la explosión y se demuestran el Lema de Artin–Rees y el lema de instersección de Krull.

Capítulo 13 Anillos Locales Regulares. Se definen los anillos locales regulares y se demuestran varias de sus propiedades fundamentales (se supone que el anillo es noetheriano). Se demuestra el criterio jacobiano y se discute el concepto de lugar singular de una variedad algebraica.

Capítulo 14 Anillos de Dimensión Uno. Se demuestra que un anillo local noetheriano de dimensión 1 es regular si y sólo si es normal. A partir de aquí se deduce, como es usual, el Teorema de Desingularización de Curvas. El capítulo termina con una discusión de dominios de Dedekin. Un capítulo importante tanto para los estudiantes que intentan aproximarse a la Teoría de Curvas Algebraicas como para los interesados en Teoría Algebraica de Números.

Después de terminada está parte es natural el estudio del capítulo II del libro de Shafarevich y será relativamente fácil la lectura de su capítulo III.

3. Indicaciones sobre lecturas posteriores

En la actualidad el Álgebra Conmutativa es una herramienta básica para el estudio de diversas áreas de las matemáticas. En esta sección señalamos algunas de ellas e indicamos bibliografía relacionada. En primer lugar, el material cubierto por el libro de Kemper es sólo una introducción. Temas centrales como descomposición primaria, métodos homólogicos, con el uso de los funtores Hom y Tor, resoluciones proyectivas y anillos y módulos Cohen–Macauley no son tratados en el texto. En mi opinión los mejores libros que existen para continuar el estudio del Álgebra Conmutativa son el libro de Matsumura ([10]) y el de Eisenbud ([3]). Un lector con conocimiento previo del libro de Kemper puede fácilmente emprender la lectura directa de capítulos o secciones avanzados de estos dos libros.

La siguiente disciplina matemática en que el Álgebra Conmutativa resulta fundamental es la Geometría Algebraica (el estudio de las propiedades de las soluciones de un conjunto de ecuaciones polinomiales $\{f_i = 0\}$ con los $f_i \in R[x_1, \ldots, x_n]$ y R un anillo conmutativo y con 1). Todo el libro de Kemper está dirigido a esta relación entre las dos áreas. Las introducciones más útiles a la Geometría Algebraica en sí misma son el libro de Fulton ([5]) y el ya citado de Shafarevich ([13]). El siguiente paso, la Teoría de Esquemas puede ser estudiado en los libros de Hartshorne ([7]) o Q. Liu ([9]). Para este estudio es fundamental dominar los rudimentos del Álgebra Conmutativa.

Un área íntimamente ligada a la Geometría Algebraica es la Geometría Analítica (estudio de soluciones de ecuaciones $f_i = 0$ con f_i funciones holomorfas en algún abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ y su generalización a casos globales). Esta displina combina técnicas de Variable Compleja con otras más algebraicas, una vez más el Álgebra Conmutativa resulta esencial para este estudio, sobre todo el Álgebra Local y el Teorema de Preparación de Weierstrass. El lector interesado en este tema puede consultar el texto «From Holomorphic Functions to Complex Manifolds» de Karl Fritzsche y Hans Grauert ([4]).

La otra gran disciplina matemática en que es fundamental el Álgebra Conmutativa es la Teoría Algebraica de Números, que esencialmente estudia extensiones finitas del campo $\mathbb{Q}$. Las secciones 14.2 y 14.3 del libro de Kemper son una buena introducción a las herramientas algebraicas necesarias para su estudio. La literatura sobre Teoría Algebraica de Números es muy vasta, desde mi punto de vista, que es el de un no especialista en la materia, recomiendo el libro «Algebraic Number Theory» de Jürgen Neukirch ([11]).

Otras dos áreas donde el Álgebra Conmutativa tiene importantes aplicaciones son la Teoría de Gráficas ([6]) y las diversas extensiones de la Teoría de Galois ([2]).

Bibliografía

[1] M. Atiyah y I. G. MacDonnald, *Introduction to Conmmutative Algebra*, Westview Press, Moscow, 1969.

[2] F. Borceux y G. Janelidze, *Galois Theories*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 72, 2001.

[3] D. Eisenbud, *Conmmutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer Verlag GTM 150, 1995.

[4] K. Fritzsche y H. Grauert, *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*, Springer Verlag GTM 213, 2002.

[5] W. Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, W. A. Benjamin, 1969.

[6] I. Gitler y R. Villarreal, *Graphs, Rings and Polyhedra*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2011.

[7] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag GTM 52, 1977.

[8] G. Kemper, *A Course in Conmmutative Algebra*, Springer Verlag, GTM 256, 2011.

[9] Q. Liu, *Algebraic Curves and Arithmetic Curves*, Oxford GTM 6, 2002.

[10] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1986.

[11] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer Verlag, 1999.

[12] C. Peskine, *An Algebraic Introduction to Complex Projective Geometry: I. Commutative Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 47, 1996.

[13] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*, 2.ª ed., Springer Verlag, 1994.

[14] O. Zariski y P. Samuel, *Commutative Algebra (I, II)*, Springer Verlag GTM 28, 29, 1960.