Miscelánea Matemática **43** (2006) 75–86 SMM

Hacia la clasificación de continuos homogéneos aplanables

David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Benemerita Universidad Autónoma de Puebla

Av. San Claudio y Río Verde

Cd. Universitaria

72570 Puebla, Pue.

México

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

Resumen

Se revisan algunos de los conceptos básicos en la teoría de los continuos considerando varias propiedades topológicas como el margen cero, la encadenabilidad, la indescomponibilidad y la homogeneidad. Explicamos cómo estas nociones están relacionadas con el problema (aún no resuelto) de la clasificación de los continuos homogéneos en el plano.

Introducción

El material que se presenta en este artículo es de Topología, más precisamente pertenece a la Teoría de los Continuos; de hecho un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un **subcontinuo** de un continuo X es un subespacio de X que también es un continuo.

Presentamos este trabajo a los lectores no expertos en estos menesteres, por esta razón la discusión se mantiene en un nivel elemental con algunos ejemplos y propiedades sencillas en la primera parte antes de tratar con la segunda, en la cual se enuncian resultados sin demostración pero señalando la referencia correspondiente.

1. Ejemplos y propiedades de continuos

Son ejemplos de continuos en el plano los tres que siguen:

(1) Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Un arco, en el plano, tiene complemento conexo.

(2) Consideremos a la circunferencia unitaria en el plano S^1 como un subconjunto del plano complejo, es decir,

$$S^1 = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| = 1\}.$$

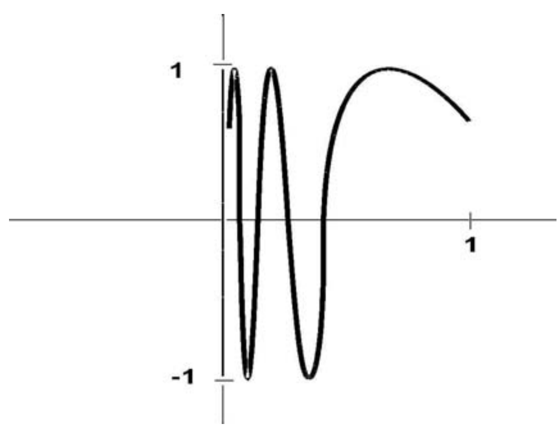
Una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a S^1. Una curva cerrada simple, en el plano, tiene complemento disconexo.

Si $A \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$, denotemos por S_A a la gráfica en $\mathbb{R}^2$ de la función $sen(\frac{1}{x})$, para $x \in A$, es decir,

$$S_A = \left\{ \left(x,\, sen\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x \in A \right\}. \tag{*}$$

(3) El **continuo sen**$(\frac{1}{t})$, denotado por W, es la cerradura en $\mathbb{R}^2$ del conjunto $S_{(01]}$. Observemos que

$$W = S_{(01]} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}.$$



Se deja como ejercicio ver si el complemento, en el plano, del continuo sen$(\frac{1}{t})$ es conexo o disconexo.

Nota 1.1. Dado un conjunto X, la diagonal del producto $X \times X$ es

$$\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}.$$

Denotemos por p_1 y p_2 a las *funciones proyección* de un producto de dos continuos sobre la primera y segunda coordenadas, respectivamente.

Definición 1.2. Se dice que un continuo X tiene *margen cero* si para cada subcontinuo Z de $X \times X$ con

$$p_1(Z) = p_2(Z)\,,$$

se tiene que $Z \cap \Delta_X \neq \emptyset$

En 1964, Lelek introdujo la noción de margen para espacios métricos conexos [12, pág. 209]. En realidad la definición de margen no requiere, ni siquiera, de la conexidad del espacio. Sin embargo, la mayoría de los resultados acerca del margen se han establecido para los continuos. Aquí estudiamos el margen únicamente para los continuos y, más aún, en este trabajo, tratamos con continuos de margen cero. Relacionado con esta noción tenemos el concepto de continuo encadenable. Hacemos notar que es importante saber lo siguiente.

¿Son nociones equivalentes el margen cero y encadenable?

Aquí explicamos por qué con una respuesta afirmativa a esta cuestión se consumaría el problema de clasificar a los continuos homogéneos en el plano.

En colecciones importantes de problemas abiertos como [6] y [7] se encuentran varias preguntas relacionadas con esta temática.

Se deja como ejercicio probar que ésta es una propiedad topológica, es decir, que si X y Y son homeomorfos y X tiene margen cero, entonces Y tiene margen cero.

En términos generales un continuo tiene margen cero si no hay libertad para transitar en él. Esto es, intuitivamente, si dos personas necesitan recorrer un mismo conjunto (conexo) de un continuo de margen cero, sin lugar a duda deben encontrarse; como pasa en un intervalo. Así, un arco tiene margen cero al probar el resultado siguiente.

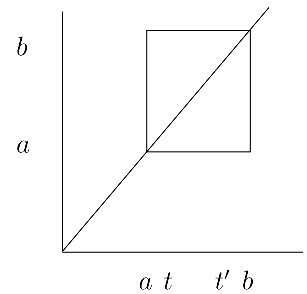
Teorema 1.3. *El intervalo unitario* $[0,1]$ *tiene margen cero.*

Demostración: Supongamos que Z es un subcontinuo del cuadrado

$$[0,1] \times [0,1]$$

tal que $p_1(Z) = p_2(Z)$. Notemos que $p_1(Z)$ es un subcontinuo de $[0,1]$. Luego, existen $a, b \in [0,1]$ con $a \leq b$ tales que

$$p_1(Z) = [a,b]\,.$$



Como $p_1(Z) = p_2(Z)$, se tiene que $a, b \in p_2(Z)$. Luego existen t, $t' \in [0, 1]$ tales que $(t, a) \in Z$ y $(t', b) \in Z$.

De acuerdo con la figura anterior, el punto (t, a) está en el lado inferior del cuadrado $[a, b] \times [a, b]$ y el punto (t', b) en el lado superior. Ahora, como Z es conexo, Z intersecta a la diagonal del cuadrado. Es decir,

$$Z \cap \Delta_{[0,1]} \neq \emptyset.$$

Así, el continuo $[0, 1]$ tiene margen cero. □

De acuerdo a lo anterior, ¿habrá un continuo que no tiene margen cero? El ejemplo que sigue responde esta pregunta.

Teorema 1.4. *La circunferencia unitaria S^1 no tiene margen cero.*

Demostración: Aquí usamos la notación compleja de S^1, es decir,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| = 1\}.$$

Sea $f \colon S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ definida, para cada $z \in S^1$, por $f(z) = (z, -z)$. Notemos que f es continua, porque lo son cada una de sus funciones coordenadas. Sea $Z = f(S^1)$. Luego, Z es un subcontinuo de $S^1 \times S^1$ con $p_1(Z) = p_2(Z) = S^1$. Observemos que

$$Z \cap \Delta_{S^1} = \emptyset.$$

Así, S^1 no tiene margen cero. □

En [13], [14] y [15] se puede encontrar más información sobre la teoría del margen de los continuos.

Definición 1.5. El diámetro de un subconjunto A no vacío de un espacio métrico X (con métrica d), denotado por *diám*(A), es

$$\textit{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Definición 1.6. Sean $f\colon Y \to X$ una función continua entre continuos y $\varepsilon > 0$. Se dice que la función f es una *ε-función* si para cada $y \in Y$, se tiene que

$$diám(f^{-1}(f(y)) < \varepsilon.$$

Notemos que una función continua e inyectiva, entre continuos es, para cada $\varepsilon > 0$, una ε-función.

Una clase de continuos que se estudia desde principios del siglo pasado es la que consiste de los continuos que tienen la propiedad siguiente.

Definición 1.7. Un continuo X es *encadenable*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función suprayectiva de X en el intervalo $[0, 1]$.

Se deja como ejercicio probar que la propiedad de ser encadenable es una propiedad topológica.

En un principio los continuos encadenables se llamaron continuos tipo serpiente ("snake-like") [2], actualmente también reciben el nombre de continuos tipo arco. En [17, Capítulo XII] se puede encontrar mucha más información sobre esta clase de continuos.

Intuitivamente el concepto de ε-función puede considerarse como una manera de medir qué tan cerca está una función de ser inyectiva. Con esto en mente, un continuo X es encadenable si es posible establecer una función suprayectiva de X en $[0, 1]$ tan cerca, como se desee, de ser un homeomorfismo. En particular, el intervalo cerrado $[0, 1]$ es encadenable y así un arco es encadenable.

Un ejemplo de un continuo encadenable que no es un arco es el siguiente.

Teorema 1.8. *El continuo* $\mathrm{sen}(\frac{1}{t})$*, que hemos denotado por* W*, es un continuo encadenable.*

Teorema 1.9. *Sean* $\varepsilon > 0$*,* $t_0 \in (0,\ mín\{\varepsilon, 1\})$ *y* g *un homeomorfismo de* $[-1, 1]$ *en* $[0, t_0]$ *tales que* $sen(\frac{1}{t_0}) = 1$ *y* $g(1) = t_0$*.*

Usando la notación dada en (*), página 76, hacemos A igual a la cerradura de $S_{(0,t_0]}$. De modo que

$$W = A \cup S_{[t_0,1]}.$$

Además,

$$\left\{\left(t_0,\ sen(\frac{1}{t_0})\right)\right\} = A \cap S_{[t_0,1]}.$$

Ahora notemos que $g \circ p_2 : A \to [0, t_0]$ y $p_1 : S_{[t_0,1]} \to [t_0, 1]$ son funciones continuas y que

$$p_1 \left(\left(t_0,\ sen(\frac{1}{t_0}) \right) \right) = t_0 = g(1) = g \circ p_2 \left(\left(t_0,\ sen(\frac{1}{t_0}) \right) \right)$$

por lo tanto la función

$$f : W \to [0, 1],$$

definida por

$$f(p) = \begin{cases} g \circ p_2(x) & \text{si } x \in A. \\ p_1(x) & \text{si } x \in S_{[t_0,1]}. \end{cases}$$

es una función continua y suprayectiva. Observemos que f es una ε-función (¿por qué?). Así, W es encadenable.

El siguiente teorema es una pieza fundamental en el desarrollo de la teoría del margen. Aunque su demostración no es complicada [12, pág. 210], una justificación detallada de este hecho se puede ver en [14, Teorema 1.3].

Teorema 1.10. *Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene margen cero.*

De los teoremas 1.4 y 1.11, se deduce que la circunferencia unitaria S^1 y de aquí cualquier curva cerrada simple no son continuos encadenables.

La recíproca del Teorema 1.11, es uno de los problemas pendientes más importantes en el estudio del margen cero de los continuos.

Problema 1.11. ¿Es cierto que cada continuo de margen cero es encadenable?

Este problema fue propuesto por Cook y Lelek, vea por ejemplo [6, Problema 8] y [7, Problema 81]. Esta cuestión ha contribuido, en gran medida, al desarrollo de la teoría. Desde que fue planteado, hasta la actualidad, se han publicado un gran número de trabajos de investigación en relación con éste.

En principio podríamos especular que la propiedad que sigue la tienen todos los continuos.

Definición 1.12. Se dice que un continuo X es *descomponible*, si existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$.

Existen continuos que no son descomponibles, dichos continuos se llaman **indescomponibles**, los cuales fueron descubiertos en 1910 por L. E. J. Brower [5]. ¡Más aún!, existen continuos tales que todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Definición 1.13. Se dice que un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Si la presencia de continuos indescomponibles es ya bastante sorprendente, ahora que los continuos hereditariamente indescomponibles existan es verdaderamente notable. En particular, existe un continuo hereditariamente indescomponible, muy famoso, conocido como seudoarco.

Definición 1.14. Un *seudoarco* es un continuo con más de un punto, hereditariamente indescomponible y encadenable.

Se deja como ejercicio probar que las nociones de descomponibilidad, indescomponibilidad e indescomponibilidad hereditaria son propiedades topológicas.

En 1920, Sierpiński introdujo la noción de homogeneidad.

Definición 1.15. Un continuo X es *homogéneo* si para cada par de puntos p y q de X, existe un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que $h(p)=q$.

Intuitivamente, un continuo es homogéneo si alrededor de cada uno de sus puntos, el espacio se ve de la misma forma. Esto implica que las propiedades locales son, topológicamente, las mismas en cualquier punto del espacio.

El intervalo cerrado $[0,1]$ no es homogéneo, porque los puntos distintos a los extremos tienen vecindades homeomorfas a la recta real, mientras que los puntos extremos no. La circunferencia unitaria en el plano, S^1, es el ejemplo más sencillo de un continuo homogéneo, después del continuo que tiene un único elemento. La esfera

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

y el toro $S^1 \times S^1$ (la superficie de una rosca) son otros continuos homogéneos.

2. Sobre la clasificación

Aquí vamos a explicar que una solución afirmativa al Problema 101.11 completaría la clasificación de los continuos *homogéneos en el plano.*

Knaster y Kuratowski [11] preguntaron en el primer número de Fundamenta Mathematica, la primera revista polaca de matemáticas dedicada a la teoría de conjuntos y a la topología, lo siguiente.

Teorema 2.1. *¿Es cualquier continuo con más de un punto, homogéneo, en el plano, un espacio homeomorfo a* S^1*?*

Con respecto a esta pregunta, cuatro años después, Mazurkiewicz [16] demostró que la respuesta es afirmativa para los continuos localmente conexos.

Bing [1] probó el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Si* X *es un seudoarco, entonces* X *es un continuo homogéneo en el plano.*

Así resolvió que la respuesta a la cuestión de Knaster y Kuratowski es negativa.

En 1960, Bing [4] demostró que el único (salvo homeomorfismos) continuo en el plano que contiene arcos y es homogéneo, es la circunferencia unitaria S^1.

Jones [9] probó el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Si* X *es un continuo homogéneo en el plano tal que su complemento,* $R^2 \setminus X$*, es conexo, entonces* X *es indescomponible.*

En 1955, Jones [10] propuso clasificar a los continuos homogéneos en el plano, dividiéndolos en dos familias:

(I) Los de complemento conexo

y

(II) Los de complemento disconexo

Por clasificar entendemos, realizar una lista, tal vez infinita, de continuos homogéneos tal que cada dos continuos en la lista sean topológicamente diferentes y tal que cualquier continuo homogéneo sea homeomorfo a alguno de la lista.

Según el Teorema 2.3, todos los continuos descomponibles están en la familia (II).

Nota 2.4. Con respecto a la propuesta de Jones él mismo demostró [10] que cualquier continuo de la familia (II) puede representarse en términos de continuos de la familia (I). Es decir, para conocer a todos los continuos homogéneos en el plano basta conocer a los continuos de la familia (I).

Actualmente esta idea de Jones se mantiene interesante, los resultados que mencionamos a continuación nos indican un camino que ha seguido dicha propuesta hasta hoy.

En 1976, Hagopian mejoró el Teorema 2.3 concluyendo, bajo las mismas hipótesis, que X debe ser hereditariamente indescomponible [8] y después, en 1981, Rogers [19], demostró el recíproco. Con lo cual se tiene lo siguiente.

Teorema 2.5. *Sea X un continuo homogéneo en el plano. Entonces X tiene complemento conexo si y sólo si X es hereditariamente indescomponible.*

De acuerdo con lo expresado en la Nota y considerando el Teorema 2.5,para conocer a todos los continuos homogéneos en el plano, basta conocer aquellos que son hereditariamente indescomponibles. Según el Teorema 2.2, un seudoarco es uno de estos continuos.

Conviene observar que hasta el momento, aparte de un seudoarco, no se conoce otro continuo, con más de un punto, homogéneo y hereditariamente indescomponible en el plano.

¿Será un seudoarco el único de tales continuos (salvo homeomorfismos)? Una respuesta afirmativa a esta cuestión completaría la clasificación de los continuos homogéneos en el plano.

Tomando en cuenta que en 1959, Bing caracterizó [3] al seudoarco como el único continuo, salvo homeomorfismos, con más de un punto, encadenable y hereditariamente indescomponible, podemos considerar el problema que sigue.

Problema 2.6. ¿Si X es un continuo con más de un punto, en el plano, homogéneo y hereditariamente indescomponible, entonces es X encadenable?

Una respuesta afirmativa a esta pregunta implicaría que un seudoarco es el único continuo (salvo homeomorfismos) con más de un punto en la familia (I).

Por otro lado, en 1982, Oversteegen y Tymchatyn [18] demostraron el resultado siguiente:

Teorema 2.7. *Si X es un continuo con más de un punto en el plano, homogéneo y hereditariamente indescomponible, entonces X tiene margen cero.*

Con este último teorema, si se demuestra que todos los continuos de margen cero son encadenables (vea el Problema 1.11), se concluye la clasificación de los continuos homogéneos en el plano.

Agradecimientos

Los autores de este artículo agradecemos a los árbitros, asignados por el Comité Editorial de la *Miscelánea Matemática*, la revisión comentarios y sugerencias a una versión previa y a Raúl Escobedo Conde, un gran maestro en la Teoría de los Continuos.

Referencias

[1] R. H. Bing, *A homogeneous indecomposable plane continuum*, Duke Math. J. **15** (1948), 729–742.

[2] R. H. Bing, *Snake-like continua*, Duke Math. J. **18** (1951), 653–663.

[3] R. H. Bing, *Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 345–346.

[4] R. H. Bing, *A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc*, Can. J. Math. **12** (1960), 209–230.

[5] L. E. J. Brower, *Zur analysis situs*, Math. Ann. **68** (1910) 422.

[6] H. Cook, W. T. Ingram y A. Lelek, *Eleven annotated problems about continua*, en: Open Problems in Topology. Editores: J. van Mill y G. M. Reed, North Holland, Amsterdam (1990), 295-302.

[7] H. Cook, W. T. Ingram, K. Kuperberg, A. Lelek, y P. Minc, Editors, *Continua with the Houston Problem Book*, Lecture Notes in Pure and Applied Math. **170**, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1995.

[8] C. L. Hagopian, *Indecomposable homogeneous plane continua are hereditarily indecomposable*, Trans. Amer. Math. Soc. **224** (1976), 339–350.

[9] F. B. Jones, *Certain homogeneous unicoherent indecomposable continua*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 855–859.

[10] F. B. Jones, *On a certain type of homogeneous plane continuum*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 735–740.

[11] B. Knaster y C. Kuratowski, *696 Problem 2*, Fund. Math. **1** (1920), 223.

[12] A. Lelek, *Disjoint mappings and the span of spaces*, Fund. Math. (1964), 199-214.

[13] A. Lelek y T. West, Spans of continua and their applications, en *Continua with the Houston problem book*, Editores: H. Cook, W. T. Ingram, K. T. Kuperberg, A. Lelek y P. Minc. Lecture Notes in Pure and Applied Math. **170**, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong (1995), 127–132.

[14] F. Macías, *El Margen de los Continuos*, tesis de maestría, Fac. de Ciencias Fís. Mat., B. Universidad Autónoma de Puebla, 1997.

[15] F. Macías, *Propiedades Topológicas de los Continuos de Margen Cero*, tesis de doctorado, Fac. de Ciencias Fís. Mat., B. Universidad Autónoma de Puebla, 2002.

[16] S. Mazurkiewicz, *Sur les continus homogènes*, Fund. Math. **5** (1924), 137–146.

[17] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. **158**, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[18] L. G. Oversteegen, y E. D. Tymchatyn, *Plane strips and the span of continua (I)*, Houston J. Math. **8** (1982), 129–142.

[19] J. T. Rogers, Jr., *Homogeneous separating plane continua are decomposable*, Michigan J. Math. **28** (1981), 317-321.