Miscelánea Matemática **21**, *17–19 (1994)*

Polinomios cúbicos en el intervalo $[0, 1]$

Fausto Ongay
CIMAT,
Apdo. Postal 402,
Guanajuato, Gto.
MEXICO

En las notas preliminares de un trabajo sobre dinámica de polinomios cúbicos que dejan fijo el intervalo $I = [0, 1]$, distribuidas a los participantes de la XI ELAM, J. Milnor enuncia el siguiente lema:

Lema. Dados v_1, v_2 tales que $0 \leq v_2 \leq v_1 \leq 1$, existe un único polinomio cúbico que fija la frontera del intervalo I y que tiene esos valores críticos

Un polinomio de este tipo se llama *bimodal*, y es claro que todos sus puntos críticos están en el interior I y que tiene primero su máximo local y luego su mínimo local (ver fig. 1)

Milnor señala en su nota que la demostración del lema (de hecho, de la generalización apropiada para polinomios de orden n con $n-1$ puntos críticos en el interior de I) es *bastante fácil mediante la construcción de la superficie de Riemann de la función requerida*, agregando a continuación que en un libro de próxima aparición, de De Melo y Van Strien, se podrá encontrar un prueba *puramente real.* La afirmación de Milnor me llamó la atención, ya que el resultado me pareció que debía ser en efecto puramente real y como no he tenido la oportunidad de ver el libro de De Melo y Van Strien, que recién ha aparecido, decidí intentar mi propia demostración. A fin de cuentas

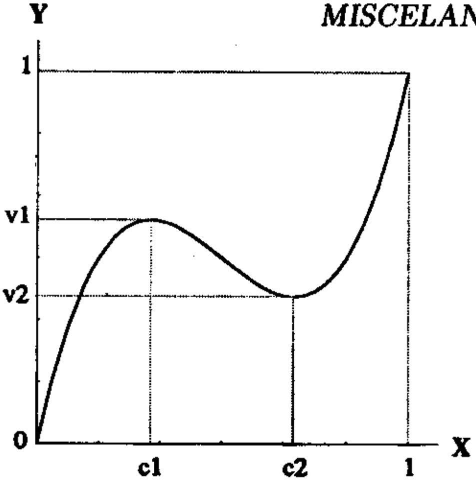

Figura 1:

me gustó la solución, ya que no sólo es completamente real, sino que es muy elemental y tiene además cierto sabor proyectivo, y pienso que puede ser un ejercicio interesante para un curso de cálculo.

Para no complicar la escritura, me restringiré al caso cúbico (aunque como se verá, el método se puede extender sin dificultad a polinomios de grado mayor) y en este contexto, un enunciado más preciso del lema es:

Dados $0 \leq v_2 \leq v_1 \leq 1$, existe uun único polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que satisface $f(0) = 0$; $f(1) = 1$, que tiene puntos críticos en c_1, c_2, $0 < c_1 < c_2 < 1$, con valores críticos $f(c_1) = v_1$; $f(c_2) = v_2$.

El problema, por supuesto, es que desconocemos los puntos críticos c_1, c_2. Sin embargo, para construir el polinomio en cuestión, podemos proceder como sigue:

Consideremos cualquier polinomio cúbico F que tenga los valores críticos $(0, 1$ en este caso), estas dos ecuaciones junto con las condiciones de punto crítico, $F'(0) = F'(1) = 0$ proveen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que por las condiciones del problema tiene una única solución en la situación que estamos considerando, F está dado explícitamente por $F(x) = 2(v_1 - v_2)x^3 + 3(v_2 - v_1)x^2 + v_1$, y dada la forma de F es claro, por ejemplo como consecuencia de los teoremas de Rolle y del valor intermedio, que existen dos únicos puntos $A < 0$, $1 < B$ tales que $F(A) = 0$; $F(B) = 1$ (ver fig. 2).

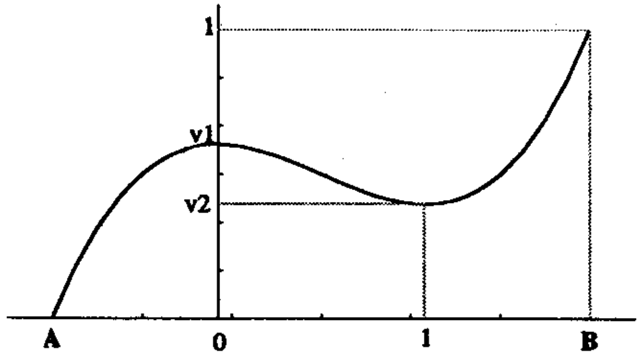

Figura 2:

La idea proyectiva es ahora ver a F *de lado*, de forma que su aspecto *se encoja* para ajustarse al intervalo deseado: De manera precisa, defínase $f(x) = F(g(x))$, donde g es la transformación afín $g(x) = (B - A)x + A$, que manda el intervalo I en $[A, B]$; entonces f es la solución del problema.

Es efecto, por construcción f es un polinomio cúbico, $f(0) = 0$; $f(1) = 1$, y por la regla de la cadena, es inmediato que f tiene sus puntos críticos en $c_1 = g^{-1}(0)$; $c_2 = g^{-1}(1)$ y toma ahí los valores críticos prescritos.

Para ver que ésta es la única solución, supongamos que existiera otra solución, digamos $\tilde{f}$, con puntos críticos en $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in (0,1)$; $\tilde{c}_1 < \tilde{c}_2$; consideremos la transformación afín

$$\tilde{g}(x) = \frac{x - \tilde{c}_1}{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1}$$

que transforma $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$ en I; entonces $\tilde{F}(x) = \tilde{f}(\tilde{g}(x))$ tiene los mismos puntos y valores críticos que la F construida anteriormente, que como hemos dicho es única, y por consiguiente $\tilde{F} = F$. Pero entonces tambien $\tilde{f} = f$ ya que la inversa de $\tilde{g}$ tiene que ser una transformación afín, que mande 0 en A y 1 en B; es decir, $\tilde{g}^{-1} = g$. Esto completa la demostración.