Miscelánea Matemática **44** (2007) 29–52 SMM

La curvatura de Riemann a través de la historia*

Antonio Martínez Naveira
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Valencia
Avda. Andrés Estellés, 1
46100 - Burjassot (Valencia)
España
naveira@uv.es

Abstract

The concept of curvature is very common in Differential Geometry. In this article we try to show its evolution along history, as well as some of its applications. This survey is limited both in number of topics dealt with and the extent with which they are treated. Some of them, like minimal submanifolds, Kähler manifolds or Morse Theory are completely omitted. Even though in an implicit way, the curvature is already present in the Fifth Euclid's Postulate. However it does not emerge explicitly in Mathematics until the appearance of the theory of curves and surfaces in the euclidean space. Taking basically the work of Gauss as a starting point, Riemann defines the curvature tensor in an abstract and rigorous way. The introduction of multilinear algebra in the second half of the XIX century allowed a better analytic formulation and its further development. It is worth stressing its fundamental role in the development of the Theory of Relativity. As a consequence of the impact of both Riemann's and Klein's Erlangen program, two major research lines in Geometry arose: a) The study of geometric and topological properties of Riemannian manifolds of low dimension, b) The study of Riemannian

*Este artículo, que es la traducción al español del publicado en RACSAM Rev. R. Acad. Ciencias Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **99** (2), (2005), 195–210, corresponde al discurso de ingreso del profesor Antonio Martínez Naveira como "Académico Correspondiente"

manifolds with the greatest possible number of isometries. Besides, the curvature is present, not only in riemannian manifolds, but also in many other geometric structures, like homogeneous and symmetric spaces, the theory of connections, characteristic classes, etc. Having in mind that the physical world cannot be explained with a flat model, the curvature rises in the theories of Mathematical Physics. Likewise, it seems interesting to note its presence in applied sciences, like Estereology.

Resumen

El concepto de curvatura es muy familiar en la Geometría Diferencial. En este artículo se procura mostrar tanto la evolución de su concepto a lo largo de la historia como algunas de sus posibles aplicaciones. En esta exposición existe una limitación tanto en la presentación de algunos temas como en la ausencia de otros que son básicos en la Geometría de Riemann. Entre estos últimos cabría destacar las variedades minimales y las kählerianas o la teoría de Morse. Aunque de manera implícita, la curvatura subyace en el quinto postulado de Euclides, ésta no aparece de una manera explícita en las Matemáticas hasta la construcción formal de la teoría de curvas y superficies, debida fundamentalmente a Gauss y Monge. Tomando fundamentalmente como base la obra geométrica de Gauss, Riemann define de una manera abstracta, pero rigurosa, el tensor curvatura. El desarrollo del álgebra multilineal durante la segunda mitad del siglo XIX permitió su comprensión analítica y su desarrollo posterior. Además, la curvatura no sólo está presente en las variedades de Riemann y sus aplicaciones a la Física Teórica, en especial a la teoría de la relatividad, sino también en muchas otras estructuras geométricas tales como espacios simétricos y homogéneos, teoría de conexiones, clases características, etc. Igualmente, parece interesante hacer notar su presencia en ciencias aplicadas, entre las que cabe señalar la Estereología.

MSC: 53-03,01-02.

Palabras clave: curvatura, geometría no euclídea, geometría de Riemann, espacios simétricos

1. Introducción

El mundo en el que vivimos y los modelos matemáticos que se construyeron para describir los objetos geométricos y físicos no se pueden explicar con teorías lineales. Para obtener una representación razonablemente coherente es preciso introducir objetos formados con términos de orden superior. El ejemplo más elemental es la aceleración de una partícula en movimiento en el espacio euclídeo. El concepto de curvatura es, precisamente, un objeto de segundo orden que surge de una manera natural en el estudio de curvas, superficies y sus generalizaciones.

Según Ossermann, [Osn2], la noción de curvatura es uno de los conceptos centrales de la geometría diferencial; uno puede argumentar que es el central, distinguiendo el núcleo geométrico del problema objeto de estudio de otros aspectos. Según Berger, [Br2], la curvatura es el invariante más importante en la Geometría de Riemann y además el más natural. En [Gv], Gromov escribe: "el tensor curvatura de una variedad de Riemann es un pequeño monstruo de álgebra multilineal cuyo significado geométrico completo permanece oscuro".

Así, para variedades de Riemann sin estructuras adicionales, la curvatura es una magnitud compleja. Históricamente se comenzaron estudiando sus propiedades en aquellas variedades más sencillas para, posteriormente, comparar la situación general con la de las variedades particulares. Frecuentemente, a éstas se les denomina "espacios modelo".

La curvatura desempeña también un papel fundamental, tanto en la Física como en otras ciencias experimentales. Por ejemplo, la magnitud de la fuerza requerida para mover un objeto a velocidad constante es, de acuerdo con las leyes de Newton, un múltiplo constante de la curvatura de la trayectoria; o el movimiento de un cuerpo en el campo gravitacional está determinado, según Einstein, por la curvatura del espacio-tiempo.

2. Una nota sobre los Elementos de Euclides

Cuando Euclides (o quizás su escuela) escribe sus "Elementos", los primeros cinco postulados parecían tan evidentes que debían ser aceptados sin demostración. Allí, aunque no de manera explícita, ya está presente la curvatura. "Elementos" rivaliza, por su difusión, con los libros más famosos de la literatura universal: la Biblia, La Divina Comedia, Fausto y el Quijote. Esto es un privilegio excepcional, ya que se trata de una obra científica no asequible a las grandes masas de lectores. Pero su rigor lógico –en el cual reside parte de la génesis del pensamiento matemático moderno– y la unidad de su exposición hacen de ella un cuerpo de doctrina único, que debería ser de lectura obligada para todos los estudiantes de geometría.

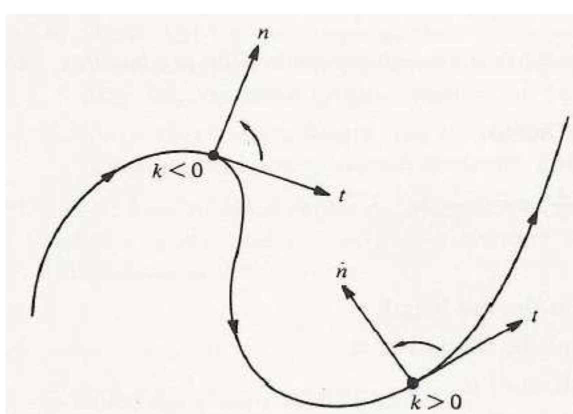
Platón, discípulo de Sócrates, fundó su escuela, “La Academia”, en una zona sagrada de Atenas. Era como una pequeña universidad donde el filósofo y sus amigos impartan enseñanzas a sus discípulos. Platón tenía en gran estima a las Matemáticas, en especial a la Geometría. Dice la leyenda que la inscripción grabada en la entrada de la Academia rezaba: “Nadie entre aquí que no sepa Geometría”.

Sin embargo, la obra de Euclides no es fácil de entender. Por ejemplo, en el siglo XVIII, los miembros de la Academia de Ciencias de París MM. Delambre y Prony escribían: “Nadie nos escucharía si propusiéramos que se comenzara el estudio de la matemática por los Elementos, pero se está en lo cierto cuando se afirma que cualquier geómetra haría muy bien en leerlos una vez en su vida”.

Sobre su importancia, el Profesor Dou dice: “La geometría de los Elementos es una geometría que hoy la podríamos considerar geometría-física, ya que para Euclides y Aristóteles los términos de sus proposiciónes se refieren con toda exactitud a los campos naturales de la realidad del mundo físico, con una referencia única que es simultáneamente inmediata y última. Es una geometría que pretende estudiar la estructura del espacio físico [D]”.

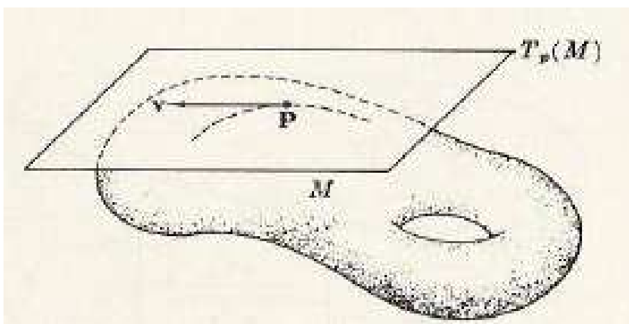
3. El nacimiento de la Geometría Diferencial de curvas y superficies

El estudio de curvas nace con el Análisis Infinitesimal. Newton ya estudia la curvatura de las curvas planas. Para una curva, la curvatura en un punto mide su desviación respecto de su tangente.



La teoría de superficies del espacio euclídeo se ha desarrollado fundamentalmente a lo largo de los siglos XVIII, XIX y primera mitad del XX.

A comienzos del siglo XIX, Young y Laplace probaron que en una superficie esférica la presión en el interior es siempre mayor que en el exterior, y que la diferencia de presión se incrementa cuando disminuye su radio. Por las leyes físicas, los líquidos tienden a minimizar su superficie. En el interior de una gota o una burbuja en equilibrio, la presión interior es superior a la exterior. Este exceso de presión es debido a la curvatura de la superficie límite de separación. Intuitivamente, se puede deducir que la curvatura de una superficie en un punto mide su desviación respecto al plano tangente



Cabe señalar las aportaciones de Euler, Monge y Dupin, pero sobre todo el famoso artículo "Disquisitiones generales circa superficies curvas" de Gauss, el cual resultó fundamental para establecer el concepto de espacio. En él se introduce, además, la noción de "curvatura" de una superficie en un punto, que es un concepto intrínseco. Para ello, Gauss estudia las propiedades intrínsecas de la geometría de una superficie.

El "Teorema Egregium de Gauss" se podrá enunciar "En un punto de la superficie, la curvatura de Gauss es un invariante isométrico".

El nombre de "Teorema egregium" se lo atribuyó el mismo Gauss, debido a sus excepcionales propiedades geométricas. Es éste un prototipo de teorema universal sobre los que Chern afirmaba: "Las matemáticas están ahí, sólo es necesario descubrirlas y sacarlas a la luz".

Según Berger, no existen demostraciones geométricas sencillas del "Teorema Egregium". A lo largo de la historia se han dado muchas entre las que cabe destacar las de Hilbert y Cohn-Vossen, [H-C V], Chern, [Chn.1], Do Carmo, [DC], OÑeill, [ON], Stoker, [Sr], Sternberg, [Sg], Klingenberg, [Kg] y Boothby, [By], entre otros.

De las citadas anteriormente, me parece muy interesante (por considerarla muy pedagógica) la presentada por Thorpe, [Te], ya que utiliza la teoría de fibrados principales unitarios sobre una superficie sin hacer explícitamente referencia a ellos. En Berger [Br2] se nos presentan 2 demostraciones. La dada por Bertrand, Diguet y Puiseux, [B-D-P], da la clave de la generalización de Riemann del tensor curvatura a dimensiones arbitrarias. Además, el artículo de Bertrand, Diguet y Puiseux fue pionero para el desarrollo de la teoría de volúmenes de tubos en variedades de Riemann, impulsada fundamentalmente por A. Gray, [Gy.1].

Como una aplicación del "Teorema Egregium" de Gauss se encuentra una de las fórmulas más profundas y difíciles de la Geometría Diferencial y la Topología Algebraica: "El teorema de Gauss-Bonnet para superficies". Gauss lo prueba para polgonos geodésicos y Bonnet lo demuestra para polígonos con lados de curvatura geodésica no nula ([Bt], [VA2]). No existe una demostración sencilla del mismo. Es por su interés metodológico, que yo eligiría la demostración presentada por Thorpe, [Te]. Este teorema fue generalizado por Allendoerfer y Weyl a dimensiones arbitrarias casi un siglo más tarde, [A-W].

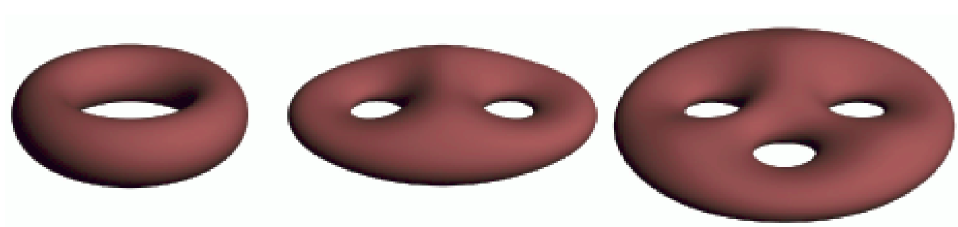
En el siglo XVIII, Euler establece su famosa formula para poliedros:

$$\text{Caras} - \text{Aristas} + \text{Vértices} = 2\,.$$

Pese a su simplicidad, parece que esta propiedad no era conocida por Arquímedes ni Descartes. Quizás la razón haya sido que a cualquier matemático anterior a Euler no le era posible pensar en propiedades geométricas que no fuesen medibles. El camino iniciado por Euler fue seguido por Lhuilier, quien observa que la fórmula de Euler era falsa para cuerpos con g asas y prueba que:

$$\text{Caras} - \text{Aristas} + \text{Vértices} \; = 2 - 2g\,.$$

Éste es el primer ejemplo conocido de invariante topológico.



Para un dominio plano, donde la frontera está formada por líneas rectas, el resultado más clásico y sencillo dice que "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es π". En general, si D es un dominio de una superficie, cuya frontera ∂D es diferenciable por arcos, para cualquier subdivisión simplicial su característica de Euler–Poincaré $\chi(D)$ = Caras - Aristas + Vértices está dada por la fórmula de Gauss-Bonnet:

$$\sum_i (\pi - \alpha_i) + \int_{\partial D} (ds/\rho_\sigma) + \int \int_D K dA = 2\pi\chi(D)\,,$$

donde el primer sumando representa la suma de los ángulos exteriores en las esquinas, el segundo es la integral de la curvatura geodésica y el último es la integral de la curvatura de Gauss. Son, respectivamente, las curvaturas puntual, lineal y de superficie del dominio. La fórmula de Gauss- Bonnet puede interpretarse diciendo que la caracterstica de Euler–Poincaré es una curvatura total.

Para las superficies cerradas se tiene

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M)\,,$$

que puede considerarse como una clase característica.

4. El nacimiento de la Geometría de Riemann

En 1854 Riemann generaliza los estudios de Gauss a espacios de dimensión arbitraria. Define, de una manera poco rigurosa, el concepto de variedad diferenciable como un conjunto n-dimensional sobre el que se pueden realizar los cálculos del análisis ordinario. Así, una geometría sobre una variedad será una forma cuadrática definida positiva en cada uno de los espacios tangentes. Esta definición de Riemann permite generalizar gran parte de la obra de Gauss. El mismo Gauss le había aconsejado este tema para su tesis de habilitación. La famosa memoria de Riemann "Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la Geometría" fue publicada después de su muerte. Evidentemente, los espacios de Riemann de curvatura variable comprenden, como casos particulares, las formas espaciales, que son las que históricamente dieron lugar a las geometrías no-euclídeas, que son tan consistentes como la euclídea. Volveré a este tema un poco más adelante.

Con la aparición de la memoria de Riemann se puede hablar del nacimiento del tensor curvatura en el sentido que lo conocemos hoy. Sus propiedades son bastante complicadas; sin embargo, sus ideas básicas son simples y profundas, como todos los grandes conceptos de la ciencia.

En la segunda mitad del siglo XIX se desarrolla, sobre todo en la escuela italiana, el álgebra tensorial. Esta herramienta, aunque farragosa, permitió un gran avance en la Geometría de Riemann, principalmente en la formulación del desplazamiento paralelo de Levi-Civita y de la Teoría de la Relatividad de Einstein. Desde la aparición de esta última los espacios de Riemann han llamado la atención de gran cantidad de filśofos, físicos y matemáticos.

El concepto de curvatura de Gauss de una superficie se extiende a las variedades de Riemann de dimensión superior a dos de una manera natural, ya que es posible considerar el germen de la superficie totalmente geodésica tangente en un punto de la variedad al subespacio de dimensión dos en cuestión, [Sk, **?**, **?**]. La curvatura de Gauss de dicha superficie se define como la "curvatura seccional" de ese plano en dicho punto. En general, el tensor curvatura de una variedad de Riemann depende de cuatro argumentos, mientras que la curvatura seccional sólo de dos. Este resultado puede parecer extraño, aunque ahora es bien sabido que en una variedad riemanniana el conocimiento de la curvatura seccional en un punto determina el del tensor curvatura, [Br1, Gy.1, K-N].

Besse, [Be], afirma que "la curvatura de Ricci es bastante difícil de percibir". Históricamente, Ricci introduce la curvatura que lleva su nombre por la siguiente razón: Si M es una hipersuperficie regular del espacio euclídeo, lleva inherente la segunda forma fundamental, que es una forma diferencial cuadrática. Sus autovalores son las curvaturas principales y las autodirecciones definen las líneas de curvatura. En una variedad de Riemann no existe tal forma, ni direcciones privilegiadas. Sin embargo, mediante una contracción tensorial de los tensores curvatura y métrico, Ricci define un tensor simétrico covariante de grado dos y es posible calcular sus autovalores y autovectores. Su importancia en la Geometría de Riemann es excepcional. Una nueva contracción de los tensores de Ricci y métrico define la "curvatura escalar". Su interpretación geométrica es muy interesante, ya que es un múltiplo del coeficiente del término cuadrático en el desarrollo asintótico del volumen de una bola geodésica, [Be, p. 15; G-V].

5. El nacimiento de las geometrías no-euclídeas. Sus modelos

A finales del siglo XVIII la estructura de la geometría euclídea no estaba clara. Como dice Berger, quizás tampoco lo estaba para Euclides. Por entonces, se creía que el quinto postulado podía ser consecuencia de los cuatro anteriores, posiblemente con una condición adicional.

Por su importancia, tanto por si mismo como por su influencia en el desarrollo histórico de la curvatura, el quinto postulado de los "Elementos" se puede enunciar como sigue:

Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.

Desde siempre, el ser humano ha utilizado el hecho intuitivo de que, en el espacio ordinario, la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta. También se sabe desde hace siglos que la distancia más corta entre dos puntos sobre la esfera son los arcos de meridiano, los cuales se pueden denominar "rectas". Dada una recta sobre la esfera y un punto exterior a ella, no existe ninguna otra que pase por dicho punto y no corte a la primera. Así, en este caso, no se verifica el quinto postulado.

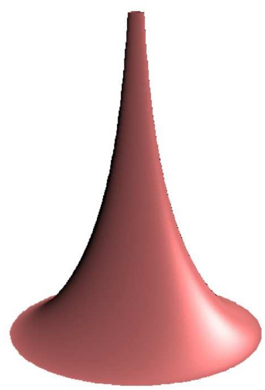
El análisis de la trigonometría esférica se remonta a los inicios de nuestra era, quizás incluso a algunos siglos antes. Todo ello estaba motivado por el estudio de la Astronomía. Intuitivamente, es fácil adivinar que, en este caso, la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos ángulos rectos y que este exceso parece ser debido a su "curvatura".

Riemann prueba cómo a la esfera se le puede asignar una forma cuadrática con coeficientes funciones de las coordenadas y con curvatura positiva. Él establece explícitamente que la geometría que todo el mundo había buscado, "la geometría hiperbólica", está definida por la misma forma cuadrática con curvatura negativa. La interpretación difícilmente podría ser más simple. Estas geometrías aparecen en casi todos los campos de las matemáticas: geometría algebraica, teoría de números, geometría diferencial, variable compleja, sistemas dinámicos, física matemática, etc.

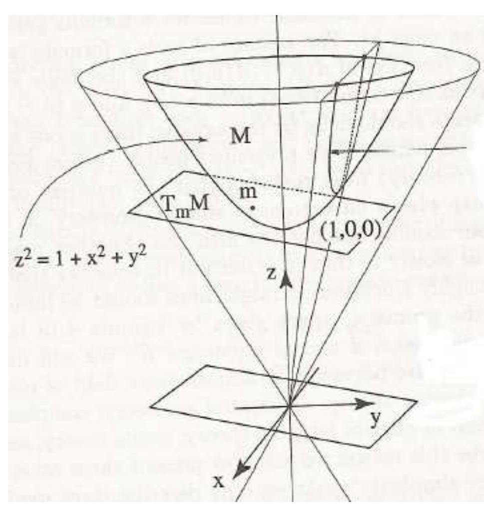
A comienzos del siglo XIX aparecen los trabajos de Lobachevschi y Bolyai quienes, independientemente, descubren la "geometría hiperbólica". El mismo Gauss estaba convencido de que podían existir otras geometrías satisfaciendo los primeros cuatro postulados, pero no el quinto. No publicó estas ideas y tenía razones bastante convincentes para ello: Si se presentaba a sus amigos como un perfeccionista, no parece lógico que estuviera inventando "nuevas geometrías".

Las construcciones de nuevas geometrías por Lobachevschy y Bolyai son bastante rudimentarias, ya que, como se puede ver en la obra de Hilbert, la geometría no-euclídea demanda abstracción y no existen modelos para ellas en la euclídea. En efecto, las isometrías de un objeto geométrico no están contenidas necesariamente en las del espacio euclídeo. La consistencia de la Geometría Hiperbólica está plenamente justificada en la literatura. Véase por ejemplo, las obras de Klein, Poincaré y la conferencia que José María Montesinos publicó en esta Real Academia, [Ms].

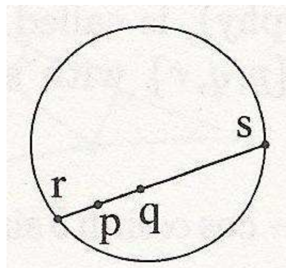
Es posible definir la "Geometría Hiperbólica" como aquella que satisface todas las fórmulas trigonométricas de una geometría esférica en la que el radio fuese imaginario puro. Globalmente, el plano hiperbólico no es una subvariedad regular del espacio euclídeo de dimensión 3 con la métrica inducida. Sin embatgo, Minding descubrió la "pseudoesfera" (superficie de revolución de la tractriz) que, localmente, tiene las propiedades del plano hiperbólico. Esta superficie ha sido extensamente estudiada por Beltrami.



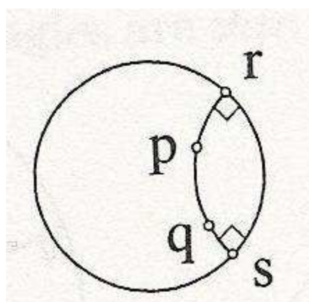
Es bien sabido que el espacio de Minkowski se puede representar como $\mathbb{R}^3$ con la métrica $\langle v, v\rangle = x^2 + y^2 - z^2$. Así, la esfera imaginaria $\mathbb{S}^2(i)$ es exactamente el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.



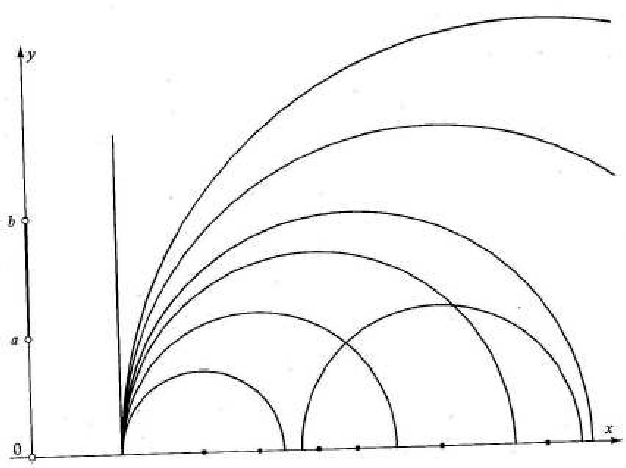
El modelo de Klein es la representación métrica en la que la variedad es el disco abierto unitario $x^2 + y^2 < 1$ y las geodésicas modelo son las líneas rectas.



El tercer modelo es el de Poincaré definido en el disco unitario abierto. Las geodésicas son circunferencias ortogonales a la frontera.



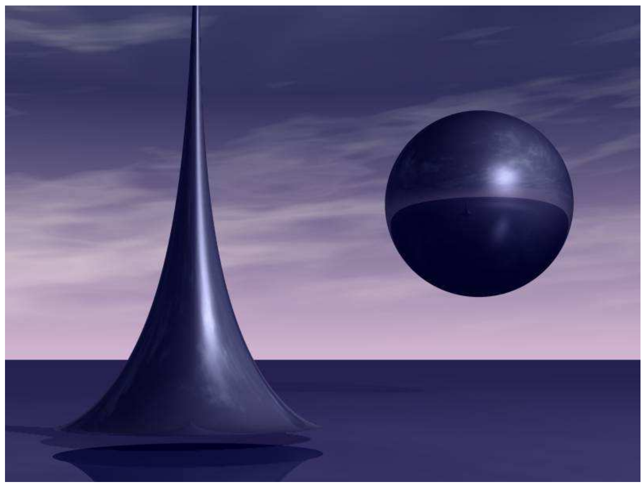
El cuarto tiene como modelo el semiplano de Poincaré y su representación geométrica es:



Es un ejercicio interesante probar que las cuatro geometrías que acabamos de definir son isométricas.

Geométricamente, es posible visualizar las "formas espaciales" como las variedades de Riemann de curvatura constante y que, localmente, son:

- El espacio euclídeo;
- La esfera $\mathbb{S}^n$;
- El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$.



6. Dos grandes líneas históricas de investigación

Como consecuencia de la repercusión de la memoria de Riemann y del programa de Erlangen de Klein, surgen dos grandes líneas de investigación en la Geometría:

(a) Estudio de las propiedades geométricas y topológicas de las variedades de Riemann de dimensiones bajas.

(b) Estudio de las variedades de Riemann con el mayor número de simetrías posibles.

En relación con la primera línea de investigación, la Conjetura de Poincaré fue formulada hace más de noventa años. Esta cuestión resultó ser de una extraordinaria dificultad en la dimensión tres. Durante varias décadas del siglo XX se suceden los intentos por resolverla. Actualmente existe una solución satisfactoria dada por Perelman, [Pn 1] y [Pn 2].

La primera familia interesante de 3-variedades clasificadas fueron las de Riemann “llanas”, que son localmente isométricas al espacio euclídeo. Para ello fue fundamental el resultado de Bieberbach: “Una variedad de Riemann compacta y llana está caracterizada, salvo un difeomorfismo afín, por su grupo fundamental”.

Mi maestro, el profesor Vidal Abascal, a quien tanto le debe la matemática española, me comentó que en los años cuarenta comenzó a interesarse por la teoría de curvas y superficies estudiando el libro de Bieberbach, [Bh]. Al analizar alguno de sus teoremas, Vidal se planteaba su generalización a dimensiones superiores. Así, entre otros, fue capaz de publicar artículos tan interesantes como el relativo a la Fórmula de Steiner para los espacios de curvatura constante, [VA1].

7. La curvatura en los espacios homogéneos

La teoría de los grupos de Lie ha sido extensamente estudiada, y tiene múltiples aplicaciones en otras ramas de la Matemática, en especial en la Física Teórica. Los grupos de Lie tienen una estructura geométrica extremadamente rica. Su curvatura está definida de una manera canónica. Un resultado clásico nos dice que todo subgrupo de un grupo de Lie define sobre éste una foliación. Si es cerrado, entonces el conjunto de clases de equivalencia admite una estructura de variedad diferenciable. Este es un método elegante y seguro para encontrar ejemplos no triviales de variedades diferenciables, conocidas por el nombre de homogéneas. Las más próximas al espacio euclídeo son los espacios simétricos y, dentro de esta familia, los de rango uno o “espacios homogéneos para pares de puntos”, [Hn, p. 164]; esto es, la esfera, el espacio hiperbólico y los proyectivos reales, complejos y cuaterniónicos. Los espacios simétricos fueron clasificados por Cartan en [Cn.1], [Cn.2] y [Cn.3] y sus propiedades geométricas han sido extensamente estudiadas; véase, por ejemplo, el libro enciclopédico de Helgason, [Hn]. La curvatura de los espacios simétricos es bastante simple y manejable y la propiedad fundamental que los caracteriza es que su tensor curvatura es paralelo.

Durante la segunda mitad del siglo XX muchos matemáticos se preocuparon por estudiar y clasificar los espacios homogéneos no-simétricos. Aparecen así, entre otras familias, los espacios homogéneos naturalmente reductivos y los s-simétricos. Estos últimos han sido estudiados por Kowalski, Vanhecke y Gray, entre otros, [Ki], [Gy.2]. Algunos de los matemáticos que estudiaron los espacios homogéneos naturalmente reductivos fueron Kowalski y Vanhecke, [K-V], Berger, [Br3], y Wolf-Gray, [Wf-Gy]. Es importante observar que estas dos familias de espacios homogéneos tienen intersección no vacía. Por ejemplo el espacio homogéneo naturalmente reductivo: $M = \frac{U(3)}{U(1)\times U(1)\times U(1)}$ es también un espacio 3-simétrico. Algunos espacios homogéneos naturalmente reductivos del tipo banderas han sido utilizados por Penrose para estudiar las correspondencias que llevan su nombre, [Ws].

Cuando el naturalista Buffon plantea en un apéndice de uno de sus libros el problema de la aguja, difícilmente podría imaginar que estaba poniendo los cimientos de una nueva especialidad en Matemáticas: *la Geometría Integral*. Su desarrollo se debe en un principio a Crofton y, posteriormente, a Blachske y su escuela. Aunque no aparecían explícitamente los espacios simétricos, homogéneos ni el concepto de curvatura, todos ellos estaban implícitos en el desarrollo de dicha teoría y, en efecto, resultaron ser el pilar fundamental y básico de la misma, [So].

Santaló, Académico Correspondiente de esta Real Academia y a propuesta mía, Socio de Honor de la RSME, nos ha legado múltiples y muy variadas publicaciones sobre investigación matemática y docencia. Santaló viajó a Hamburgo en 1931 para especializarse con Blaschke. Allí conoció a Chern, quién le enseñó las nociones básicas del cálculo de la referencia móvil de Cartan. Como curiosidad, Santaló me contó que Blaschke le recomendaba asistir a un seminario impartido por un joven matemático, que consideraba muy interesante. Ese joven era Kaehler. Durante muchos años Chern y él se sucedieron en una serie de generalizaciones de teoremas de la Geometría Integral sobre densidad cinemática, muchos de los cuales han pasado a la historia como el núcleo de la Geometría Integral Clásica.

La curvatura está presente en toda la obra geométrica de Santaló. Muchas de sus publicaciones están dispersas en bibliotecas y hemerotecas con poca difusión o están agotadas. Considero que sería interesante poder recopilar, para el año del centenario de su nacimiento, toda su obra científica y hacerla accesible a los investigadores interesados, tanto por la importancia en sí misma como por sus aplicaciones a la Estereología.

También merecen especial atención las contribuciones de los profesores Cruz Orive y Gual, que han publicado diversos artículos en los que, utilizando sus técnicas de la Geometría Integral, obtienen resultados en Tomografía con interesantes aplicaciones a la Biomedicina. Considero que ésta es en la actualidad una especialidad muy interesante de la Matemática Aplicada.

8. ¿Por qué son importantes las conexiones?

El transporte paralelo de un vector en el espacio euclídeo es conocido desde tiempos de Euclides. La definición de un concepto análogo a lo largo de una curva en una variedad de Riemann se debe a Levi-Civita, [LC]. La idea geométrica es muy sencilla. Se considera una curva contenida en una superficie y la desarrollable tangencial de sus planos tangentes, que es una superficie desarrollable en el plano a la que podemos aplicar las propiedades del paralelismo euclídeo. Volviendo a los espacios tangentes, se tiene definido de una manera natural el concepto de desplazamiento paralelo que, evidentemente, depende de la curva. Este concepto fue generalizado por Cartan, utilizando el método de la referencia móvil. La curvatura aparece en esta teoría de un modo natural y, de hecho, ya utiliza esta palabra en el título de su artículo.

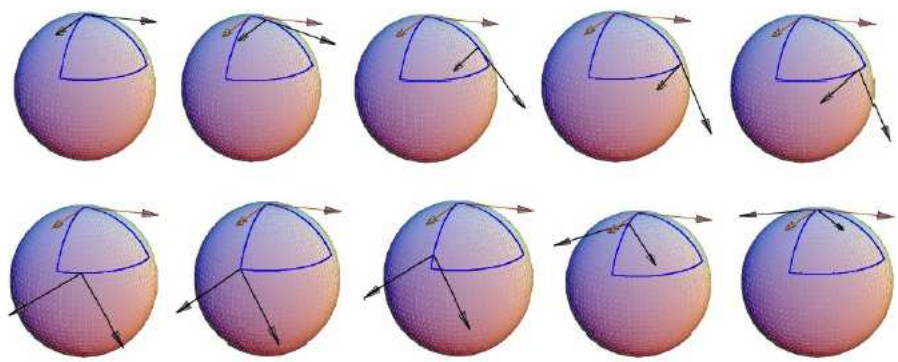
Levi-Civita y su maestro Ricci-Curbastro, [RC-LC], construyen la teoría del cálculo diferencial absoluto que resultó ser básico por sus aplicaciones a la teoría de la relatividad. Como anécdota, cabe señalar que Levi-Civita ayudó a Einstein a entender el cálculo tensorial.

En la década de los años treinta del siglo XX aparecen diversas generalizaciones del concepto de espacio producto. Quizás las más naturales sean los fibrados principales y vectoriales. En los años cincuenta, Koszul, [Kl], y Ehresmann, [En] definen respectivamente el mismo concepto de "conexión" de forma axiomática en fibrados vectoriales y mediante formas diferenciables en fibrados principales. La importancia de este concepto radica en que es una generalización natural del desplazamiento paralelo. En las obras de Spivak, [Sk] y Kobayashi-Nomizu, [K-N], entre otros, se encuentra ampliamente desarrollada la teoría de conexiones, la cual ha resultado de una gran utilidad, no sólo en la Geometría Diferencial, sino también por sus aplicaciones a la Física Teórica.

9. Una nota sobre el grupo de holonomía

Conociendo la importancia de los grupos en Matemáticas, es bastante natural intentar capturar en algún grupo alguna información de la Geometría de Riemann de la variedad. Utilizando la noción de transporte paralelo y la teoría de fibrados principales, es posible llegar al concepto de holonomía de una conexión mediante el transporte paralelo a lo largo de caminos. Cartan esperaba que la holonomía reflejase bastante fielmente la estructura geométrica de la variedad y permitiese su clasificación. En efecto, el grupo de holonomía resultó fundamental para la clasificación que Cartan realizó de los espacios simétricos, [Be]. Este estudio quedó olvidado hasta que Borel y Lichnerowicz vuelven a interesarse por el tema, [B-L]. A partir de ese momento su estudio y análisis han gozado de gran popularidad.

La filosofía es la siguiente: una variedad posee una estructura invariante por el desplazamiento paralelo si y sólo si esa estructura es invariante en un punto bajo el grupo de holonomía. Si se considera su curvatura, desde el punto de vista geométrico ésta representa exactamente el transporte paralelo a lo largo de un paralelogramo infinitesimal, [A-S].



Resulta sorprendente que en los trabajos de clasificación de la holonomía aparecen muy pocos grupos irreducibles. Recientemente estos grupos adquirieron gran relevancia por sus aplicaciones a la Física Matemática, [F-G-R 1, 2]

10. El problema Isoperimétrico

La Desigualdad Isoperimétrica en el plano es quizás el teorema global más antiguo en Geometría Diferencial. El problema se puede enunciar como sigue:

De todas las curvas cerradas y simples en el plano y con una longitud dada, ¿cuál es la que limita el dominio de mayor área?.

Los griegos ya conocían su solución: la circunferencia. Weierstrass, como un corolario a su teoría del cálculo de variaciones, dio una demostración completa. Posteriormente, se dieron muchas más sencillas. Do Carmo, [DC], nos presenta la de Schmidt. La desigualdad isoperimétrica clásica nos dice que:

$$L^2 \geq 4\pi A\,,$$

y se da la igualdad si, y sólo si, la curva es una circunferencia.

Aparentemente, la curvatura no interviene. La razón es que la variedad ambiente es el plano. Para un dominio sobre la esfera de curvatura K, ésta se convierte en:

$$L^2 \geq 4\pi A - KA^2\,,$$

y se da la igualdad si, y sólo si, la curva es un paralelo, [Bn].

El problema isoperimétrico fue ampliamente estudiado desde comienzos del siglo XX y son múltiples y muy variados los resultados obtenidos. Una visión completa del mismo hasta la década de los ochenta se encuentra en la memoria de Ossermann, [Osn1].

11. La importancia del operador de Jacobi

Entre las herramientas más útiles para estudiar el operador curvatura de una variedad de Riemann se encuentran los "campos de Jacobi". Estos son soluciones de una ecuación diferencial planteada a lo largo de una geodésica . El campo tensorial simétrico

$$R_\gamma = R(\ .\ ,\gamma')\,\gamma'\,,$$

se denomina "operador de Jacobi a lo largo de γ" y desempeña, vía los campos de Jacobi, un papel central en el estudio de las geometrías intrínseca y extrínseca de esferas geodésicas, tubos y reflexiones respecto a puntos, curvas y subvariedades.

En general, la determinación explícita de los campos de Jacobi es un problema muy difícil, excepto para las variedades de Riemann con un tensor curvatura simple. Pero algunas propiedades de una variedad de Riemann se pueden analizar utilizando las de sus operadores de Jacobi. En [B-V2] se estudiaron las familias de variedades verificando que su operador de Jacobi tiene espectro constante o autovectores paralelos. Excepto para los espacios simétricos, estas dos familias son disjuntas.

12. Conclusión

Por lo expuesto anteriormente, se deduce que el estudio de la curvatura es un tema difícil, pero apasionante. Además este concepto está presente en el mundo físico que nos rodea.

Fridman, en el prólogo de su obra *El mundo como espacio y tiempo*, [Fn, Prólogo], nos cuenta que una noche Descartes estaba observando el firmamento. Un caminante le preguntó: ¿Cuántas estrellas hay en el cielo? Descartes le respondió: No se puede abarcar lo inabarcable.

A lo largo de la historia, el deseo de explicar las leyes de la naturaleza siempre ha inquietado al ser humano. Muchas mentes han puesto su empeño en explicar, con más o menos éxito, las leyes físicas, en base a su experiencia y nivel de conocimientos.

No es pequeña la dificultad que supone la incertidumbre de la meta. Quizás más en las Matemáticas que en otras ramas de las ciencias. Discernir cuáles son los objetivos que vale la pena perseguir ya es un avance en la solución de los problemas, aunque uno mismo sea incapaz de llegar a ella.

Agradecimientos

El autor agradece la ayuda y amistad de sus discípulos y colaboradores a lo largo de su vida académica, así como al profesor J.J. Etayo por su participación decisiva en la reconstitución de la R.S.M.E.

El autor da las gracias al comité editorial de RACSAM por la autorización para publicar esta versión en español en la Misc. Mat. de la Soc. Mat. Mexicana.

Bibliografía básica

[A-W] C. B. Allendoerfer and A. Weyl, *The Gauss-Bonnet Theorem for Riemannian polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943), 101-129.

[Br1] M. Berger, *Pincement riemannien et pincement holomorphe*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **14** (1960), 151–159.

[Br2] M. Berger, A panoramic view of Riemannian Geometry, Springer, 2003.

[Br3] M. Berger, *Les variétés riemanniennes homogénes normales simplement connexes à courbure strictement positive*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 179–246.

[B-V2] F. Berndt and L. Vanhecke, *Aspects of the geometry of the Jacobi operator*, Riv. Mat. Univ. Parma **3** (1994), 91–108.

[Bn] F. Bernstein, *Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene*, Math. Ann. **60** (1905), 117–136.

[B-D-P] J. Bertrand, M. Diguet y V. Puiseux, *Démonstration dún théoréme de Gauss*, Journal de Mathématiques **13** (1848), 80–90.

[Be] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete **3**, Folge, **10**, Springer, (1987).

[Bt] O. Bonnet, J. École Polytechnique, 19 (1848), 1–146.

[Bh] L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Dover Publications, 1944.

[By] W. M. Boothby, An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry. second ed., Academic Press Inc., Orlando, Fla1986.

[B-L] A. Borel and A. Lichneriwicz, *Groupes d'holonomie des varieties riemanniennes*, C. R. Acad. Sci. París **234** (1952), 1835–1837.

[Cn.1] E. Cartan, *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélism conserve la courbure*, Rend. Acc. Lincei 3i (1926), 544–547.

[Cn.2] E. Cartan, *Sur une classe remarquable déspaces de Riemann*, Bull. Soc. Math. France **54** (1926), 214–264.

[Cn.3] E. Cartan, *Sur une classe remarquable déspaces de Riemann*, Bull. Soc. Math. France **55** (1927), 114–134.

[DC] M. P. Do Carmo, Differential Geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1976.

[D] A. Dou, *Evolució dels fonaments de la matemática i relacions amb la física*, Llió inaugural del curs académic 1987–88. Universitat Autónoma de Barcelona.

[En] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie (espaces fibrés), Bruxelle, (1950), 29–55.

[Fn] A. A. Fridman, El mundo como espacio y tiempo, Ed. 3, Editorial URSS, Moscú, 2005.

[F-G-R 1] J. Fröhlich., O. Grandjean and A. Recknagel, *Supersymmetric quantum theory and differential geometry*, Comm. Math. Phys. **193** (1998), 527–594.

[F-G-R 2] J. Fröhlich, O. Grandjean and A. Recknagel, Supersymmetric quantum theory, non commutative geometry, and gravitation, Symétries quantiques (Les Houches 1995), North-Holland, Amsterdam, 1998.

[Gy.1] A. Gray, Tubes, Addison Wesley, London, (1970), Redwood City California, 1990.

[Gy.2] A. Gray, *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3*, J. Differential Geometry **7** (1972), 343–369.

[G-V] A. Gray and L. Vanhecke, *Riemannian geometry as determinated by the volumes of small geodesic balls*, Acta Math. **142** (1979), 157–198.

[Gv] M. Gromov, *Sign and geometric meaning of curvature*, Rend. Sem. Mat.Fis. Milano **61** (1991), 9–123 (1994).

[Hn] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetri Spaces, Academic Press, New York, (1978).

[H-C V] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, Geometry and the imagination, Chelsea, N. Y. 1952.

[Kg] W. Klingenberg, Riemannian geometry, second ed., Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[K-N] S. Kobayhashi-K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, V. I, II. Willey (Interscience), New York, 1969.

[Kl] J. L. Koszul, Lectures on fibre bundles and Differential Geometry, Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1965.

[K-V] O. Kowalski - L. Vanhecke, *Classification of five-dimensional naturally reductive spaces*, Math, Proc. Camb. Phil. Soc. **97** (1985), 445–463.

[Ki] O. Kowalski, Generalized Symmetric Spaces, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, vol. 805, 1980.

[LC] T. Levi-Civita, *Nozione di parallelisme in una varietá qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, Rendic. Circ. Math. di Palermo **42** (1917), 173–205.

[Ms] Montesinos, J. M., La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica. A. Historia de la Matemática en el siglo XIX, 2a. parte. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1994.

[ON] B. OÑeil, Elementary Differential Geometry, Academic Press, N. Y. 1966.

[Osn1] R. Ossermann, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 1182–1238.

[Osn2] R. Ossermann, *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Montly **97** (1990), 731–756.

[Pn 1] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric application, (avalaible on the Internet from : arXiv. math. DG/0211159 v1, 11 November 2002).

[Pn 2] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds (arXiv:math. DG/0303109 v1, 10 March 2003); Finite extinction time for the solutions of the Ricci flow on certain three-manifolds (arXiv:math.DG/007245, 17 July 2003).

[RC-LC] G. Ricci-Curbastro and T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. **54** (1900), 125–201.

[Sk] M. Spivak, A comprehensive Introduction to Defferential Geometry, I, II, III, IV and V, Publish or Perish Inc, 1970, 1975.

[Sg] S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry, Chelsea Publ. Co. N. Y. 1983.

[So] L. A. Santaló, Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1976.

[Sr] J. J. Stoker, Differential Geometry, John Wiley & Sons Inc., N. Y. 1989.

[Te] J. A. Thorpe, Elementary topics in differential geometry, Springer-Verlag, N. Y. 1994.

[VA1] E. Vidal Abascal, *A generalization of Steiner's Formula*, Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), 841–844.

[VA2] E. Vidal Abascal, Introducción a la Geometría Diferencial (con prólogo de J. Rey Pastor), Ed. Dossat, Madrid 1956.

[Ws] R. Wells, *Complex manifolds and mathematical physics*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **1** (1979), 296–336.

[Wf-Gy] J. A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group of automofphisms*, J. of Differential Geometry **2** (1968), 77-159.

Bibliografía complementaria

[A-S] W. Ambrose and I. M. Singer, *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 428–443.

[An] T. Aubin, Nonlinear Analysis on manifolds. Monge-Ampre Equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 252, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[B-V.1] F. Berndt and L. Vanhecke, *Two natural generalizations of locally symmetric spaces*, Diff. Geom. Appl. **2** (1992), 57–80.

[B-Z] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, grundlehren der mathematischen Wissenschaften 285, Springer-Verlag, (1988).

[Cn.4] E. Cartan, Lecons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, París, 1928.

[Ch] I. Chavel, Riemannian Symmetric Spaces of Rank One, Marcel Decker, New York, (1972).

[Ch-E] J. Cheeger and D. G. Ebin, Comparison Theorems in Riemannian Geometry. North-Holland Publ., (1975).

[Chn.1] S. S. Chern, *The geometry of G-structures*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 167–219.

[Chn.2] S. S. Chern, Geometry of characteristic classes. Proc. Thirteenth Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress, (On Differential Topology, Differential Geometry and Applications,Dalhouise Univ., Halifax, N. S., 1971) 1 (1972), 1–40.

[D R] G. De Rham, *Complex à automorphismes et homeomorphie différentiables*, Ann. Inst. Fourier **2** (1950), 51–67.

[D-V.] J. E. Dillen and L. C. A. Verstraelen (eds), Handbook of Differential Geometry. Vol. I. North-Holland, Amsterdam, 2000.

[Di] P. Dombrowski, 150 years after Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curves, Société Mathématique de France, Paris, 1979, with the original text of Gauss.

[Gz] A. Goetz, Introduction to Differential Geometry, Addison Wesley, London, 1970.

[Hrn] R. Hermann, *Existance in the large of totally geodesic submanifolds of Riemannian spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 59–61.

[Ht] D. Hilbert, Fundamentos de la Geometría, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Colección: Textos Universitarios núm. 5, Madrid, 1991.

[K] H. Karcher, Riemannian comparison constructions, Global Differential Geometry, MAQA Studies in Math., vol. 27, S. S. Chern, editor, MAA (1989), 170-222.

[Mr] J. Milnor, *Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds*, Notices of the AMS **50** (2003), 1226–1233.

[N] A. M. Naveira, Sobre la historia de las matemáticas en Valencia y en los países mediterráneos, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia, 1998.

[N-T] A. M. Naveira and A. Tarrío, *A method for the resolution of the Jacobi equation* $Y'' + RY = 0$ *on the manifold* $Sp(2)/SU(2)$, (preprint.

[Nu] K. Nomizu, *Invariant affine connexions on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1954), 33–65.

[P] A. Preissmann, *Quelques proprietés globales des espaces de Riemann*, Comment. Math. Helv. **15** (1943), 175–216.

[S-T] I. M. Singer and J. A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1976.

[T 1] W. P. Thurston, The geometry and Topology of three manifolds, Princeton Math. Dept. Notes, 1979.

[T 2] W. P. Thurston, *Hyperbolic structures opn 3-manifolds I, Deformation of acylindrical manifolds*, Math. Ann. **270** (1985), 125–145.

[V] L. Vanhecke, *Geometry, curvature and homogeneity*, Rev. Acad. Canar. Cienc., X (1998), 157–174.

[V-W] O.Veblen and H. C. Whitehead, The foundations of Differential Geometry, Cambridge University Press, 1932.

[Ve] F. Vera, Científicos griegos, Ed. Aguilar, Madrid, 1970.

[Wr] F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman and Company, London, 1970.

[Wl] H. Weyl, *On the volume of tubes*, Amer. J. of Math. **61** (1939), 461–472.

[Wy] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. **37** (1936), 645–680.

[Wf] J. Wolf, Spaces of constant curvature, 4th Ed., Publish or Perish, Berkeley, (1977).