LAS MATEMATICAS "MODERNAS":

¿UN ERROR PEDAGOGICO Y FILOSOFICO?

Por René Thom (*)

En el espíritu de la mayoría de nuestros contemporáneos las matemáticas llamadas modernas gozan de un gran prestigio. Una propaganda errática las ha presentado, con la Cibernética y las ciencias de la Información, como el logro esencial de la técnica actual, el instrumento indispensable para el desarrollo futuro de toda ciencia. Pero, aún más, a partir de la modernización de los programas, las matemáticas"modernas" penetraron en la vida familiar. Muchos padres, ahora incapaces de ayudar a sus hijos, se inquietaron por este ingreso y, al no reconocer en el vocabulario de sus hijos las viejas nociones familiares, se sintieron perdidos por esta nueva terminología. Algunos, perplejos, la interpetraron como un síntoma más del abismo inter-generacional y asumieron una posición de rechazo sistemático hacia las novedades. Sin embargo, otros, y el caso es frecuente entre los educadores, aceptaron con entusiasmo los nuevos programas, las nuevas nociones. los nuevos símbolos. ¿Cuál debe ser nuestra posición ante estas reacciones?

(*) **Este artículo traducido fué enviado por Eugenio Filloy del CIEA del IPN. La revisión de la traducción estuvo a cargo de Jorge Ize del CIMAS, UNAM.**

Las modificaciones de los programas

Hagamos un recuento sucinto de los cambios efectuados en los programas

1° Nociones Introducidas

A. Teoria "elemental" de conjuntos; uso de los símbolos aplicaciones de un conjunto en otro; cuantificadores. Esta es, evidentemente, la innovación más impresionante. Los conjuntos aparecen ahora, con una especie de ubicuidad, desde el *jardín de niños* hasta la *preparatoria* Regresaremos a este punto mas tarde.

B. Desarrollo de nociones algebraicas: leyes de composición definidas sobre un conjunto; nocion de grupo, de anillo, de campo. Introducción de los números complejos en preparatoria.

C. Las nociones fundamentales del cálculo diferencial e integral (derivada, primitiva, funciones elementales como Log y Exp) se introducen mas temprano.

2°Nociones Eliminadas

La geometría euclidiana tradicional, particularmente, los refinamientos de la geometría del tríangulo.

Se advierte, al final del balance, que el cambio se traduce en un incremento sustancial del material impartido en

Secundaria y Preparatoria. Sí un programa merece calificarse de *demente* es el de matemáticas de "*Terminale C*".
¿ Es posible evitar esta inflación ?

Señalemos, además, que la tendencia a algebrizar la enseñanza, con detrimento del material geométrico, se encuentra también, y amplificada, en la enseñanza de las Facultades.

La Eliminación de la Geometría

La eliminación de la geometría euclidiana tradicional se basó en dos argumentos. El primero es teórico: los trabajos axiomáticos derivados de los "*Grundlagen der Geometrie*" de Hilbert mostraron que el pretendido rigor de los Elementos de Eucides es en,gran parte, ilusorio, ya que tiene que recurrir con frecuencia a la intuición. Por lo tanto, es preferible evitarla (la geometría), desarrollando teorías como el algebra, que admiten una presentación rigurosa. El segundo es práctico: la geometría euclidiana tradicional, con su desarrollo de la geometría del triángulo, es inútil y pedante. Nunca nadie ha necesitado utilizar la "*recta de Simpson*" o el "*círculo de Feuerbach*".

Algebra y Geometría

Discutamos primero el argumento de utilidad. Se dice que el álgebra es más útil, más necesaria que la geometría

Es claro que nadie va a negar la utilidad científica general de una teoría como el álgebra lineal, de algunas nociones de álgebra multilineal. Pero cuando se trata de álgebra conmutativa general, de polinomios etc., debemos mostrarnos un poco más escépticos. Además, en la vida diaria, ¿ quién ha tenido que resolver una ecuación de segundo grado o que utilizar explícitamente la noción de módulo sobre un anillo ?. Entonces, el argumento utilidad no es para el álgebra tan determinante como parecía al principio. Sin embargo, es plenamente válido para las nociones de cálculo diferencial e integral — punto C antes mencionado — pues estos conocimientos básicos son indispensables para cualquier presentación de la física clásica.

Ciertamente, a un nivel elemental, el uso del álgebra simplifica masivamente los problemas. Todos recordamos los problemas de aritmética de primaria, cuya solución "*por razonamiento*" exigía una agilidad mental poco común, en tanto que la solución "*por algebra*" solo requiere del empleo correcto de un mecanismo formal elemental. Aquí, la economía de pensamiento aportada por el álgebra es innegable. Pero, apenas se comienza a tratar situaciones más complicadas, esta ventaja del álgebra tiende a desaparecer. Descartes imaginó la geometría analítica para reducir la geometría al álgebra. Más la experiencia nos ha mostrado que la ventaja de los métodos analíticos sobre los métodos geométricos cuando se trata de un problema de naturaleza algo teórica y general no es decisiva.

El Modernismo

En el nivel de las matemáticas actuales, el uso del álgebra como instrumento de demostración es, ciertamente, importante y puede que hasta esencial. Sin embargo, podemos preguntarnos si las necesidades de los matemáticos profesionales deben tomarse en cuenta cuando se trata de los programas de Secundaria y Preparatoria. Empapados del espíritu bourbakiano, los matemáticos de la generación actual tuvieron la tendencia, muy natural, de hacer admitir, en la enseñanza superior y media, las teorías, las estructuras algebráicas que les habían sido tan útiles en sus propias investigaciones y que triunfan dentro del espíritu de la matemática de esta época. Pero debemos preguntarnos si se deben presentar, en Secundaria y Preparatoria al menos, los últimos descubrimientos de la técnica actual Desde este punto de vista, los matemáticos no fueron los únicos que sucumbieron a la tentación modernista He visto textos de Biología de Preparatoria donde se presentan, como verdad científica definitivamente establecida, la doble hélice del ADN de Watson y Crick y su mecanismo de replicación mediante una enzima replicadora Se debería ver las cosas con mayor perspectiva respecto de las novedades introducidas en la enseñanza. En Francia, el cuerpo de inspectores genera-les hubiera debido ejercer un sano juicio para asegurar la estabilidad necesaria de los programas Pero, seguramente temeroso de que un excepticismo de buena fe se interpretara como la esclerosis propia de la edad, esta barrera no funcionó con toda la eficiencia deseable Y además, es necesario que los textos cambien y que los editores vivan

El problema de la Geometría

En fin, el argumento de utilidad, posiblemente, no es de un peso decisivo en los programas. Ignoremos, como vestigio de un pasado superado, la definición de *cultura* como "*aquello que queda cuando se ha olvidado todo*". En general, se sigue creyendo que bajo una forma u otra, uno de los fines de la enseñanza es la "*selección*", o sea, detectar lo mejor posible las aptitudes de cada alumno y desarrollarlas al máximo en los mejores dotados. Más yo creo que es imposible llevar a cabo esa detección en una disciplina que no conlleve algunos elementos gratuitos, inútiles En efecto, para juzgar plenamente las capacidades de un alumno, debemos ponerlo en una situación activa y no en una receptiva; debemos apelar a su iniciativa, a su espíritu de empresa individual. Pero esto no es concebible en el marco de una teoría "*útil*", donde todos los elementos, fijados por una utilidad técnica posterior, se enseñan dogmáticamente y donde la virtud escolar por excelencia es la asimilación, la memorización rápida y correcta de los datos. Para ello, solo las toerías que presentan un aspecto de juego tienen virtud pedagógica y, de todos los juegos, la geometría euclidiana, con su referencia continua a una idea intuitiva subyacente, es el menos gratuito, el más rico en significado. Por lo tanto la tendencia actual a reemplazar la geometría por el álgebra es, pedagógicamente hablando, nefasta y debería abolirse. Hay, para esto una razón sencilla. Mientras que hay problemas de geometría, no hay problemas de álgebra. En efecto, un problema de álgebra apenas puede ser un ejercicio simple que requiere la aplicación ciega de reglas de cálculo de un esquema formal pre-establecido. Salvo rarísimas excepciones, no se puede pedir a un alumno que demuestre un teorema de álgebra pues o su solución es casi inmediata (por sustitución directa de la definición al definido), o es un verdadero problema de álgebra teórica y su solución esta muy por encima de las capacidades de los alumnos, aún de los más aptos. Sin exagerar mucho podemos decir que toda pregunta de álgebra es *trivial* o es *indecidible*. Por lo contrario, el problema clásico de geometría puede presentar una escala muy amplia de dificultades.

Añadamos que, de todas formas, los problemas de geometría exigen mucho tiempo, mucho esfuerzo, reflexión sostenida, capacidades combinatorias de las cuales pocos estudiantes son capaces. Puede que la geometría euclidiana, como la traducción latina, sea uno de esos ejercicios nobles y en desuso, reservados a una élite, e incompatibles con la ense ñanza de masa. Si este fuera el caso, entonces, evitar la geometría sería un problema sociológico, que prefiero no discutir. Pero de todas maneras, sería un error grande creer que se puede facilitar el estudio de las matemáticas, reemplazando la geometría por estructuras algebraicas inculcadas masiva y prematuramente faltas de una motivación conveniente. Desde este punto de vista, no parecería necesaria la introducción en el programa de preparatoria de los números complejos.

El Rigor

Dediquemonos ahora a la segunda objeción contra la geometría euclidiana, aquella que asegura el caracter imperfecto, no riguroso de la axiomática de los Elementos. Primero, podemos contestar que la enseñanza de la geometría abandonó hace tiempo, la retorica pesada e indigesta de los "*Elementos*. Algunos acarician la esperanza de sustituirla con una versión aceptable de la axiomática de Hilbert en los *Grundlagen*. Esperanza frustrada, inutil precisarlo, por la enorme complejidad de esa construcción. En realidad, no se puede tomar posición ante este problema sin antes responder una pregunta de carácter filosófico: ¿qué se debe entender por rigor en matemáticas? Podemos adoptar tres posiciones:

a) Concepción formalista.

Dado un sistema formalizado (S), una proposición (F) de (S) es verdadera si puede deducirse de los axiomas por medio de un número finito de operaciones permitidas en (S).

b) <u>Concepción realista o platónica.</u>

Los entes matemáticos existen independientemente de nuestro pensamiento, como Ideas Platónicas. Una proposición (P) es verdadera si expresa una relación que existe, efectivamente, entre Ideas; o sea, una Idea jerárquicamente superior, que estructura un conjunto de ideas que le son subordinadas.

c) <u>Concepción empiricista o sociológica.</u>

Una demostración (D) se considera rigurosa, si con ella estan de acuerdo los mejores especialistas del momento.

De estas tres actitudes, la que goza actualmente del favor de los matemáticos es la primera. A primera vista, es la más seductora. No provoca las dificultades ontológicas de b), ni es vaga y arbitraria como c). "*Las matematicas, ciencia donde no se sabe de que se habla, ni si lo que se dice es cierto*" (B. Russell). Desgraciadamente, la posición formalista pura es difícil de sostener y esto, ¡oh ! paradoja, por razones de orden formal. Se saben las dificultades de la formalización de la aritmética, ligadas al teorema de Gödel. M. Kriesel (3) enjuició, en esta misma revista, la actitud formalista. Por mi parte, me contentaré con la fábula siguiente: supongamos que, para una teoría formalizada (S) hayamos podido construir una máquina electrónica (M) capaz de realizar, a velocidades increibles, todas las operaciones permitidas en (S). Queremos verificar una formula (F) de la teoría Luego de un cálculo compuesto de 10^{30} operaciones elementales, efectuado en unos cuantos segundos, la máquina (M) nos da una respuesta positiva. ¿Qué matemático aceptaría, sin titubear, como válida una tal "*demostración*", estando imposibilitado para verificar paso a paso la prueba?

El *sentido* en matemática.

Todo matemático, con algo de honestidad intelectual, debe reconocer que en todas sus demostraciones es capaz de dar un *sentido* a cada uno de los símbolos que manipula En esto difiere del físico teórico que a menudo, no vacila en confiarse mágicamente a las virtudes del formalista ciego, con la esperanza, frecuentemente frustrada, de que *las luces del final dispersen las tinieblas del comienzo.*

Pero, si abandonamos la definición formalista del rigor, solamente nos quedan (b) y (c) para escoger. Considerando todo, el matemático debe tener el valor de sostener sus convicciones íntimas. Así, debe afirmar que las estructuras matemáticas tienen una existencia independiente de la mente humana que las piensa; forma de existencia sin duda diferente a la existencia concreta y material del mundo pero, sin embargo, sutil y profundamente ligada a la existencia objetiva. Porque si las matemáticas fuesen únicamente un juego gratuito, cómo podríamos explicar su éxito indiscutible en la descripción del universo. Las matemáticas se hallan no solamente en la disposición rígida de las leyes físicas, sino, también, de manera más oculta, pero no por esto discutible, en el juego infinito de la sucesión de formas en el mundo animado e inanimado, en la aparición y destrucción de sus simetrías. Es por esto que, a pesar de las apariencias, la hipótesis de Ideas Platónicas, informándonos acerca del universo es la más natural y, filosóficamente, la más económica. Pero, de este mundo de Ideas, los matemáticos solamente tienen en cada momento, una visión incompleta y fragmentaria. Por eso, toda demostración es ante todo la revelación de una nueva estructura cuyos elementos yacían separados en nuestra intuición y de la cual nuestro razonamiento reconstruye la génesis progresiva. Toda demostración es, en este sentido, una *mayéutica* * : se trata de recrear en el lector los procesos sicológicos de las manifestaciones de la verdad implícita, de la cual *el conocía todas "las premisas pero que permanecía velada en lo no formulado"*. Es en este sentido que no hay contradicción entre los puntos (b) y (c), ya que el mundo de las Ideas no nos es dado de un solo golpe y nos es necesario re-crearlo en nuestra conciencia, por medio de una reconstrucción permanente y recomenzada una y otra vez.

* La mayéutica es el proceso socrático de parir las ideas.

Los adversarios de la tesis ontológica (b) deberían reflexionar sobre el punto siguiente. No existe, en la historia de las matemáticas un ejemplo de que el error de un hombre haya llevado la ciencia hacia un camino erróneo. A menudo, los matemáticos se extraviaron en el desarrollo formal de teorías insignificantes y sin interes; lo hicieron en el pasado, lo hacen en el presente y seguramente lo seguirán haciendo. Pero, jamás un error importante pudo deslizarse en un resultado sin que su presencia haya sido casi inmediatamente descubierta. Un tal consenso no podría explicarse si no respondiera a un sentimiento general, fruto del conflicto de la mente con las restricciones, permanentes, universales e intemporales Confiando en la existencia de un universo ideal, el matemático no se preocuparía en exceso de los límites de los procedimientos formales. Podría olvidar el problema de la no-contradicción; ya que el mundo de las Ideas sobrepasa infinitamente nuestras posibilidades combinatorias y es en la intuición donde reside la *última ratio* (la razón última, final,...) de nuestra fe en la veracidad de un teorema, ya que un teorema es, ante todo, según una etimología hace tiempo olvidada, el objeto de una visión.

Hay que reconocer que no hay una definición rigurosa de rigor. Afirmamos, por lo tanto, que una demostración es rigurosa si, en todo lector suficientemente instruido y preparado, suscita un estado de evidencia que lo hace estar de acuerdo con ella. Y esta evidencia proviene de la posibilidad de tener de cada uno de los símbolos utilizados una concepción suficientemente clara, como para que su combinación lleve a tal convencimento. Desde este punto de vista, el rigor (o su opuesto, la imprecición) es fundamentalmente una propiedad *local* del razonamiento matemático. No hay necesidad de grandes construcciones axiomáticas, de maquinaria conceptual refinada para juzgar la validez de un razonamiento, basta con tener un conocimiento suficientemente claro de cada uno de los símbolos utilizados, una visión suficientemente completa de sus propiedades operativas.

Limites y necesidad de la axiomatización.

Este punto de vista nos conduce a ver con cierta perspectiva la axiomatización. Formalizar una teoría es asociar al material intuitivo presentado por la teoría, que podemos suponer que constituye una *morfología* (T), un sistema de reglas formales que generan una combinatoria simbólica (S) isomorfa a (T). El isomorfismo (S) → (T) esta inducido por la correspondencia que asocia a cada símbolo (s) de (S) su *sentido* , su contenido intuitivo en (T) (su realización semática, como dirían los Lógicos). Sin embargo, nada puede de asegurarnos que todo el material intuitivo de la teoría (T) es la imagen de expresiones simbólicas de (S) (bajo el isomorfismo (S) → (T)). Inmediatamente, el ejemplo de las lenguas naturales nos viene a la mente Los linguistas *formalistas* se esforzaron en axiomatizar la gramática y la sintaxis de ellas. Allí, ellos encontraron cierto número de procesos formales, la gramática generativa y la transformacional, cuya validez en el plano de una descripción formal de las frases efectivamente presentes en el lenguaje no se puede negar. Pero, si sistematizamos estos procesos formales en una axiomática y queremos a toda costa su completez formal, no tardaremos en construir frases tan largas y complicadas que resultan ininteligibles . No veo ninguna razón que asegure que un fenómeno análogo no se presente en matemáticas; si extrapolamos un mecanismo formal hasta el límite de sus capacidades generativas, existen grandes posibilidades de obtener fórmulas tan largas y complejas que se pierda toda posibilidad de interpretarlas intuitivamente. Los *teoremas* obtenidos en esta forma pueden ser formalmente ciertos pero, semáticamente, carecen de significado. Por lo tanto, podemos esperar que necesitemos más de una axiomatización para describir una teoría intuitiva (T). Cada axiomatización local (S) tiene *una zona de contacto* Zs con la morfología intuitiva (T), donde es válida, pero, apenas comenzamos a construir en (S) fórmulas demasiado largas y complicadas, se pierde la inteligibilidad En la frontera de Zs se produce una especie de *despegue semántico* entre (S) y (T), lo cual impide que el isomorfismo (S) → (T) isomorfismo definido por el sentido, puede prolongarse más allá de Zs.La idea de que la teoría (T) puede ser generada por un único mecanismo formal (S) es, a primera vista, tan descabellada como admitir que la tierra es plana, o que se puede cubrir una variedad con un único mapa. El mecanismo de este despegue semántica merece precisarse. Más tarde veremos un ejemplo donde interviene brutalmente, como consecuencia de un simbolismo inadecuado para las propiedades semáticas de los entes simbolizados (tal es el caso del formalismo booleano aplicado al lenguaje usual) . En el caso de las matemáticas, parece que el despegue semático interviene de manera leve y progresiva (tal es el caso de los números transfinitos en la teoría de conjuntos, por ejemplo). La ventaja innegable que tiene una formalización local es que a menudo precisa los datos dados por la intuición. Además, tiene la cualidad indispensable de permitir la comunicaciòm entre los matemáticos. Como todas las formas de comunicación, tanto habladas como escritas, necesita una morfología unidimensional , es necesario codificar la morfología intuitiva (T) (cuyo soporte es, generalmente, un espacio euclidiano de dimensión muy alta) por un sistema formal (S) de símbolos unidimensionales. Se ha hablado mucho, en estos últimos años, sobre la importancia de la axiomatización como instrumento de sistematización y de investigación. Ciertamente, es un instrumento de sistematización, pero que sirva como instrumento de descubrimiento es más que dudoso. Es característico que del esfuerzo inmenso por sistematizar la matemática hecho por Nicolas Bourbaki (que por cierto no es una formalización ya que Bourbaki utiliza un metalenguaje no formalizado), no se haya obtenido tan siquiera un teorema nuevo con alguna importancia. Y si los investigadores en matemáticas hacen una referencia a Bourbaki, lo hacen más frecuentemente, a los ejercicios, hacia donde el autor rechazó el material concreto, que al cuerpo deductivo del texto. Es necesario hablar claro: la axiomatización es una investigación de especialistas que no tiene lugar en la enseñanza media ni en las Facultades (salvo, claro esta, para los profesionales que deseen especializarse en el estudio de los fundamentos). Es por esto que los reproches de inconsistencia dirigidos contra la geometría euclidiana no tienen importancia cuando se trata de la validez intuitiva local del razonamiento, y este es el único nivel que importa.

Importancia *genética* de la Geometría: el contínuo antecede al discontinuo.

Las consideraciones precedentes nos dan la clave del éxito histórico de los Elementos de Euclides. La geometría euclidiana fue el primer ejemplo de una transcripción de un proceso especial de dos o tres dimensiones al lenguaje unidimensional de la escritura. Para ello, la geometría euclidiana solo aplica una actividad presente en el lengua je de todos los días a una situación más rígida y mejor de terminada. El lenguaje usual tiene por función primaria des cribir los procesos espacio-temporales que nos rodean, pro cesos cuya topología se transparenta en la sintáxis que los describen. (1) En efecto, en la geometría euclidiana nos encontramos con la misma función del lenguaje, solamente que esta vez el grupo de equivalencias que actúa sobre las figuras es un grupo de Lie, el grupo métrico; por oposición a los grupos de invariancia más topológica de las *Gestalten* que nos permite reconocer los objetos del mundo exterior descritos por un nombre del lenguaje usual. Es por esto que la geometría es un intermediario natural y posiblemente irreemplazable entre el lenguaje usual y el lenguaje formalizado de las matemáticas, lenguaje en el cual el objeto se reduce al símbolo y el grupo de equivalencias a la identidad del símbolo escrito consigo mismo. Desde ese punto de vista, la etapa del pensamiento geométrico es posiblemente una etapa imposible de omitir en el desarrollo normal de la actividad racional del hombre. Se ha insistido demasiado desde hace cincuenta años sobre la reconstrucción del continuo geométrico partiendo de los naturales (por medio de las cortaduras de Dedekind o de la completación de los racionales), Se ha visto, bajo la influencia de tradiciones axiomáticas y librescas, al discontinuo como el ser primario de las matemáticas. *Dios creo los núme-*

ros enteros y el resto es obra del hombre. Esta máxima del algebrista Kronecker muestra más su pasado de banquero enriquecido gracias a las manipulaciones de dinero, que su clarividencia filosófica. No hay ninguna duda que desde un punto de vista sicológico (y para mi ontológico) el continuo geométrico es el ser primario de las matemáticas, ya que tener conciencia es tener conciencia del tiempo y del espacio, el continuo geométrico es en cierta forma anherente a todo pensamiento conciente. Pero ese continuo, primero homogêneo y amorfo se estructura poco a poco, y la herramienta fundamental de esta estructuración es la acción del grupo métrico la cual, solamente permite *pegar* el discontinuo, el operativo, sobre la extensión homogénea. Pero ésta es ya una operación muy elevada; anteriormente, se tienen todas las propiedades del continuo, propiedades que la matemática moderna (la verdadera) tuvo que reencontrar, por la del grupo métrico. La teoría así obtenida no es ni métrica ni cuantitativa, es fundamentalmente cualitativa y tiene que apoyarse en el simbolismo discreto de un lenguaje semi-formalizado. Pero los invariantes topológicos, más profundos, son más dificiles de aceptar para la conciencia que los invariantes métricos, que son más superficiales.
Es por esto que el paso del pensamiento usual al pensamiento formalizado se hace en forma natural, por medio del pensamiento geométrico. Así sucedió en la historia del pensamiento humano y, sin importar lo poco que creamos en la ley

de recapitulación de Haeckel, según la cual el individuo en su desarrollo atraviesa por todas las etapas de la especie, así debería suceder con el desarrollo normal del pensamiento racional.

La teoría de conjuntos

Ahora voy a tratar el primer punto, la teoría de conjuntos. Este es el punto esencial que desarrollan los que llevan la naveta del incienso de las matemáticas *modernas*. Algunos afirman que el empleo de la teoría de conjuntos permite renovar completamente la enseñanza de las matemáticas y que, gracias a esta renovación, aún los alumnos más mediocres podrán tener acceso al conocimiento de las matemáticas del programa Es necesario decirlo, esto es una mera ilusión. Mientras se trate de manejar las evidencias de la teoría intuitiva de los conjuntos, entonces, ciertamente, cualquiera puede arreglarselas. Pero esto no es ni matemáticas ni lógica. Apenas se llega a las verdaderas matemáticas (o sea los números reales, la geometría, las funciones), se descubre, de nuevo, que no hay camino real, y que solamente una minoría de estudiantes será capaz de asimilar plenamente estas nociones.

El optimismo excesivo generado por el uso de los símbolos de la teoría de Conjuntos se basa en un error filosófico. Se creyó que enseñando el uso de los símbolos $\in$, $\subset$, $\cup$, *ros enteros y el resto es obra del hombre*. Esta máxima del algebrista Kronecker muestra más su pasado de banquero enriquecido gracias a las manipulaciones de dinero, que su clarividencia filosófica. No hay ninguna duda que desde un punto de vista sicológico (y para mi ontológico) el continuo geométrico es el ser primario de las matemáticas, ya que tener conciencia es tener conciencia del tiempo y del espacio, el continuo geométrico es en cierta forma anherente a todo pensamiento conciente. Pero ese continuo, primero homogéneo y amorfo se estructura poco a poco, y la herramienta fundamental de esta estructuración es la acción del grupo métrico la cual, solamente permite *pegar* el discontinuo, el operativo, sobre la extensión homogénea. Pero ésta es ya una operación muy elevada; anteriormente, se tienen todas las propiedades del continuo, propiedades que la matemática moderna (la verdadera) tuvo que reencontrar, por la del grupo métrico. La teoría así obtenida no es ni métrica ni cuantitativa, es fundamentalmente cualitativa y tiene que apoyarse en el simbolismo discreto de un lenguaje semi-formalizado. Pero los invariantes topológicos, más profundos, son más dificiles de aceptar para la conciencia que los invariantes métricos, que son más superficiales. Es por esto que el paso del pensamiento usual al pensamiento formalizado se hace en forma natural, por medio del pensamiento geométrico. Así sucedió en la historia del pensamiento humano y, sin importar lo poco que creamos en la ley n se hacían explícitos los mecanismos subyacentes en todo razonamiento, en toda deducción. El hombre del siglo XX redescubrió con entusiasmo los silogismos en Darapti y Celarent, que enseñaba la escolástica en la Edad Media, pero, ¡con que degradación cuando Boole escribió en el siglo XIX su famoso tratado sobre el álgebra que lleva su nombre no vaciló en llamarlo *The Laws of Thought*. Algunos filósofos modernos, como por ejemplo los neo-positivistas, compartieron esta creencia ingenua de que toda deducción podía modelarse mediante una manipulación conjuntista Ni Aristóteles ni los escolásticos medievales compartían esta ilusión. La lógica aristotélica se basa, tal como lo recordó J. Vuillemin (2), en una ontología de la materia muy rica y compleja. Los protagonistas modernos de la teoría de conjuntos deberían darse cuenta de que esta teoría es insuficiente para explicar hasta los procesos deductivos más elementales del pensamiento usual.

Me voy a permitir explicar este hecho

Las conjunciones *o* e *y*. Se suele enseñar que el equivalente gramatical del símbolo $\cup$ (unión) es la conjunción *o* y que el de $\cap$ (intersección) es la conjunción *y* Apliquemos esta regla a dos frases elementales cuyos sujetos son nombres propios:

i) Pedro *o* Juan vendrá

ii) Pedro *y* Juan vendrán

La primera frase puede parafrasearse de la siguiente manera: Pedro vendrá o Juan vendrá. De esta manera, hay una relación perfecta entre el símbolo ∪ y la conjunción *o*, siempre y cuando asociemos la conjunción *o* con el verbo y no con los sujetos.

La segunda frase puede de la misma manera, parafrasearse así: Pedro vendrá y Juan vendrá. Pero al hacer esto, se da uno cuenta de que la frase ii) es sutilmente ambigua; muy frecuentemente y de manera implícita (dentro de lo *presupuesto* por la frase), Pedro y Juan vendrán significa: Pedro y Juan vendrán juntos. Mientras que la expresión: Pedro o Juan, ella por sí misma no tiene ninguna realización semática, es posible interpretar Pedro y Juan como el objeto constituido por la pareja de individuos Pedro y Juan, cuando estan cerca uno de otro en el espácio. Este hecho explica las diferencias gramaticales entre los verbos de i) y ii), con la conjunción y tiene que usarse el plural porque presupone una cierta cercanía (en el espacio) de los sujetos.

Consideremos ahora oraciones donde las conjunciones actúan sobre cualidades (adjetivos).

1) Pedro es pequeño *o* inteligente.

2) Pedro es pequeño *y* inteligente.

3) Juan es moreno *o* castaño.

4) Juan es moreno *y* castaño.

Observamos que las oraciones 2) y 3) son aceptables desde un punto de vista semántico, mientras que 1) y 4) son dudosas o inaceptables. Extrapolaremos del conjunto de tales observaciones el principio siguiente:

Principio de exclusión. Si X y Y son dos cualidades, las frases "A es X *o* Y" y "A es X *y* Y" no pueden ser, a la vez, semánticamente aceptables.

Cuando X o Y puedan ser predicados que digan algo acerca de un sujeto, diremos que X y Y son cualidades del mismo campo semántico; por ejemplo, moreno, castaño en las frases 3) y 4). En ese caso X *y* Y no tiene sentido, en principio. Esta regla admite una excepción notable: el caso en que *y* designa no la intersección lógica sino la contiguidad espacial. Así, podemos decir, a la vez,

5) Esa bandera es blanca *o* azul.

6) Esa bandera es blanca *y* azul.

El hecho de que, en 6), la conjunción no tiene el valor de $\cap$ se ve de que la implicación:

Esa bandera es blanca y azul => *Esa bandera es blanca*

es falsa.

De hecho, las condiciones para las cuales X *o* Y tiene sentido son extremadamente restrictivas; así, "Juan es guero *o* castaño" es claramente más aceptable que "Juan es guero *o* moreno", porque en el campo semántico de los colores de cabellos, guero y castaño son contiguos, mientras que guero y moreno no lo son. La conjunción *o*, desde un punto de vista geométrico, tiene por efecto el de *vencer un umbr* entre las dos cuencas de atracción definidas por los adjeti vos guero y castaño (en el ejemplo). Cuando la distancia se mántica entre dos cualidades X, Y es demasiado grande, por ejemplo si pertenecen a campos semánticos distintos, como una cualidad física y una moral, entonces, la expresión X *o* Y pierde todo sentido.

Ese hecho más que evidente, parece no haber sido comprendido por los autores de manuales sobre teoría de conjuntos. Y así les proponen a sus alumnos ejercicios de álgebra Booleana donde se habla de *cubos azules o grandes*, *parisinos calvos o ricos*. Esos ejercicios no son solamente extraños e inútiles; podrían incluso, si se persistiera en ello, llegar a ser peligrosos para el equilibrio intelectual de los niños. Un principio fundamental del pensamiento consiste en, justamente, evitar la mezcla de campos semánticos ajenos; esa mezcla tiene un nombre, se llama el delirio Al tratar de dar un sentido a todas las expreciones, construibles en la lengua ordinaria, mediante el formalismo booleano, el logicista procede a construir un universo, a la vez, fantasmal y delirante.

Todo esto nos muestra los límites estrechos del formalismo conjuntista para explicar la deducción usual. El razonamiento cotidiano hace uso de mecanismos psíquicos profundos, como la analogía, que no pueden reducirse a las manipulaciones conjuntistas: En este caso, lo que juega un papel, es el isomorfismo de organización entre campos semánticos asociados homologicamente, de hecho, el esquema booleano se pude aplicar sin problema solamente al caso de inclusión espacial de subconjuntos, como en los diagramas de Venn, pero, en ese caso, nadie se preocupará por poner el problema en forma silogística: se podrá decir que el zorro usa la teoría de conjuntos por saber que si las gallinas estan en el gallinero y el gallinero en la granja, entonces las gallinas estan en la granja. La fuerza limitadora del esquema lógico viene de la restricción a la inclusión espacial y no al reves. Todo ser humano, desde el momento que existe, usa la teoría de conjuntos como M. Jourdain componía prosa sin saberlo, se dirá que es mejor hacerlo a sabiendas. La ganancia, si hay alguna, es puramente retórica. Tendríamos interes en proceder por formalizaciones locales, de hecho *especializaciones* locales, y aplicar el formalismo de los conjuntos solamente en la medida que la técnica de la demostración matemática es una retórica.

Esto nos muestra la actitud que una pedagogía razonable debería tomar sobre los conjuntos. La teoría intuitiva y concreta de conjuntos debe usarse en su lugar natural, el jardín de niños. El uso de los símbolos $\in, \cap, \cup, \subset$ puede aprenderse en sexto de primaria, el de los cuantificadores en tercero de secundaria, y después olvidarse de todo.

Aún en matemáticas puras, no es seguro que toda deducción tenga un modelo conjuntista. Las mal denominadas paradojas que destruyen la teoría de conjuntos, sirven para recordar al matemático los peligros del uso inconsiderado de esos símbolos de tan inocente apariencia. Ojalá que, aún en matemáticas, la cualidad subsista y resista a toda redacción conjuntista. La vieja esperanza bourbakiana de ver las estructuras matemáticas salir de forma natural de la jerarquíade los conjuntos, de sus subconjuntos y de sus combinaciones, es quizá solo una quimera. Nadie, en su sano juicio, pue de escaparse de la impresión que las estructuras matemáticas importantes (estructuras algebráicas, estructuras topológicas) parecen ser datos impuestos fundamentalmente por el mundo exterior y que su variedad irracional tiene su única explicación en la realidad.

B I B L I O G R A F I A

[1] THOM, *Topologie et Linguistique.* Volume jubilé de Rham, Springer.

[2] J. VUILLEMIN, *De la logique á la théogie.* Flammarion, Paris, 1967.

[3] G. KREISEL, The formalist-positivist doctrine of mathematical precision in the light of experience, *L'Age de la science*, vol. III, No. 1, janvier-mars,1970, p 17-46

A P E N D I C E

Sobre la noción de campo semántico y el *principio de exclusión* en un modelo geométrico del significado. El uso en el lenguaje ordinario de las conjunciones *o* e *y* establece problemas muy delicados. La equivalencia que se establece usualmente entre *o* y "u" y entre *y* e "e" admi te muchos contraejemplos. Si consideramos el conjunto formado por el pe rro Capitán y su amo Juan se dice "capitán *y* Juan" y no "Capitán *o* Juan"

Un analisis basado en el modelo geométrico del significado, inspirado en el modelo de Zeeman sobre las actividades síquicas, puede permitirnos esclarecer un poco el asunto.

El modelo geométrico del significado

En este modelo, se supone que todos los estados síquicos de un individuo pueden representarse por los puntos de un espacio $U=R^n$, donde n es un número muy grande. Para todo estímulo sensorial que capta el individuo corresponde una cierta transformación de su estado síquico, que representaremos por un endomorfismo contínuo $g_s:U \to U$. Un estímulo (s) se dira que es *significativo* para el individuo, si el endomorfismo g_s es idempotente, o sea, si $g_s \circ g_s = g_s$. En efecto, decir que se ha comprendido una situación, es decir que en un examen ulterior no va a modificarse nuestro estado mental (*comprender es inmunizarse*)[1]

Definición de campo semántico

Si suponemos que el endomorfismo g_s es diferenciable, el conjunto gs(U) es una subvariedad del conjunto U, sobre la cual g_s es localmente una proyección. Un tal subespacio $g_s(U)$ constituye, en principio, un *campo semántico*, un universo mental del significado. El hecho de que este subconjunto sea conexo, pone en evidencia una de las exigencias fundamentales del modelo, a saber, que no se puede pensar en dos cosas a la vez. [2]

[1]Ver nuestro artículo:"Topologie et Signification, l'Age de la science", vol 1, No. 4, oct-dic, 1968 ,p. 142.219. El lector enterado de la mecánica Cuántica podrá hacer la analogía de esta definición con la teoría de la medida definida por una proyección en un espacio de Hilbert.

Pero esta es una de las paradojas puestas en juego por las conjunciones *o* e *y*, que ellas nos hacen pensar simultaneamente por lo menos en dos objetos. Estas conjunciones plantean fundamentalmente el mismo problema propuesto por la oración: ¿por medio de qué proceso la mente puede llegar a ligar en forma única un agregado de objetos diferentes? Este es el problema clásico de los mixtos, (vease *el Sofista* de Platón) y que la lógica moderna creyó alejar por medio de una reconstrucción conjuntista del Universo, reconstrucción cuyo carácter irreal y delirante ya vimos.

La conjunción *y*

Examinemos primero el uso de la conjunción *y*, senciblemente más simple que el de *o*. Consideremos el caso donde *y* liga dos cualidades (representadas gramaticalmente por adjetivos). En algunos casos, se puede suprimir *y* sin afectar el sentido, por ejemplo:

Pedro es alto *y* rico.

Pedro es alto, rico.

Entonces, si en la frase "A es X *y* Y" se puede omitir es porque el efecto semántico de "X *y* Y" equivale prácticamente a la composición de los endomorfismos $g_Y \circ g_X$; además podemos permutar los dos adjetivos sin cambiar el sen-

[2] De hecho en la mayoría de los casos, el operador g_S aproximativamente idempotente. Esto no impide la existencia de la subvariedad $g_S(U)$ pero entonces g opera en esa subvariedad y genera, en algunos casos, una descomposición en cuencas de atractores relativamente fijos (por ejemplo lo h_n para los colores). En otros casos (por ejemplo en R^3) la regulación de la diferencia g^2-g genera una morfología local en g(U). Podemos entonces interpretar la afirmativa de los semánticos como (Hjelnslev) como que todo significado es a la vez forma y contenido. El contenido es el espacio g(U) y la morfología inducida por g en g(U) será la forma En el caso de R^3 esta morfología es la materia y la regulación de g^2-g simula las leyes de la Mecánica y la Física.

tido, por lo tanto los dos *proyectores* g_y y g_x conmutan y g_y o g_x es idempotente también. Esto implica que los campos semánticos $g_y(U)$ y $g_x(U)$ se cortan transversalmente en U. Se expresa esta situación diciendo que los campos semánticos $g_y(U)$ y $g_x(U)$ son independientes. Intuitivamente, esto corresponde al hecho de que las cualidades X y Y pertenecen a aspectos independientes de la realidad, como una cualidad física y una cualidad moral. Sin embargo, puede suceder que la conjunción *y* ligue dos cualidades de la misma naturaleza, por ejemplo en:

La bandera es azul y blanca

En este caso, no se puede suprimir la conjunción, y sin la conjunción las cualidades no permutan.

Para comprender lo anterior, es necesario discutir más finalmente los endomorfismos g_x correspondientes a una cualidad X. Supongamos, para fijar ideas, que X es un color, por ejemplo azul. Entonces, el endomorfismo g_x se puede factorizar en un producto de la forma $h_x \circ C$ donde C es un proyector de U, cuya imagen C(U) es el espacio tridimensional de las impresiones de color; h_x solamente está definida sobre un pedazo de este espacio C(U), precisando, el subconjunto B_a de C(U) que está formado por los puntos de C(U) que usualmente consideraremos azules. La imagen $h_x \circ C$ debe ser considerada entonces como un punto de B_a, la imagen de azul que aparece en la mente cuando escuchamos la palabra azul. Por ejemplo, la expresión *La rana es azul* provoca u-

-na especie de malestar semántico. Ello es porque el endomorfismo g que corresponde a *rana* tiene por imagen el campo semántico que se representa por el espacio tridimensional usual, R^3, y en ese espacio tenemos el accidente local definido por la forma espacial de una rana. Al aplicarle g_{azul} a esa imagen, le estamos aplicando, primero, el proyector C(color), pero la imagen C(rana), en el espacio de los colores, esta contenida ya sea en la región del verde, ya sea en la del rojo ; pero en todo caso, no lo esta en el dominio B_a del operador g_{azul} . De ahí proviene el hecho de que la composición ya no esta definida, de ahí el sentimiento de malestar, antes aludido.

Los endomorfismos correspondientes a dos colores, azul y blanco, por ejemplo, se factorizan $g_{azul} = h_{azul} \circ C$, $g_{blanco} = h_{blanco} \circ C$; los dos pertenecen al campo semántico de los colores definidos por el endomorfismo C. La expresión *esa bandera es azul y blanca* se interpreta entonces así : la mente puede aplicar *simultáneamente* [3] los operadores h_{azul} y h_{blanco} a la imagen bajo C de *esa bandera*. La frase dice, entonces, que esa imagen, en su totalidad, esta cubierta por los dominios de h_{azul} y h_{blanco} . Aquí los *atractores* finales de h_{azul} y h_{blanco} son ajenos y no se vuelven a encontrar ; esto explica que la implicación *esa*

[3] De hecho, como lo veremos más tarde, la mente usa una proyección variable y oscilante entre los puntos extremos h_{azul} y h_{blanco}.

bandera es azul y blanca => *esa bandera es blanca* sea falsa (ya que h_{blanco} no cubre la totalidad de *esa bandera* bajo C).

Resumiendo, si la frase "A es X *y* Y" tiene sentido, hay dos posibilidades: i) la conjunción *y* puede omitirse sin cambiar el sentido, y entonces X y Y son cualidades de campos semánticos independientes ii) la conjunción *y* no puede omitirse; en este caso A es un concepto *extendido* (sea espacialmente en el espacio ordinario, o en un espacio semántico apropiado); las cualidades X, Y pertenecen a un mismo campo semántico definido por un proyector C: $g_x = h_x \circ C$, $g_y = h_y \circ C$ C puede ser discontínuo sobre la imagen extendida de g_A y la imagen C(A) es contínua en la unión de los dominios de h_x y h_y [4]

La conjunción *o*

Consideremos ahora la conjuncion *o* Una frase del tipo "A es X *o* Y" donde X, Y son cualidades, no tiene sentido a menos que X y Y sean cualidades del mismo campo semántico. En efecto, si la expresión "X *o* Y" tiene sentido, esta definida por un endomorfismo idempotente g, cuya imagen tiene que ser la unión topológica de las imágenes $g_x(U)$ y $g_y(U)$.

[4]Este fenómeno se debe al caracter "local" del campo semántico del espacio. En realidad dos fenómenos simultáneos localizados en puntos lejanos no tienen mutua influencia. Debido a que la mente no puede pensar al mismo tiempo todos esos campos locales, debe existir un campo privilegiado y central recorriendo todo el campo según las necesidades En

Pero si "X *y* Y" tiene sentido, por el caso (i) anterior, $g_x(U)$ y $g_y(U)$ son variedades que se cortan transversalmente y su unión no puede ser una variedad lisa y por lo tanto no puede ser la imagen de un proyector. Entonces, si "X *y* Y" tiene sentido (caso i) "X *o* Y" no puede tenerlo

La única posibilidad para que "X *o* Y" tenga sentido es, entonces, que las variedades $g_x(U)$ y $g_y(U)$ no se intersecten Esto corresponde al caso en que las cualidades X y Y se excluyen, y por lo tanto pertenecen al mismo campo semántico

Una frase afirmativa del tipo "A es X *o* Y" no tiene sentido, a menos que X y Y sean cualidades contiguas en un campo semántico común Por ejemplo, si decimos que "los cabellos son morenos *o* castaño", queremos decir que el color de los cabellos esta en la intersección de los dominios del espacio semántico de los colores de cabellos definidos por los adjetivos moreno y castaño La conjunción *o* tiene en ese espacio un efecto semántico semejante al de la preposición *entre* en el espacio usual: ella *cava*, estabiliza un umbral entre las cuencas de los dos atractores X, Y

el campo visual, este campo central esta compuesto anatómicamente por la "fovea" de la retina y la rotación de los ojos asegura el recorrido del campo.

[5]No vamos a considerar el caso en que uno de los atractores esta contenido en el otro: Por ejemplo, para la pareja X=azul, Y=de color, ni XoY ni XyY tienen sentido.

[6]Por cierto se dice escoger "entre" los terminos de una alternativa.

"*o*" y la interrogación

Cuando X y Y no son cualidades contiguas, la expresión "X *o* Y" no tiene sentido sino en frases no-afirmativas, interrogativas o dudosas. En efecto, para estabilizar un umbral entre dos cuencas alejadas, es necesario *excitar* la expresión, elevar su *potencial semántico* Por ejemplo, la frase afirmativa "la pelota que perdiste ayer es roja *o* azul" suena raro. Sin embargo, bajo la forma interrogativa: "la pelota que perdiste ayer ¿es roja *o* azul?" es muy natural. También podemos citar el ejemplo de B. Russell (Significado y Verdad): Una logicista que acaba de tener un hijo responde a su esposo que preguntaba "¿Fue niño o niña?" y su respuesta fue "si". Si la pregunta era normal, la respuesta no lo es. La transformación interrogativa de una frase, estabilizando "X *o* Y",tiene por efecto provocar en el oyente un estado semánticamente inestable, una *exitación* cuya salida natural es responder la pregunta.

Cuando las cualidades X y Y son semánticamente independientes, la expresión "X *o* Y" no tiene sentido, aún en frases interrogativas: "¿Es Pedro pequeño *o* inteligente?" suena raro.

Se ve, entonces, que contrariamente a la creencia común, en el espacio semántico considerado, *y* significa unión de los domonios, mientras que *o* representa su intersección Desde ese punto de vista, no hay diferencia entre el espacio usual R^3 y los espacios de cualidades semánticas (En una teoría *genética* de la formación mental, podemos, por o tra parte admitir que los distintos espacios semánticos se derivan de la representación de R^3 por un proceso de diferenciación, de *exfoliación* sucesiva). [7]

Alternativa inclusiva y alternativa exclusiva

Clásicamente, se distingue para el empleo de la alternativa inclusiva (en latín vel) y la alternativa exclusiva (en latín aut) En realidad, debemos darnos cuenta que ni en español ni en latín existe una alternativa inclusiva El empleo clásico de *vel* corresponde mentalmente a un proceso de aproximaciones sucesivas, el segundo término de la alternativa se presenta como mejor aproximación que el primero: Melius vel optime (Cicerón): Mejor o lo mejor (lo óptimo). Este es un empleo comparable a nuestra frase "los cabellos son morenos *o* castaños", donde tampoco hay *conmutatividad* estricta de los calificativos (castaño se presenta como una aproximación más fina que moreno para el color de los cabellos)

Resumiendo, la expresión "X *o* Y" donde X y Y son cualidades, no tiene sentido a menos que X y Y pertenezcan al mismo campo semántico, "X *o* Y" aparece en una frase afirmati

[7] Esta disociación entre los campos semánticos y el campo espacial primitivo es manejada por el esquema dinámico separando los distintos atractores de un "hipercampo" Estos hipercampos ya no escritos en la conciencia normal pero, en ocasiones, puden reaparecer por dediferencia

va si son cualidades "contiguas" en ese campo semántico; en una frase interrogativa, "X • Y", al contrario, X,Y, pueden ser cualidades arbitrarias del mismo campo.

El "principio de exclusión": "X *o* Y", "X y Y" no tienen sentido al mismo tiempo, salvo en el caso en que el sujeto sea un concepto espacialmente extendido en cuyo caso "Y" representa la contigüidad espacial.

El modelo dinámico de los mixtos

Dijimos antes que sobre el espacio semántico considerado, "o" lleva el efecto de estabilizar el umbral entre las cuencas de atracción de X y Y, lo que a fin de cuentas no es más que tomar la intersección de las cuencas; "y" al contrario, es tomar la reunión topológica de las cuencas. Una tal afirmación no debe tomarse al pie de la letra. En efecto, la organización de un espacio semántico en cuencas de atracción está controlado generalmente, por un mecanismo dinámico que admite un modelo algebraico relativamente simple (por ejemplo, los mínimos de un potencial). La formación de un"mixto" como"X *o* Y" o "X y Y" corresponde, entonces, a un proceso dinámico que podemos describir como la excitación simultánea y resonante de osciladores asociados a los mínimos del potencial X y Y. Haciendo analogía con la fonética,

ción, por ejemplo bajo el efecto de agentes patológicos (fiebre,drogas). A esto se le llama :"delirio".

si la oposición entre X y Y está definida por un "trazo pertinente", el mixto "X y Y" corresponde a la "neutralización de este trazo pertinente Dos cualidades de un campo semántico son siempre contigüas, pero la altura del umbral que separa las cuencas define la distancia semántica entre esas cualidades Demos un modelo geométrico unidimensional de esta situación. Supongamos que nuestro espacio semántico es el eje O_x; sobre ese eje tenemos un potencial semántico definido por una curva con dos mínimos X,Y (X=-1, Y=+1), del tipo de la función $V=x^4-2x^2$ (fig. 1). Imaginemos un punto material n que se mueve en el campo del potencial definido por V. Si la energía cinética del punto al mínimo es menor que la altura del umbral, entonces el punto se quedará en una de las cuencas X o Y; al aumentar la energía, el punto puede alcanzar y aún superar el umbral que separa las dos cuencas. Pero si la energía cinética h apenas excede la necesaria para pasar sobre el umbral, la velocidad del móvil será muy pequeña en una vecindad del umbral y va a permanecer un tiempo considerable en tal vecindad (mucho más tiempo que el necesario para oscilar en las cuencas X y Y). Esto corresponde, en terminodinámica, a la estabilización del umbral entre X y Y Pero si aumentamos más la energía cinética este efecto tiende a desaparecer y el móvil tiene tendencia a llenar "ergódicamente" la unión de las cuencas de potencial X y Y. La primera situación de energía debe corresponder al"mixto" "X *o* Y", la segunda, de gran energía, corresponde al mixto "X y Y". Si este modelo es correcto se puede pasar en forma continua del mixto X o Y al mixto X y Y "excitando" el oscilador.

Este modelo puede mostrarnos un hecho a priori sorprendente para nuestra forma de pensar, labrada por miles de años de lógica: Existen lenguas donde una misma conjunción toma el puesto de "o" e "y", y la distinción anterior se efectúa adjuntando adverbios del tipo "uno sólo, los dos juntos" (una lengua de Samoya ;cf. P. Jacobson, Essais de Linguistique Generale, p. 82. Editions de Minuit, París).

Concluimos que el uso corriente de las conjunciones "o" e "y" no tiene sino una relación lejana, y delicada ya que puede invertirse, con las operaciones $\cup$, $\cap$ la Lógica o de Topología. Solamente los neurofisiólogos pueden sorprenderse, ya que son suficientemente ingenuos como para pensar que el cerebro humano no es sino un conjunto de circuitos neurónicos, semejantes a los circuitos lógicos elementales de las computadoras electrónicas, circuitos que realizan en el código binario las operaciones $\cup$ e $\cap$.