APUNTES DE GEOMETRIA

Por: RAYMUNDO BAUTISTA,

Investigador del Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M.

Con licencia en la Escuela de Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla.

Patrocinadores: Programa Nacional de Formación de profesores.
Asociación Nacional de Universidades e Institutos
de Enseñanza Superiór (ANUIES)

Miscelánea Matemática
Apdo. Postal 14-740
México, 14, D.F.

Precio de este ejemplar:
$ 10.00 (m.n.)
Un dólar en el extranjei

M I S C E L A N E A   M A T E M A T I C A

NUMERO 9

FEBRERO 1976

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

I N D I C E

Pág.

INTRODUCCION

Los presentes apuntes de geometría están basados en cursos impartidos de la materia llamada "Geometría Axiomática", materia que corresponde al plan de estudios del Colegio de Matemáticas de la - Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla. Los cursos han sido impartidos desde 1972, tanto por el autor de estas notas como por los profesores José de Jesús Perez Romero y Fernando Velázquez, agradeciéndoles a amb os las sugerencias y correcciones al manuscrito de estos apuntes, así como a las múltiples observaciones de nuestros alumnos.

La idea original de estas notas es la de construír la Geometría Euclideana usando únicamente la teoría de los conjuntos y posteriormente, sobre esta base, presentar a los números reales. Esta es la idea que se sigue en el libro de Artin "Geometric Algebra", en donde a partir de ciertas propiedades geométricas se construye un campo, y usando este campo se introducen coordenadas para los puntos de la geometría. La intención es presentar a los alumnos de matemáticas, la - geometría elemental con un rigor comparable al usado en los cursos de Cálculo.

Esperamos que estas notas sirvan no solamente a los alumnos de nuestra Escuela, sino también a todas las personas interesadas en la Matemática. Para poder leer estos apuntes no se necesita conocimientos previos, salvo cierta madurez matemática.

Puebla, Pue.
Septiembre 74 - Abril 75.

CAPITULO I.

APUNTES DE GEOMETRIA

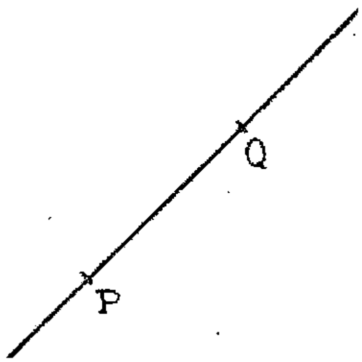
Primera Parte

1. Trabajaremos sobre el plano infinito, un concepto que no definiremos, pero que sin embargo es intuitivamente claro. Además supondremos que el plano está formado de puntos y que hay ciertos subconjuntos del plano que llamaremos rectas, y estos subconjuntos cumplirán ciertos axiomas que iremos enunciando en la primera parte de estos apuntes.

Axioma 1. Por dos puntos distintos cualesquiera del plano, pasa una recta y sólo una.

2. El Orden. Ahora describamos la noción que todos tenemos de "a la derecha de" ó "abajo de".

Si sobre el plano trazamos una recta inclinada ℓ y sobre la recta ℓ nos fijamos en dos puntos P y Q sabemos cuando P está o no a la izquierda de Q. Veamos qué propiedades tiene esta relación.



Tomaremos una relación aparentemente más complicada que la de estar a la izquierda de, precisamente esta: P está a la izquierda de o es igual a Q.

P está a la izquierda de Q o bien P es igual a Q.

Ahora bien con el fin de hacer más cómodos los razonamientos pondremos:

$$P \alpha Q$$

si P está a la izquierda de Q o bien $P = Q$.

Podemos fácilmente ver que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $P \alpha P$

b) Si $P \alpha Q$ y $Q \alpha P$ entonces $P = Q$

c) Si $P \alpha Q$ y $Q \alpha R$ entonces $P \alpha R$

d) Dados dos puntos P y Q sobre la recta ℓ entonces $P \alpha Q$ ó $Q \alpha P$. Cualquier relación que satisfaga a), b), c) y d) se llamará una relación de orden.

Así si reemplazamos "está a la izquierda de, o es igual a" por "está a la derecha o es igual a" se obtienen las mismas propiedades. Ahora bien si tomamos una recta vertical, la relación "está a la izquierda de o es igual a" carece de sentido, podemos:

sin embargo, usar la relación "está arriba de o es igual a" que como es fácil de ver satisface a), b), c) y d).

Observemos además que si ℓ es una recta y α es una relación de orden, entoces la relación α' definida por

$$P \alpha' Q \text{ si y solamente si } Q \alpha P$$

También satisface a), b), c) y d), a este orden le llamamos el orden inverso de α.

Ejemplos:

1) El orden inverso de la relación "está a la izquierda de o es igual a" es: "está a la derecha de o es igual a".

2) El orden inverso de la relación "está arriba de o es igual a" es: "está abajo de o es igual a".

Axioma 2. Para cada recta ℓ podemos escoger únicamente dos órdenes, el orden α y su inverso α'.

Definición 3. Si $P \neq Q$ son dos puntos de ℓ, y α es uno de los órdenes de ℓ con $P \alpha Q$ entonces al conjunto de puntos R de la recta ℓ tales que $P \alpha R$ y $R \alpha Q$ le llamaremos el segmento determinado por P y Q y lo denotaremos por $[P,Q]$.

3. Los movimientos del plano. Imaginemos que sobre el plano en que trabajamos colocamos un segundo plano movible y transparente. Entonces si deslizamos este segundo plano sin romperlo

ni arrugarlo sobre nuestro plano, este movimiento producirá una transformación de nuestro plano de la manera siguiente:

a) Fijemos el movimiento del plano transparente, esto es, tomemos un cierto movimiento fijo.

b) Ahora tomemos P un punto cualquiera de nuestro plano $\mathcal{P}$, calquémoslo en el plano transparente en cierto punto P_0, efectuemos el movimiento fijo que tenemos, ahora calquemos de nueva cuenta el punto P_0 sobre nuestro plano obteniendo un nuevo punto P'. Si denotamos por M al movimiento, a P' lo denotaremos por m(P). Esta transformación tiene la propiedad de ser biyectiva esto es, si $m(P) = m(P')$, $P = P'$ y para cualquier $Q \in \mathcal{P}$ existe una $Q' \in \mathcal{P}$, con $Q = m(Q')$.

Ahora bien si m_1 y m_2 son movimientos como los anteriores y los efectuamos uno a continuación del otro, digamos primero m_1 y luego m_2, esto da lugar a un nuevo movimiento, al que denotaremos por $m_2 \circ m_1$ y la función a que da lugar es la siguiente:

$$P \to m_2(m_1(P))$$

Si consideramos la transformación idéntica I dada por $I(P) = P$ es conveniente considerarla también como proveniente de un movimiento.

Si M es un movimiento, podemos hacer el movimiento contrario m^{-1} y éste da lugar a una función:

$$P \to m^{-1}(P)$$

con la propiedad de que $m^{-1}(m(P)) = P$ y $m(m^{-1}(P)) = P$ para todo punto P del plano. Así supondremos el siguiente axioma:

Axioma 3. Si en el plano sobre $\mathcal{P}$ hay una colección de transformaciones biyectivas, a las que llamaremos "movimientos" y éstas son tales que:

i) Si m_1 y $m_2 \in \mathcal{M}$, $m_2 \circ m_1$ está en $\mathcal{M}$

ii) La transformación I dada por $I(P)=P$ para toda P en $\mathcal{P}$ está en $\mathcal{M}$.

iii) Si m está en $\mathcal{M}$, m^{-1} es la transformación tal que $m^{-1} \circ m = m \circ m^{-1} = I$ está también en $\mathcal{M}$.

Axioma 4. Si ℓ es una recta y $[A,B]$ un segmento de la recta, entonces si m es un movimiento, $m(\ell)$ es una recta y $m[A,B] = [m(A),m(B)]$.

Definición 4. Sean $[A,B]$ y $[C,D]$ dos segmentos, diremos que longitud de $[A,B]$ = longitud de $[C,D]$ y pondremos $L[A,B]=L[c,d]$ si existe un movimiento $m \in \mathcal{M}$ tal que

$$m[A,B] = [m(A),m(B)] = [C,D]$$

Definición 5. Sea $Q \in \mathcal{P}$ y $[A,B]$ un segmento de recta. La cunferencia de centro Q y radio igual a la longitud de $[A,B]$ igual al conjunto de puntos R tales que $L[R,Q] = L[A,B]$, a conjunto lo denotaremos por $C_{[A,B]}(Q)$; Q se llama el centro circunferencia.

Axioma 5. Si C es una circunferencia y ℓ una recta que pasa por el centro de la circunferencia, entonces ℓ intersecta a C en únicamente dos puntos P_1 y P_2, además Q el centro está en $[P_1,P_2]$

Definición 6. Sea C una circunferencia, P un punto arbitrario del plano, supongamos $P \neq Q$ el centro de la circunferencia, - tracemos la recta ℓ determinada por P y Q (Axioma 1) sean P_1 y P_2 sus intersecciones con C (Axioma 5), diremos que P está en el exterior de C si $P \notin [P_1,P_2]$ y diremos que está en el interior si $P = Q$ ó $P \in [P_1,P_2]$.

Axioma 6. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias, supongamos que hay un punto de C_2 que está en el interior de C_1 y que también existe un punto de C_2 que está en el exterior de C_1, entonces hay un punto común a C_1 y C_2.

4. Angulos entre semirrectas.

Definición 7. Sea ℓ una recta, P un punto de ℓ y α un orden de ℓ, entonces al conjunto de puntos Q de ℓ, tales que $P \,\alpha\, Q$ se le llamará la semirrecta determinada por P y α, a P le llamaremos el punto inicial de la semirrecta. La colección de puntos R tales que $R \,\alpha\, P$ también forman otra semirrecta, de manera tal que la unión de estas dos semirrectas en la recta to-- tal. Estas semirrectas se llaman complementarias.

Definición 8. Si P es un punto del plano y ℓ_1 y ℓ_2 son semirrectas que parten de P_1 y ℓ'_1 ℓ'_2 son semirrectas que parten del punto P', diremos que el ángulo formado por ℓ_1 y ℓ_2 es igual al ángulo formado por ℓ'_1 y ℓ'_2 si existe $m \in M$ con $m(\ell_1) = \ell'_1$ y $m(\ell_2) = \ell'_2$, y pondremos

$$(\widehat{\ell_1, \ell_2}) = (\widehat{\ell'_1, \ell'_2})$$

Definición 9. Sean dos semirrectas que se inician en un punto P, diremos que el ángulo formado por ℓ y ℓ_1 es recto - si:

$$(\widehat{\ell_1, \ell}) = (\widehat{\ell_1, \ell'})$$

en donde ℓ' es la semirrecta complementaria de ℓ.

Axioma 7. Si $(\widehat{\ell_1, \ell_2})$ es recto y $(\widehat{\ell'_1, \ell'_2})$ también es recto, entonces $(\widehat{\ell_1, \ell_2}) = (\widehat{\ell'_1, \ell'_2})$

Axioma 8. (Axioma V de Euclides). Dada una recta ℓ y un punto P exterior a ℓ, por P para una paralela a ℓ y sólo una.

5. Propiedades acerca de la igualdad entre semirrectas y ángulos.

Propiedad 1. $L[A,B] = L[A,B]$

Demostración. $I[A,B]=[A,B]$ y como $I\varepsilon M$((ii) del Axioma 3).

$L[A,B]=L[A,B]$(por definición)

Propiedad 2. Si $L[A,B]= L[A',B']$ entonces

$L[A',B']= L[A,B]$

Demostración: Como $L[A,B] = L[A',B']$

existe $m\varepsilon M$ con $m[A,B] = [A',B']$ (por definición)

pero $m^{-1}\varepsilon M$ (por iii) del Axioma 3)

$m^{-1} [A',B'] = m^{-1}m[A,B]= I[A,B]=[A,B]$

$L[A',B']=L[A,B]$ (por definición)

Propiedad 3. Si $L[A,B]= L[A',B']$ y

$L[A',B'] = L[A'',B'']$

entonces $L[A,B] = L[A'',B'']$

Demostración: Como $L[A,B] = L[A',B']$

existe $m_1\varepsilon M$ con

$m_1[A,B] = [A',B']$ (por definición)

y como $L[A',B'] = L[A'',B'']$

existe $m_2\varepsilon M$ con

$m_2[A',B'] = [A'',B'']$ (por definición)

$\therefore m_2 \circ m_1[A,B] = m_2(m_1[A,B]) = m_2([A',B']) = [A'',B'']$

pero $m_2 \circ m_1 \in M$ (por i) Axioma 4)

$\therefore$ $L[A,B] = L[A'',B'']$ por definición

L.Q.D.D.

Se tienen propiedades análogas para la igualdad de ángu-- los; esto es

Propiedad 1. $(\ell_1, \ell_2) = (\ell_1, \ell_2)$

Propiedad 2. Si $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (\ell'_1 \hat{,} \ell'_2)$

entonces $(\ell'_1, \ell'_2) = (\ell_1 \hat{,} \ell_2)$

Propiedad 3. Si $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (\ell'_1 \hat{,} \ell_2)$

y $(\ell'_1 \hat{,} \ell'_2) = (\ell''_1 , \ell''_2)$

entonces $(\ell_1, \ell_2) = (\ell''_1 \; \ell''_2)$

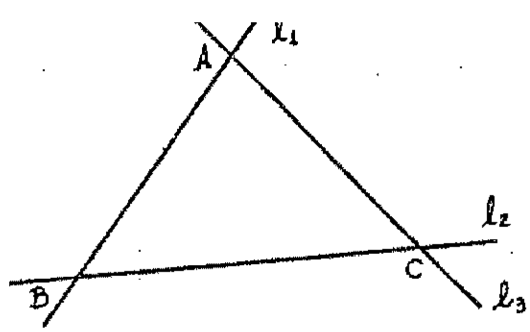
Axioma 9. (Simetría de la longitud)

$$L[A,B] = L[B,A]$$

(En otras palabras existe un movimiento m, tal que m(A)=B y m(B)

6. Los triángulos y algunas de sus propiedades.

Definición 6.1

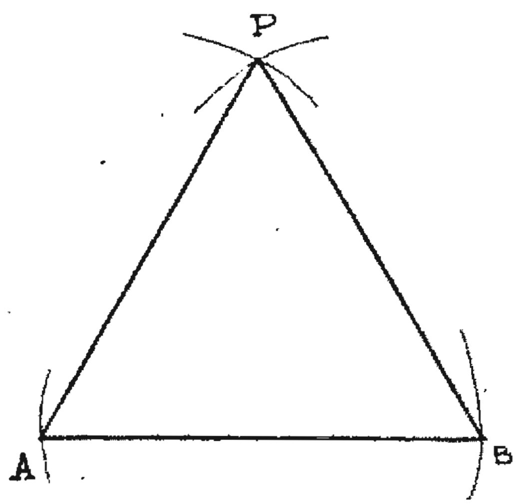


Sean tres rectas distintas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, supongamos que ℓ_3 y ℓ_2 cortan a ℓ_1 en A y en B respectivamente y C sea la intersección de ℓ_2 y ℓ_3 entonces el conjunto formado por los puntos que están en [A,B], los ques están en [B,C] y los que están en [C,A] se le llamará el triángulo ABC.

Definición 6.2. Diremos que dos triángulos Δ_1 y Δ_2 son iguales si existe $m \in M$ tal que $m(\Delta_1) = \Delta_2$

Definición 6.3. Diremos que el triángulo ABC es equilátero si $L[A,B] = L[B,C] = L[C,A]$.

Proposición 1. Dado un segmento de recta [A,B], entonces sobre [A,B] podemos trazar un triángulo equilátero.



Demostración. Sean [A,B] el segmento de recta dado. Consideremos las circunferencias $C_{[A,B]}(A)$ y $C_{[A,B]}(B)$. B está en $C_{[A,B]}(A)$, (1)
ya que $L[B,A] = L[A,B]$ (Axioma 9) B está en el interior de $C_{[A,B]}(B)$ (ya que es el centro). Sea ℓ la recta determinada por A y B (Axioma 1). ℓ pasa por el centro de $C_{[A,B]}(A)$, entonces por el Axioma 5 ℓ corta a $C_{[A,B]}(A)$ en dos puntos, uno de ellos en B por (1) el otro digamos B' y A está en [B,B'] (por el Axioma 5).

Podemos suponer que A está en [B',B]

$$B' \; \alpha \; A \; \alpha B \qquad (2)$$

de igual manera ℓ corta a $C_{[A,B]}(B)$ en dos puntos, uno de ellos es A porque L[A,B]= L [A,B] y en algún otro A', y B está en [A,A'] (Axioma 5) $\therefore$

$$A \alpha B \alpha A' \quad \text{ó} \quad A' \alpha B \alpha A,$$

pero como $A \alpha B$ por (2) la segunda relación no puede tenerse ya que si se tuviera $B \alpha A$, por la propiedad b) del orden α se tendría $A=B$, pero $A \neq B$.

Así que $A \alpha B \alpha A'$

$B' \alpha A \alpha B \alpha A'$

$\therefore$ B' está en el exterior de $C_{[A,B]}(A)$ tenemos dos puntos, uno B que está en el interior de $C_{[A,B]}(B)$ y otros B' que está en el exterior

por el Axioma 6 existe P que está en $C_{[A,B]}(B)$ y en $C_{[A,B]}(A)$ así que

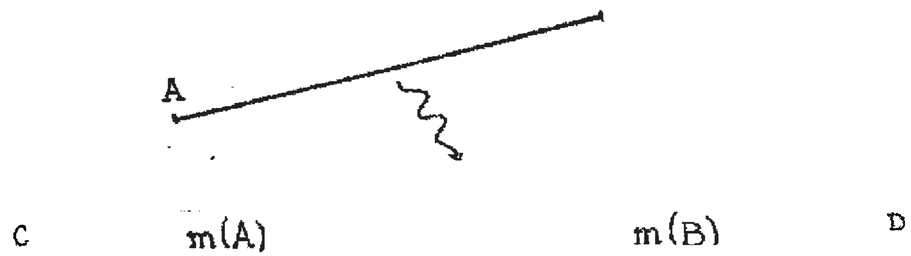
L[P,A] = L[A,B] porque P está en $C_{[A,B]}(A)$

L[P,B] = L[A,B] porque P está en $C_{[A,B]}(B)$

en consecuencia el triángulo PAB es equilátero L.Q.Q.P.

<u>Definición</u> 6.3 Sean [A,B] <u>y</u> [C,D] <u>dos segmentos de recta dados, diremos que</u> L[A,B] < L[C,D] si <u>existe</u> un <u>movimiento m,tal que</u>

$$m[A,B] \subsetneq [C,D]$$



Proposición 2. Dados dos segmentos de recta $[A,B]$ y $[C,D]$ entonces o bien tienen longitudes iguales o bien alguno de esos segmentos tiene longitud mayor que el otro.

Demostración. Sea $[A,B]$ el segmento dado. Consideremos $C_{[C,D]}(A)$ entonces si ℓ es la recta determinada por A y B existen dos puntos Q_1, Q_2 en ℓ y en $C_{[C,D]}(A)$, escojamos entre Q_1 y Q_2 aquella Qi, i=1 ó 2, tal que B y Qi estén del mismo lado con respecto a A esto es:

$$A \alpha Qi \ , \ Q \alpha B$$

Ahora bien por d) de las propiedades de orden

$$Q_i \alpha B \ , \quad B \alpha Q_i \quad \text{ó} \quad B = Q_i$$

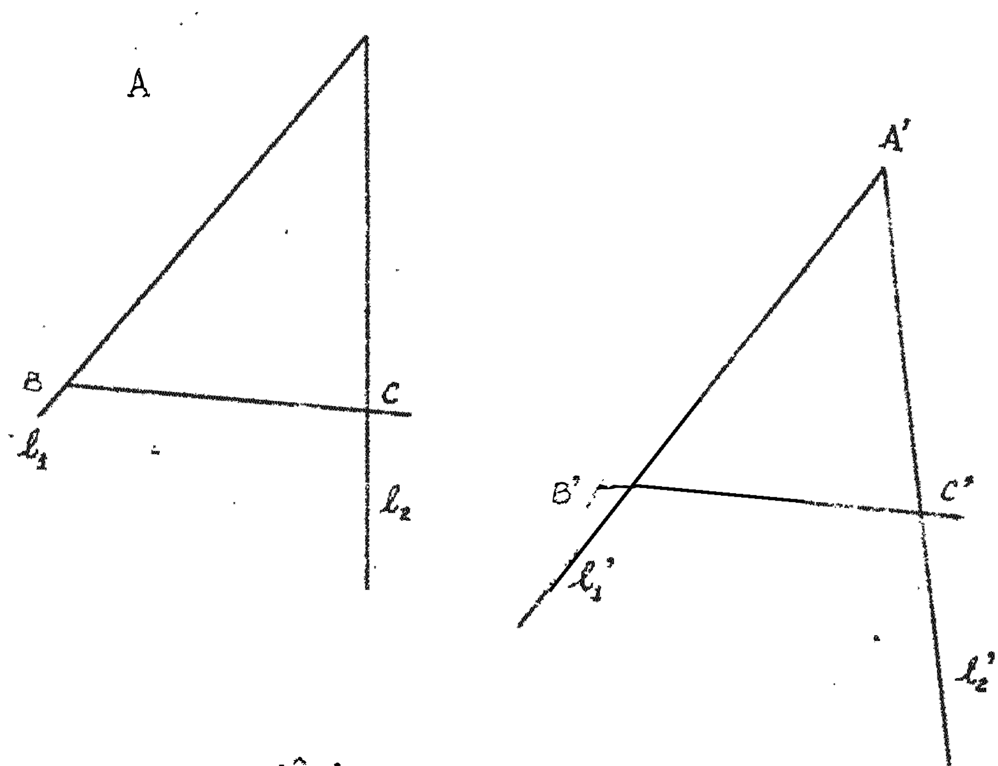
Si $Q_i \alpha B$, entonces $[A,Q_i] \subsetneq [A,B]$

y como $L[A,Q_i] = L[C,D]$, existe $m \varepsilon M$ con

$$m[C,D] = [A,Q_i] \subsetneq [A,B]$$

$$L[C,D] < L[A,B] \text{ , etc.}$$

Proposición 3. Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, y los ángulos formados por esos lados son iguales, entonces los triángulos son iguales.



Si $(\ell_1,\ell_2) = (\widehat{\ell_1',\ell_2'})$

y $L[A,B] = L[A',B']$, $L[A,C] = L[A',C']$ entonces el triángulo ABC es igual al triángulo A' B' C'

Demostración. Como $(\widehat{\ell_1,\ell_2}) = (\widehat{\ell_1' \ell_2'})$, existe m en M con

$m(\ell_1) = \ell_1'$ $\qquad m(\ell_2) =$ $\qquad$ (por definición)

m(B) está en la semi recta ℓ_1' (porque $m(\ell_1) = \ell_1'$)

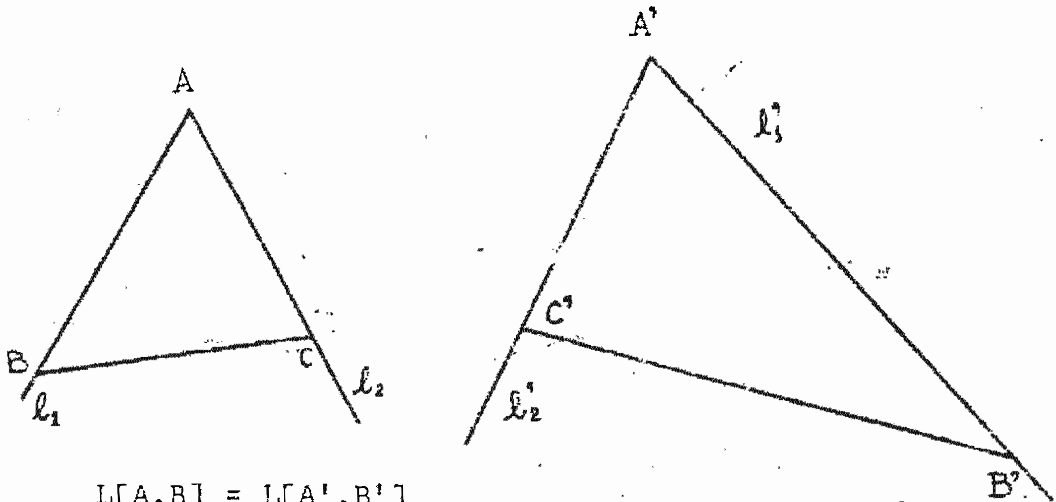
pero $L[A',m(B)] = L[m(A),m(B)] = L[A,B] = L[A',B']$

Así que la recta determinada por ℓ_1 corta al círculo $C_{[A,B]}(A')$ en los puntos m(B) y B' pero como ambos están del mismo lado con respecto a A, entonces por el Axioma 5 m(B)=B', de igual manera se prueba que m(c)=C' $\qquad m(\overset{\Delta}{ABC}) = \overset{\Delta}{A'B'C'}$

∴ el triángulo AB es igual al triángulo A'B'C'.

L.Q.Q.D.

CASO 2.



$L[A,B] = L[A',B']$

$L[A,C] = L[A',C']$

y $(\widehat{\ell_1,\ell_2}) = (\widehat{\ell_2',\ell_1'})$

En tal caso no se puede afirmar que los dos triángulos sean iguales (dada la definición de igualdad que hemos enunciado antes). Sin embargo obtendremos bastante información si se supone el siguiente axioma:

Axioma 10. Sea ℓ una recta arbitraria del plano, entonces existe una transformación S_ℓ única que cumple las siguientes -- propiedades

i) Si $P \in \ell$ $S_\ell(P) = P$

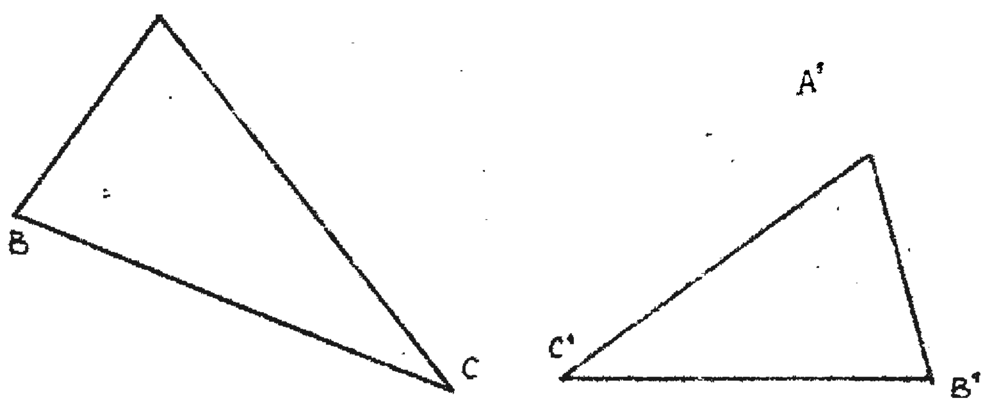
ii) Si $[A,B]$ es un segmento de recta $S_\ell[A,B] = [S_\ell(A), S_\ell(B)]$ es otro segmento de recta y $L[A,B] = L[S_\ell(A), S_\ell(B)]$

iii) Si ℓ_1 y ℓ_2 son semirrectas que parten de P, $S_\ell(\ell_1)$ y $S_\ell(\ell_2)$

son semirrectas que parten de $S_\ell(P)$ y

$$(S_\ell(\ell_1)\hat{,}S_\ell(\ell_2))=(\ell_2\hat{,}\ell_1)$$

Caso 2. (Continuación)



Notación: Si ABC es un triángulo BCA denotará el ángulo formado por las semirrectas que se inician en C y determinadas por B y A respectivamente.

Si $B\hat{A}C = C'A'B'$ y $L[A,B] = L[A',B']$ y $L[A,C]= L[A',C']$ entonces $L[B,C] = L[B',C']$ y

$$C\hat{B}A = A'\hat{B'}C' \ , \ A\hat{C}B = B'\hat{C'}A'$$

(En este caso diremos por abuso de lenguaje que los dos triángulos son iguales).

Sea ℓ una recta arbitraria y tomemos S_ℓ, entonces sea

$$A" = S_\ell(A) \quad B" = S_\ell(B') \quad y \quad C" = S_\ell(C')$$

pensemos entonces en el triángulo A"B"C" tenemos lo siguiente:

$$L[A",B"] = L\ S_\ell(A'),\ S_\ell(B') = L[A',B'] \text{ (por ii)del Axima 1}$$
$$= L[A,B] \text{ (por hipótesis)}$$

de igual manera

$$L[A'',C''] = L[S_\ell(A'),\ S_\ell(C')] = L[A',C'] \text{ (por ii) del Axioma 10)}$$
$$= [A,C] \text{ (por hipótesis)}$$

por otra parte

$$B''\hat{A''}C'' = S_\ell(B')\ S_\ell(A')S_\ell(C') = C'\hat{A'}B' \text{ (por iii del Axioma 10)}$$
$$= BAC \quad \text{(por hipótesis)}$$

∴ se tiene el caso 1) para los triángulos ABC y A"B"C"

son iguales en particular

$$L[B,C] = L[B'',C'']$$

pero $L[B'',C''] = L[S_\ell(B'),S_\ell(C')] = L[B',C']$ por ii Axioma 10)

y $\quad A''\hat{B''}C'' = A\hat{B}C$

pero $A''\hat{B''}C'' = S_\ell(A')\hat{S_\ell(B')}\ S_\ell(C') = C'\hat{B'}A'$ (por iii Axioma 10)

$$\therefore \quad ABC = C'B'A'$$

de manera análoga

$$\hat{A}CB = B'\hat{C'}A'$$

L.Q.Q.D.

<u>Proposición 4.</u> Sea ABC <u>un triángulo tal que</u> $L[A,B]=L[A,C]$ <u>entonces</u> $C\hat{B}A = \hat{A}CB$

<u>Demostración.</u> Pongamos $A'=A, B'=C,$ y $C'=B$, entonces

$BAC = C'\hat{A'}B'$ y $L[A,B]=L[A,C]=L[A',B']$ (por hipótesis)

$L[A,C]=L[A,B]=L[A',C']$ (por hipótesis)

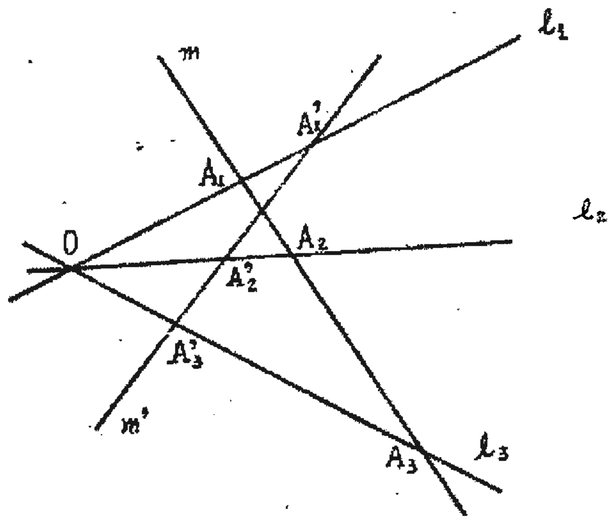
por la proposición 4 Caso 2

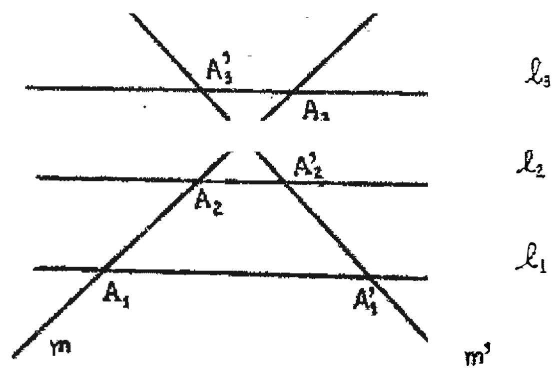
$CBA = A'B'C' = ACB$

L.Q.Q.D.

7. Intersecciones de rectas

Axioma 11. Sean tres semirrectas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 que parten del origen 0, o tres rectas paralelas. Sea m una recta que corta a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en A_1, A_2, A_3 respectivamente con $A_2 \in [A_1, A_3]$. Entonsi m' es otra recta cortando a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en A_1', A_2', A_3' respectivamente, se tiene $A_2' \in [A_1', A_3']$.

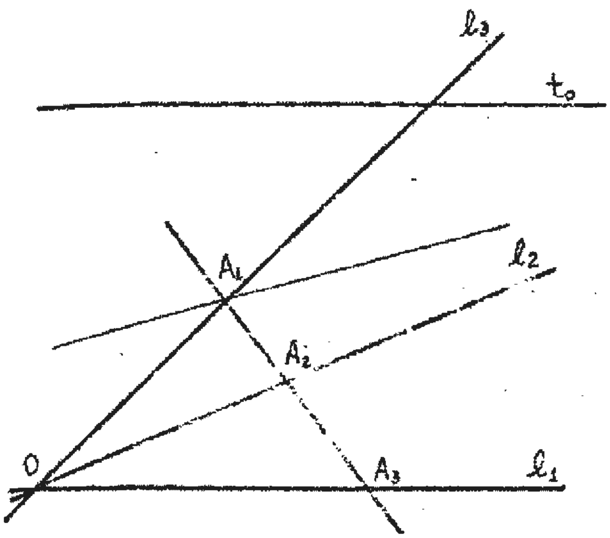




Definición 7.1. Sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tres semirrectas que parten de un punto 0, diremos que ℓ_2 está entre ℓ_1 y ℓ_3 si existe una recta t que corte a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en A_1, A_2, A_3 y $A_2 \in [A_1, A_3]$

Propiedad 7.1. Sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tres semirrectas que parten de punto 0, con ℓ_2 entre ℓ_1 y ℓ_3. Sea m una recta paralela a ℓ_2 que intersecte a ℓ_3 en un punto $M \neq 0$. Entonces m no intersecta a ℓ_1.

Demostración:



Sea ℓ_1'' la recta determinada por ℓ_1, entonces como m y ℓ_2'' son paralelas y ℓ_2'' intersecta a ℓ_1'', m intersecta también a ℓ_1'' en cierto punto P.

Por definición existe una recta t_0 que intersecta ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Sea $m' \,||\, \ell_2''$ y que pase por A_3, y $q \,||\, \ell_2''$ pasando por A_1. Igual que m, m' intersecta a ℓ_1' en cierto punto P', así tenemos lo siguiente:

m'', ℓ_2'' y q intersectan a t_0 en A_3, A_2, A_1 respectivamente

m', ℓ_2'' y q intersectan a ℓ_1'' en P', Q, A_1,

como $A_2 \in [A_1, A_3]$ por hipótesis, entonces

$O \in [P', A_1]$ por el Axioma 11

Así que P' y A_1 están en lados contrarios con respecto a O.

Además: m', m y ℓ_2'' cortan a ℓ_3'' en A_2, M y O.

m', m y ℓ_2'' cortan a ℓ_1'' en P', P y O.

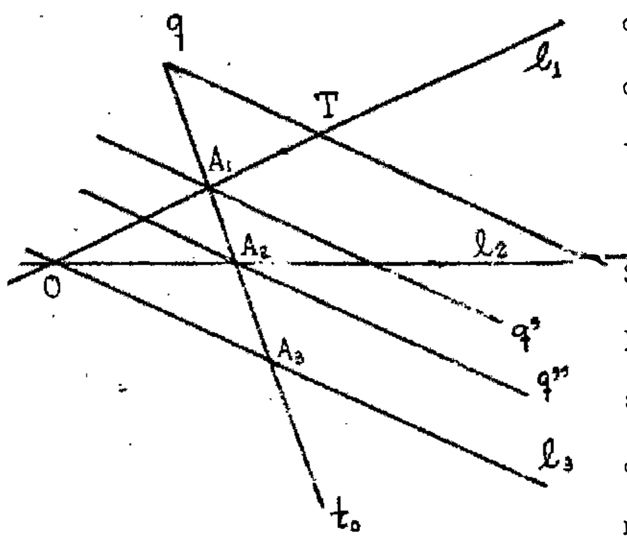
A_2 y M están del mismo lado con respecto a O (por hipótesis)

∴ P' y P están del mismo lado con respecto a O (Axioma 11)

∴ P' no está en ℓ_1

Propiedad 7.2. Sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tres semirrectas que se inician en O y supongamos que ℓ_2 está entre ℓ_1 y ℓ_3; entonces si q es una paralela ℓ_3 que pasa por algún punto de ℓ_1, intersecta a ℓ_2.

<u>Demostración.</u> Sea T la intersección de q y ℓ_1. Sea



$q' || q$ y que pase por A_1, en donde como antes A_1 es la in tersección de la recta t_0 con

Sea ℓ_2'' la recta determinada por ℓ_2 entonces q'y q intersectan a ℓ_2'' en Q' y Q. Sea $q'' || \ell_3$ pasando por A_2. Tenemos entonces:

q', q'', ℓ_3'' intersectan a t_0 en A_1, A_2, A_3 respectivamente -
q', q'', ℓ_3'' intersectan a ℓ_2'' en Q', A_2, O respectivamente

como $A_2 \in [A_1, A_3]$ entonces $A_2 \in [Q', O]$.

$\therefore$ Q' está en ℓ_2

Además q,q' y ℓ_3'' intersectan a ℓ_2'' en Q, Q', O.
q,q', ℓ_3'' intersectan a ℓ_1'' en T, A_1, O.

T y A_1 están del mismo lado con respecto a O.

$\therefore$ por el Axioma 11 Q y Q' están del mismo lado con respecto a O

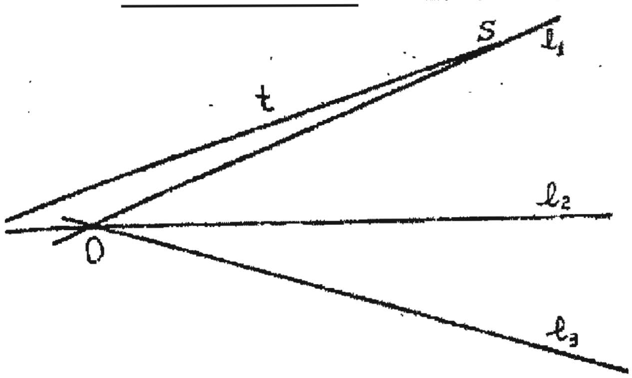
$\therefore$ Q está en ℓ_2

L.Q.Q.D.

<u>Propiedad</u> 7.3. <u>Sean</u> ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tres <u>semirrectas, con las mismas hipótesis y notación que en</u> 7.2. Sea ℓ_2' la <u>recta comple-</u>

mentaria de ℓ_2, entonces si t es una recta que intersecta a ℓ_2' y a ℓ_1 en T y S respectivamente; entonces t no intersecta a ℓ_3.

Demostración. La recta t no es paralela a ℓ_3'' porque si lo fuera intersectaría a ℓ_2 (por 7.2) lo cual no puede ser, así que ℓ_3'' y t se intersectan en cierto punto P.



Supongamos primero que S coincide con A_1. Sean q y q' paralelas a ℓ_3 pasando por A_1 y T respectivamente.

q intersecta a ℓ_2 en cierto punto Q (7.1)

t corta a q, ℓ_3'' y q' en A_1, P y T respectivamente,

ℓ_2'' corta a q, ℓ_3'' y q' en Q, O, T respectivamente.

$O\epsilon[Q,T]$

$P\epsilon[A_1,T]$ (Axioma 11)

Así que T está en la semirrecta que se inicia en A_1 y pasa por P.

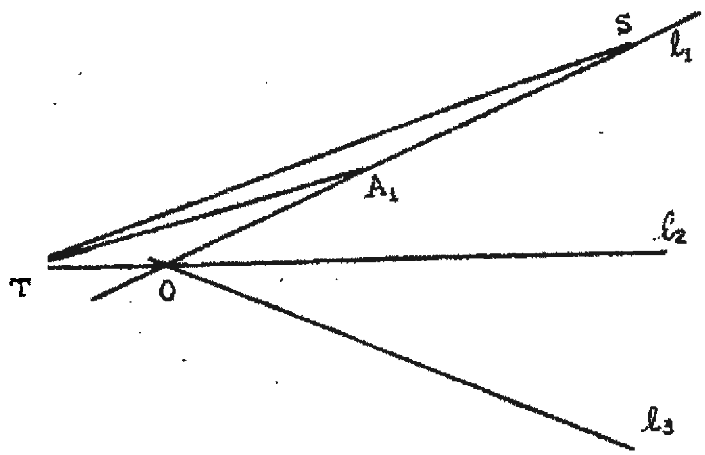
Ahora sean las semirrectas determinadas por:

A y P

A_1 y O

A_1 y A_2

éstas cortan a ℓ_2'' en T,O,A_2 y $O\epsilon[T,A_2]$ (por hipótesis) y a ℓ_3'' en P, O, A_3 $\therefore$ $O\epsilon[P,A_3]$ $\therefore$ P no está en ℓ_3



Ahora sea t una recta arbitraria que intersecta a ℓ_2'' y ℓ_1 en T y S, consideremos la recta t, determinada por T y A_1. Sean P y P_1 las intersecciones de t y t_1 con ℓ_3'' respectivamente. Igual que antes se prueba que S está en la semirrecta determinada por T y P. Tenemos así:

Las semirrectas que parten de T y determinadas por P, P_1 y O cortan a ℓ_3'' en P, P_1 y O y a ℓ_1 en S, A_1 y O

. . como A_1 y S están del mismo lado con respecto a O, entonces P y P_1 están del mismo lado con respecto a O (Axioma 11). pe P_1 no está en ℓ_3 P tampoco.

L.Q.Q.D

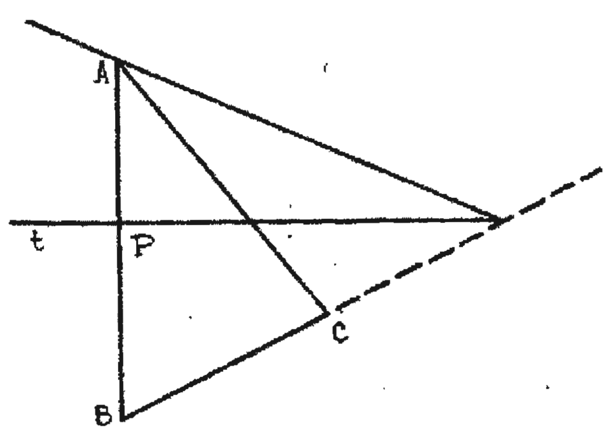
Propiedad 7.4 Sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tres semirrectas que parten de un punto O con ℓ_2 entre ℓ_1 y ℓ_3; sea t una recta que corta a ℓ_1 y ℓ_3, sea t una recta que corta a ℓ_1 y ℓ_3. Entonces esta recta corta a ℓ_2.

Demostración. Sea ℓ_2'' la recta determinada por ℓ_2, entonces t no puede ser paralela a ℓ_2'' ya que si lo fuera no intersectaría a ℓ_3 (7.1) t intersecta a ℓ_2'', si t no intersectase a ℓ_2 entonces intersecta a ℓ_2', la recta complementaria de ℓ_2 y por la propiedad no intersectaría a ℓ_3; pero estamos suponiendo que t intersecta a ℓ_3 $\therefore$ t intersecta a ℓ_2

L.Q.Q.D.

8. Los lados determinados por una recta.

Propiedad 8.1. Sea ABC un triángulo y t una recta que intersecta al segmento [A,B] en un punto P en [A,B], entonces si t no pasa por B ni por C, t intersecta al segmento [A,C] o al segmento [B,C].



Demostración. t no puede ser simultáneamente paralela a las rectas determinadas por A y C y por B y C porque éstas no lo son ya que se intersectan en C $\therefore$ t corta ya sea a la recta determinada por A y C o a la determinada por B y C, supongamos que es a ésta última recta (a la que llamaremos ℓ) a la que corta en algún punto T. Si $T \in [B,C]$ tendríamos demostrado el teorema así que supongamos que $T \notin [B,C]$ B y C están del mismo lado con respecto a T $\therefore$ la semirrecta que parte de T y pasa por C contiene a B.

Consideremos las semirrectas que parten de T y pasan por A, P y C respectivamente, éstas cortan a la recta determinada por A y B $\therefore$

en

A, P y B respectivamente,

como $P\in[A,B]$, la semirrecta que parte de T y pasa por P está entre las otras dos, por otra parte la recta determinada por A y C corta a la primera y a la tercera semirrectas $\therefore$ como la segunda está entre estas el segmento $[A,C]$ corta a t por la propiedad 7.4

L.Q.Q.D.

Definición. Sea ℓ una recta del plano, diremos que los puntos P y Q están del mismo lado con respecto a ℓ y pondremos $P\sim_{\ell}Q$ si el segmento de recta $[P,Q]$ no corta a ℓ, o bien si $P=Q$.

Ahora veamos algunas propiedades de la relación $\sim_{\ell}$.

Propiedad 8.2 i) Si $P\sim_{\ell}Q$ entonces $Q\sim_{\ell}P$

ii) $P\sim_{\ell}P$

iii) Si $P\sim_{\ell}Q$ y $Q\sim_{\ell}R$ entonces $P\sim_{\ell}R$

Demostración. Las propiedades i) y ii) son claras, demostraremos la propiedad iii)

Si $P=Q$, $P=R$ ó $Q=R$ la propiedad iii) es clara, podemos así suponer que los tres puntos son distintos. Así hay dos casos

i) P, Q y R están en una recta

ii) P,Q y R determinan en triángulo

Si P, Q y R están en una recta tenemos dos casos; o bien

$$R\in[P,Q] \quad ó \quad R\notin[P,Q]$$

Si ocurre el primer caso $[P,R]\subset[P,Q]$; $[P,Q]$ no intersecta a ℓ . . tampoco $[P,R]$ $\therefore$ $P\sim_{\ell}R$.

Si el segundo caso ocurre hay dos posibilidades $P\epsilon[R,Q]$ ó $Q\epsilon[P,R]$; si se tiene la primera posibilidad

$$[R,P]\subset[R,Q] \text{ y como antes } R\sim_{\ell}P,$$

si la segunda se tiene

$[P,R] = [P,Q]\cup[Q,R]$, pero $[P,Q]$ no intersecta a ℓ y $[Q,R]$ tampoco, entonces $[P,R]$ no intersecta a ℓ

$$\therefore P \sim_{\ell} R$$

Ahora si P Q y R forman un triángulo y $P\sim_{\ell}R$ no ocurriese entonces ℓ intersecta al lado PR $\therefore$ intersectaría por 8.1 ya sea al lado PQ o al QR esto es

$P \sim_{\ell}Q$ ó $Q\sim_{\ell}R$ no ocurriría; pero esto no puede ser, así que

L.Q.Q.D.

Sean ahora P_1 y P_2 dos puntos del plano en lados contrarios con respecto a ℓ. Sea C_{ℓ} la colección de puntos P que no están en ℓ, $C_{\ell}(P_1)$ va a denotar al conjunto de puntos que están del mismo lado que P_1 con respecto a ℓ, y $C_{\ell}(P_2)$, lo mismo para P_2. Tenemos la propiedad siguiente:

<u>Propiedad</u> 8.2 $C_{\ell}=C_{\ell}(P_1)\cup C_{\ell}(P_2)$, <u>en otras palabras dado cualquier punto de</u> C_{ℓ}, <u>éste se halla ya sea en</u> $C_{\ell}(P_1)$ <u>ó en</u> $C_{\ell}(P_2)$. <u>Además</u> $C_{\ell}(P_1)\cap C_{\ell}(P_2)=\phi$; <u>esto es no hay puntos que pertenezcan a la vez a</u> $C_{\ell}(P_1)$ y a $C_{\ell}(P_2)$.

Demostración. Sea Q un punto arbitrario del plano, entonces

si $Q=P_1$ $\quad P_1\sim_{\ell}P$ $\quad\therefore Q=P_1$ está en $C_{\ell}(P_1)$

si $Q=P_2$ $\quad P_2\sim_{\ell}P_2$ $\quad\therefore Q=P_2$ está en $C_{\ell}(P_2)$

Si ahora $Q \neq P_1, P_2$, podemos considerar dos casos

i) Q, P_1, P_2 estan en una misma recta

ii) Q, P_1, P_2 no están en una recta.

Consideremos el caso i). Sea t la recta que pasa por P_1 y P_2 y que intersecta a ℓ en cierto punto T con $T \epsilon [P_1, P_2]$ si llamamos t_1, t_2 a las semirrectas determinadas con P_1 en t_1 y P_2 en t_2, entonces Q está ya sea en t_1 o en t_2; si en t_1, P_1 y Q están del mismo lado con respecto a T $\therefore$

$[P_1, Q]$ no intersecta a ℓ $\therefore$ $Q \sim_\ell P_1$

y si Q está en t_2 $\qquad Q \sim_\ell P_2$.

iii) En este caso consideremos el triángulo Q, P_1, P_2, la rec cta ℓ intersecta a $[P_1, P_2]$, así que por la propiedad 8.1 ℓ intersecta ya sea a $[Q, P_1]$ y en este caso $Q \sim_\ell P_1$ $\quad Q \epsilon C_\ell(P_2)$ ó ℓ intersecta a $[Q, P_2]$ en cuyo caso $Q \sim_\ell P_2$ $\quad Q \epsilon C_\ell(P_2)$.

Ahora demostremos que $C_\ell(P_1) \cap C_\ell(P_2) = \phi$, en efecto si hubiese una Q en $C_\ell(P_1)$ y en $C_\ell(P_2)$ se tendría

$Q \sim_\ell P_1$ $\qquad$ y $Q \sim_\ell P_2$

$P_1 \sim_\ell Q$ $\qquad$ y $Q \sim_\ell P_2$, por i) de 8.2

$\therefore$ $P_1 \sim_\ell P_2$, por iii de 8.2; pero esto no puede ser ya que P_1 y P_2 están en lados distintos con respecto a ℓ

L.Q.Q.D.

<u>Propiedad</u> 8.4. <u>Si</u> P_1 <u>$\sim_\ell P_2$, entonces</u> $C_\ell(P_1) = C_\ell(P_2)$.

<u>Demostración.</u> Si Q es cualquier punto de $C_\ell(P_1)$, entonces

$Q\sim_{\ell}P_1$ (por definición de $C_{\ell}(P_1)$), pero $P_1\sim_{\ell}P_2$ $Q\sim P$ por iii) de 8.2 $\therefore$ $Q\in C_{\ell}(P_2)$ $C_{\ell}(P_1)\subset C_{\ell}(P_2)$

Ahora si Q está en $C_{\ell}(P_2)$, $Q\sim_{\ell}P_2$ y como $P_2\sim_{\ell}P_1$ i) de 8.2, entonces $Q\sim_{\ell}P_1$ ((iii) de 8.2) $\therefore$ Q está en $C_{\ell}(P_1)$

$$\therefore \quad C_{\ell}(P_2)\subset C_{\ell}(P_1)$$

$$\therefore \quad C_{\ell}(P_1) = C_{\ell}(P_2)$$

L.Q.Q.D.

9. Un estudio de las simetrías.

Volvamos al axioma 10, como se vió, para cada recta ℓ existe una transformación única S_{ℓ} LLamada simetría con respecto a ℓ, que cumple las propiedades i) ii) y iii) del axioma 10. En esta sección veremos de manera explícita la forma de esta transformación.

Consideremos así los siguientes tres casos posibles

1) Existe un punto P no en ℓ, con $S_{\ell}(P) = P$
2) Existe un punto P tal que $P\neq S_{\ell}(P)$ y la recta determinada por estos dos puntos corta a ℓ.
3) Para todo punto P del plano $P\neq S_{\ell}(P)$ y la recta determinada por P y $S_{\ell}(P)$ es paralela a ℓ.

Observación. $S_{\ell}^2=I$. En efecto observemos que S_{ℓ} es inyectiva esto es $S_{\ell}(A) = S_{\ell}(A')$ implica que $A=A'$. En efecto supongamos que $S_{\ell}(A) = S_{\ell}(A')$ entonces si $A\neq A'$ el segmento de recta $[A,A']$ iría en el punto $S_{\ell}(A)$, lo cual contradiría a ii). Así que $A=A'$.

Ahora bien, pensemos en $S_{\ell}\circ S_{\ell}\circ S_{\ell}=S_{\ell}^3$, entonces si P está en ℓ

$S_\ell^3(P) = S_\ell(S_\ell(S_\ell(P))) = P$

Si $[A,B]$ es un segmento:

$$S_\ell^3[A,B] = S_\ell^2[S_\ell[A,B]] = S_\ell^2[S_\ell(A),S_\ell(B)]$$

$$= S_\ell(S_\ell[S_\ell(A),S_\ell(B)])$$

$$= S_\ell([S_\ell^2(A),S_\ell^2(B)])$$

$$= [S_\ell^3(A),\ S_\ell^3(B)]$$

y es un segmento. Además

$$L[S_\ell^3(A),\ S_\ell^3(B)] = L[S_\ell^2(A),\ S^2(B)], \text{por ii) Axioma 10}$$

$$= L[S_\ell(A),\ S_\ell(B)]$$

$$= L[A,B]$$

Además si ℓ_1 y ℓ_2 son semirrectas que parten de 0

$S_\ell(\ell_1)$, $S_\ell(\ell_2)$ son semirrectas que parten de $S_\ell(0)$

$S_\ell^2(\ell_1)$, $S_\ell^2(\ell_2)$ son semirrectas que parten de $S_\ell^2(0)$

$\therefore$ $S_\ell^3(\ell_1)$, $S_\ell^3(\ell_2)$ son semirrectas que parten de $S_\ell^3(0)$

por otra parte:

$$(S_\ell^3(\ell_1)\hat{,}\ S_\ell^3(\ell_2)) = (S_\ell \circ S_\ell^2(\ell_1)\hat{,} S_\ell \circ S_\ell^2(\ell_2))$$

$$= (S_\ell^2(\ell_2)\hat{,}\ S_\ell^2(\ell_1)), \text{por ii) Axioma 10}$$

$$= (S_\ell \circ S_\ell(\ell_2)\hat{,}\ S_\ell \circ S_\ell(\ell_1))$$

$$= (S_\ell(\ell_1),S_\ell(\ell_2)), \text{por ii) Axioma 10}$$

$$= (\ell_2,\ell_1)\ ,\quad \text{por ii) Axioma 10}$$

Así que S_ℓ^3 cumple con las propiedades i), ii), iii) ∴ como S_ℓ también las cumple y S_ℓ es única, entonces

$$S_\ell^3 = S_\ell$$

∴ Para toda P

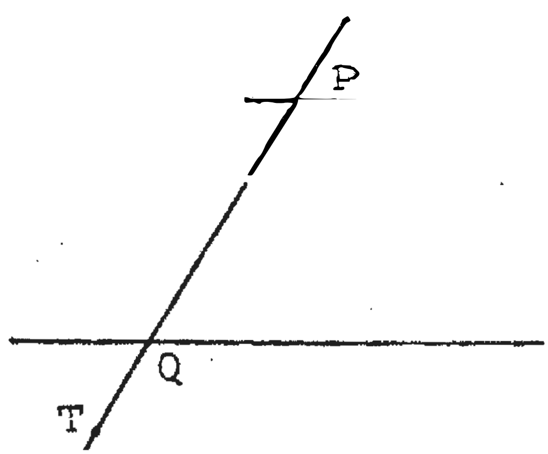
$$S_\ell(S_\ell^2(P)) = S_\ell(P)$$

∴ como S_ℓ es inyectiva $S_\ell^2(P) = P$ para toda P

Así que $S_\ell^2 = I$

<u>Afirmación 1.</u> Si ocurre el caso 1, $S_\ell = I$

<u>Demostración.</u> Sea m la paralela a ℓ que pasa por P. Ahora sea T un punto no en m, la recta determinada por T y P es distinta de m ∴ la recta determinada por T y P intersecta a ℓ en cierto punto Q. Llamemos a esta recta t. Tenemos así:



$$Q = S_\ell(Q) \in S_\ell(t)$$

$P \in t$ ∴ $P = S_\ell(P) \in S_\ell(t)$

Así que $S_\ell(t) = t$ (Axioma I)

Además la semirrecta ℓ_1 que comienza en Q y pasa por P es tal que $S_\ell(\ell_1) = \ell_1$, así que si ℓ_1' es la recta complementaria: $S_\ell(\ell_1') = \ell_1'$. Ahora bien si $T \in \ell_1$, $S_\ell(T) \in S_\ell(\ell_1) = \ell_1$ pero como

$L[Q,T] = L[S_\ell(Q), S_\ell(T)] = L[Q,S_\ell(T)]$ (ii) Axioma 10)

entonces $T = S_\ell(T)$ (Axioma 5)

Una demostración análoga si $T\in\ell_1^{'}$ $\therefore$ $S_\ell(T)=T$, si $T\notin m$.

Ahora sea $T_1 \in m$, sabemos que $S_\ell(m)\,||\,S_\ell(\ell)$ $\therefore$ $S_\ell(m)\,||\,\ell$, pero $P=S_\ell(P) \in S_\ell(m)$ y por P pasa una sola paralela a ℓ, por consiguiente en vista del Axioma 8 : $S_\ell(m)=m$. Sea r cualquier recta que pase por T_1 distinta a m. Tomemos dos puntos Q_1, Q_2 en r distintos entre sí y distintos a T_1, entonces como Q_1 y $Q_2 \notin m$

$Q_1 = S_\ell(Q_1)$ $\quad Q_2 = S_\ell(Q_2)$ $\quad \therefore$ $S_\ell(r) = r$

$S_\ell(T_1)$ está en $S_\ell(m)$ $\therefore$ en m

$S_\ell(T_1)$ está en $S_\ell(r)$ $\therefore$ en r

$\therefore$ $S_\ell(T_1) = T_1$ porque T_1 es la intersección de m y r

L.Q.Q.D.

Afirmación 2.

Si ocurre el caso 2), entonces para cualquier punto R del plano no en ℓ $S_\ell(R)\neq R$ y la recta determinada por $S_\ell(R)$ y R cortan a ℓ en cierto punto Q de manera tal que $Q\in[R,S_\ell(R)]$ $L[R,Q] = L[Q,S_\ell(R)]$ y si ℓ^1 es cualquier semirrecta en ℓ determinada por Q, el ángulo formado por ℓ' y $[R,Q]$ es recto.

Demostración. Desde luego para cualquier R no en ℓ: $S_\ell(R)\neq R$ porque si no tendríamos el caso 1) y $S_\ell=I$, contra el hecho de que $S_\ell(P)\neq P$.

Sea t la recta determinada por P y $S_\ell(P)$ y Q la intersección con ℓ,

Q está en T $\therefore$ $Q=S_\ell(Q)$ está en $S\ (t)$

P está en t $\therefore$ $S_\ell(P)$ esta en $S_\ell(t)$

$\therefore$ $S_\ell(t) = t$, por el Axioma 1

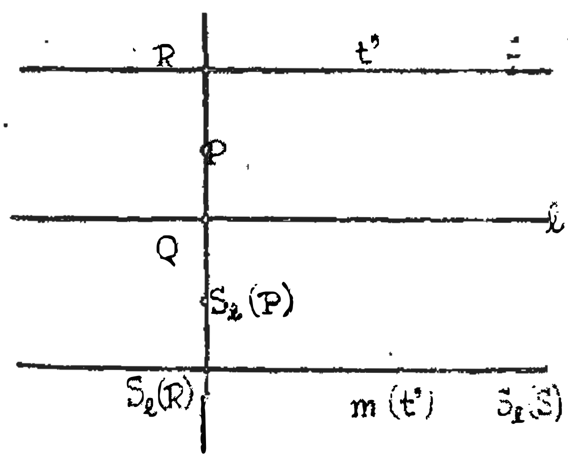
Además $L[P,Q] = L[S_\ell(P),\ S_\ell(Q)]$

$= L[S_\ell(P),\ Q]$ (ii) del Axioma 10)

en consecuencia por el axioma 5): $Q\epsilon[P,S_\ell(P)]$.

Sea ahora ℓ' una semirrecta en ℓ determinada por Q, denotemos por t_1 la semirrecta en t que parte de Q y pasa por P, entonces t_1' la semirrecta complementaria está determinada por Q y $S_\ell(P)$. Así que $S_\ell(t_1) = t_1'$ y

$(\widehat{\ell';t_1}) = (\widehat{S_\ell(t_1),S_\ell(\ell')})=(\widehat{t_1',\ \ell'})$ $\therefore$ el ángulo es recto.



Ahora bien como es fácil verifi- ficar si

$P \sim_\ell R$

$S_\ell(P) \sim_\ell S_\ell(R)$

$\therefore S_\ell C_\ell(R) = C_\ell(S_\ell(R))$

y $S_\ell C_\ell(S_\ell(R)) = C_\ell(R)$

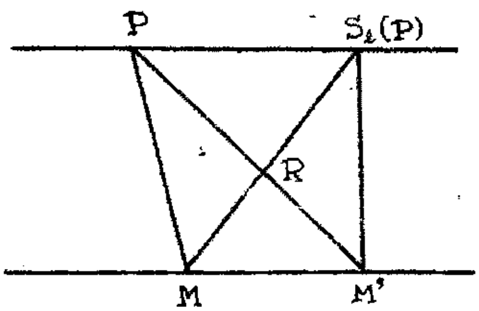
$\therefore$ si $T\epsilon C_\ell(R): S_\ell(T)\epsilon C_\ell(S_\ell(R))$

$\therefore T$ y $S_\ell(T)$ están en lados contrarios con respecto a ℓ $\therefore$ la recta determinada por T y $S_\ell(T)$ -

corta a ℓ $\therefore$ T cumple las mismas Hipótesis que P $\therefore$ todas las las afirmaciones hechas para P se cumplan para T.

L.Q.Q.D.

iii) Tomemos P no en ℓ, entonces por hipótesis $P \neq S_\ell(P)$ y la recta determinada por P y $S_\ell(P)$ es paralela a ℓ.



Sea M un punto de ℓ, consideremos el segmento de recta $[M, S\ (P)]$ y denotemos por t a la recta determinada por M y $S_\ell(P)$, sea $R \in [M, S_\ell(P)]$. Entonces la recta determinada por P y R no es paralela a ℓ, por lo tanto intersecta a ℓ en cierto punto M', desde luego $M \neq M'$.

Ahora bien todos los puntos de $[P,M]$ salvo M están en $C_t(P)$, y todos los puntos del segmento $[S_\ell(P), M']$ salvo $S_\ell(P)$ están en $C_t(M')$, y como M' y P están a lados contrarios de t se tiene $C_t(P) \cap C_t(M') = \phi$, así que los segmentos $[P,M]$ y $[S_\ell(P), M']$ no se intersectan. Llamemos m a la recta determinada por P y M, y m' a la determinada por $S_\ell(P)$ y M'. La recta k_1 determinada por M y $S_\ell(P)$ se transforma en m, y la recta k_2 determinada por M' y P se transforma en m', pero las rectas k_1 y k_2 se intersectan en R, por tanto m y m' se intersectan en $T = S_\ell(R)$.

Además de $R \in [M, S_\ell(P)]$ se sigue que $T = S_\ell(R) \in [M,P]$ pero esto no puede ser, así que iii) no ocurre.

Lema. _Supongamos que_ $m\in M$ (resp $m=S_t$) _es tal que_ $m(P)=P$ _y_ $m(0)=0$ (resp $S_t(P)=P$, $S_t(0)=0$) con $P\neq 0$. _Entonces si_ ℓ _es la recta determinada por_ P _y_ 0 _y_ Q _está en_ ℓ: $m(Q)=Q$ (resp $S_t(Q)=Q$).

Demostración. Sea ℓ_1 la semirrecta que parte de 0 y pasa por P, entonces $m(\ell_1)$ es una semirrecta que parte de $m(0)$ y pasa por $m(P)$, pero $m(0)=0$ y $m(P)=P$

$$\therefore\ m(\ell_1) = \ell_1$$

$$\therefore\ m(\ell) = \ell \text{ y } m(\ell_1') = \ell_1'$$ (ℓ_1' la semirrecta complementaria de ℓ_1)

Sea Q en ℓ_1, entonces $m(Q)$ está en ℓ_1 y $L[0,m(Q)]=L[0,Q]$

$$m(Q) = Q.$$

L.Q.Q.D.

Propiedad $S_\ell\neq I$.

Demostración. Por reducción al absurdo, si $S_\ell=I$ para alguna recta ℓ; entonces tendríamos para cualquier dos semirrectas la igualdad siguiente:

$$(\widehat{\ell_1,\ell_2}) = (S_\ell(\ell_2),\widehat{\ } S_\ell(\ell_1)) = (\widehat{\ell_2,\ell_1}) \quad \text{por ii) Axioma 10}$$

Sean entonces dos semirrectas ℓ_1, ℓ_2 que se inician en un punto 0, y tales que no sean complementarias. Como $(\ell_1,\ell_2) = (\ell_2,\ell_1)$, existe por definición $m\in M$, tal que $m(\ell_1)=\ell_2$ y $m(\ell_2)=\ell_1$; entonces

$$m^2(\ell_1) = m(\ell_2) = \ell_1$$

y $$m^2(\ell_2) = m(\ell_1) = \ell_2$$

Así si P está en ℓ_2: $m^2(P)\in\ell_2$ y como $m^2(0)=0$

$$L[0,m^2(P)] = L[m^2(0), m^2(P)] = L[0,P] ,$$

pero P y $m^2(P)$ están en ℓ_2 $\therefore$ por el axioma 5) $P=m^2(P)$ para toda P en ℓ_2, de igual manera se demuestra que si $P\in\ell_2'$ la recta complementaria de ℓ_2: $m^2(P)=P$. Además

$$(t_1,t_2) = (m^2(t_1)\hat{,} m^2(t_2)) = (m^2(t_2), m^2(t_1))$$

en donde t_1 y t_2 son cualquier dos semirrectas que parten de 0'

$\therefore$ m^2 y S_ℓ tienen las mismas propiedades que S_{ℓ_1}

$$\therefore \quad m^2 = S_\ell = S_{\ell_1} = I \qquad \therefore \quad m^2 = I.$$

Sea $P\in\ell_1$, entonces $m(P) \in \ell_2$

Escojamos $Q\in\ell_1$, con $P\in[0,q]$, entonces

$m(Q)\in\ell_2$ y $m(P)\in[0,m(Q)]$.

Ahora consideremos las rectas k_1 y k_2 determinadas por P y m(Q) y por m(P) y Q respectivamente. Sea t una recta que pase por 0 paralela a la k_1, entonces si $k_1||k_2$ tendríamos tres rectas paralelas t,k_1, k_2 y cortan a ℓ_2 en 0, m(Q), m(P) y a ℓ_1 en 0,P,Q, $\therefore$ por el Axioma 11, como $P\in[0,Q]$

$$m(Q)\in[0,m(P)]$$

lo cual no puede ser ya que $m(P)\in[0,m(Q)]$

Así que k_1 y k_2 se cortan en algún punto K.

k_1 está determinada por P y m(Q) $\therefore$ $m(k_1)$ está determinad por m(P) y Q $\therefore$ $m(k_1) =k_2$ y $m(k_2) = m(m(k_1))= m (k_1)=k_1$ $\therefore$ como K está en k_1,m(k) está en $m(k_1) = k_2$, pero K está también en k_2

$$\therefore m(K) \in m(k_2) = k_1$$

$$\therefore m(K) = K.$$

$\therefore$ por el lema todos los puntos de la récta t_1 determinada por 0 y K quedan fijos bajo m, e igual que antes m y S_{t_1} tienen las propiedades pedídas por el Axioma 11 $\therefore m = S_{t_1} = I$.

$$\therefore \ell_1 = m(\ell_2) = I(\ell_2) = \ell_2$$

lo cual es una contradicción.

L.Q.Q.D.

10. Propiedades acerca de los ángulos.

Propiedad 10.1. Supongamos que $(\widehat{\ell,\ell_1}) = (\widehat{\ell,\ell_2})$ entonces $\ell_1=\ell_2$.

Demostración. Como $(\widehat{\ell,\ell_1}) = (\widehat{\ell,\ell_2})$ existe $m\in M$ con $m(\ell) = \ell$ y $m(\ell_1) = \ell_2$, entonces $m(0) = 0$ y si P está en ℓ, $m(P)$ está en ℓ, pero $L[0,P] = L[0,m(P)]$ $\therefore$ como P y $m(P)$ están del mismo lado con respecto a 0 se obtiene $P = m(P)$ $\therefore$ si $P\in\ell$ $m(P) = P$, de igual manera si $P\in\ell'$ la recta complementaria de ℓ $m(P) = P$. En consecuencia si llamamos t a la recta determinada por ℓ, entonces para cada P en t: $m(P) = P$.

Consideremos ahora $S_t \circ m$ Tenemos lo sisguiente si $P\in t$ $S_t\circ m(0) = S_t(m(P)) = S_t(P) = P$

$L[S_t\circ m(A), S_t\circ m(B)] = L[m(A),m(B)] = L[A,B]$ y si ℓ_1 y ℓ_2 son semirrectas que se inician en P. $S_t m(\ell_1)$, $S_t m(\ell_2)$ son semirrectas que se inician en $S_t m(P)$ y además

$$(\widehat{S_t m(\ell_1),S_t m(\ell_2)}) = (\widehat{m(\ell_2), m(\ell_1)}) = (\widehat{\ell_2,\ell_1})$$

$S_t\circ m$ tiene las mismas propiedades que S_t $\therefore$ por la unicidad.

$$S_t\circ m = S_t \qquad S_t\circ S_t m = S_t\circ S_t = I$$

$$Im = I \qquad m = I$$

Así que $\ell_2 = m(\ell_1) = I(\ell_1) = \ell_1$

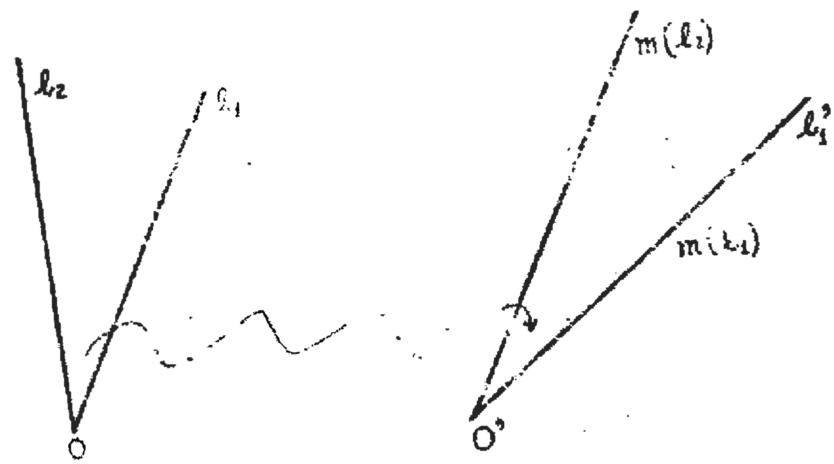
L.Q.Q.D.

Definición 10.1. Sean ℓ_1, ℓ_2 dos semirrectas que parten del punto 0 y ℓ_1' ,ℓ_2' otras dos semirrectas que parten de 0'.

diremos que

$$(\ell_1 \hat{,} \ell_2) < (\ell'_1 \hat{,} \ell'_2)$$

si existe $m \in M$ con $m(\ell_1) = \ell'_1$ y $m(\ell_2)$ está entre ℓ'_1 y ℓ'_2 .



<u>Propiedad 10.2.</u> <u>Si</u> $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) < (\ell'_1 \hat{,} \ell'_2)$ <u>entonces</u> $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) \neq (\ell'_1 \hat{,} \ell'_2)$.

En efecto, sea m tal que $m(\ell_1) = \ell'_1$ y $m(\ell_2)$ quede entre ℓ'_1 y ℓ'_2 , entonces si $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (\ell'_1 \hat{,} \ell'_2)$

$$(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (m(\ell_1) \hat{,} m(\ell_2)) = (\ell'_1 \hat{,} m(\ell_2)) = (\ell'_1 \hat{,} \ell'_2)$$

$\therefore$ por la proposición 7.1 $m(\ell_2) = \ell'_2$ lo cual no puede ser.

L.Q.Q.D.

<u>Propiedad 10.3.</u> <u>Sean</u> ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 <u>tres semirrectas que parten de</u> O, <u>entonces si</u> ℓ_3 <u>está entre</u> ℓ_1 <u>y</u> ℓ_2 <u>y</u> $m \in M$, $m(\ell_3)$ <u>está entre</u> $m(\ell_1)$ y $m(\ell_2)$.

<u>Demostración.</u> Si ℓ_3 está entre ℓ_1 y ℓ_2, entonces por definición hay una recta tal que corta a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en P_1, P_2, P_3 res

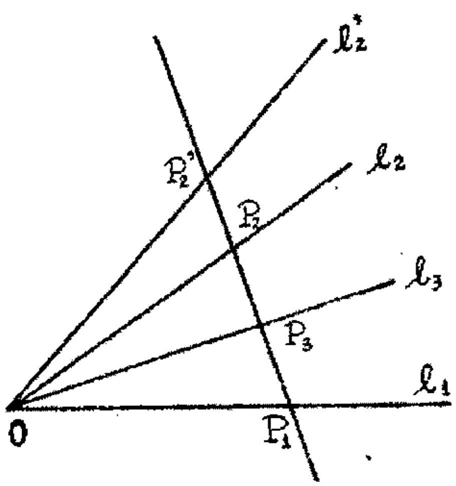
pectivamente y $P_3 \epsilon [P_1, P_2]$. Pero entonces $m(\ell_1)$, $m(\ell_2)$, $m(\ell_3)$ intersectan a $m(t)$ en $m(P_1)$, $m(P_2)$, $m(P_3)$ respectivamente y como $m[P_1, P_2] = [m(P_1), m(P_2)]$

y $P_3 \epsilon [P_1, P_2]$, entonces $m(P_3) \epsilon m[P_1, P_2] = [m(P_1), m(P_2)]$

$\therefore$ $m(\ell_3)$ está entre $m(\ell_1)$ y $m(\ell_2)$.

L.Q.Q.D

<u>Propiedad 10.4.</u> <u>Si</u> ℓ_3 <u>está entre</u> ℓ_1 <u>y</u> ℓ_2 <u>y</u> ℓ_2 está <u>entre</u> ℓ_1' y ℓ_2' <u>entonces</u> ℓ_3 está <u>entre</u> ℓ_1 <u>y</u> ℓ_2'



<u>Demostración.</u> Sean P_2' y P_1 dos puntos en ℓ_2' y ℓ_1 respectivamente $\neq 0$. Sea t la recta determinada por ellos, como ℓ_2 está entre ℓ_1 y ℓ_2', t intersecta a ℓ_2 en cierto punto P_2 con $P_2 \epsilon [P_1, P_2']$, como t pasa por P_2 que está en ℓ_2 y por P_1 que está en ℓ_1 y ℓ_3 está entre ℓ_1 y ℓ_3, t intersecta a ℓ_3 en cierto punto P_3 con $P_3 \epsilon [P_1, P_2]$ para cierto orden α de t.

$$P_1 \;\alpha\; P_3 \;\alpha\; P_2 \;\alpha\; P_2' \quad \therefore \; P_3 \epsilon [P_1, P_2']$$

L.Q.Q.D.

<u>Propiedad 10.5.</u> <u>Si</u> $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) < (\ell_1' \hat{,} \ell_2')$ <u>y</u> $(\ell_1' \hat{,} \ell_2') < (\ell_1'' \hat{,} \ell_2'')$ <u>entonces</u> $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) < (\ell_1'' \hat{,} \ell_2'')$.

<u>Demostración.</u> Como $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) < (\ell_1' \hat{,} \ell_2')$ existe por definición

$m_1 \epsilon M$, tal que $m_1(\ell_1) = \ell_1'$ y $m_1(\ell_2)$ está entre ℓ_1' y ℓ_2'. Como $(\widehat{\ell_1,\ell_2}) < (\widehat{\ell_1'',\ell_2''})$, existe por definición $m_2 \epsilon M$, tal que $m_2(\ell_1') = \ell_1''$ y $m_2(\ell_2')$ está entre ℓ_1'' y ℓ_2'' pero $m_2 \circ m_1 \epsilon M$ y $m_2 \circ m_1(\ell_1) = m_2(m_1(\ell_1)) = m_2(\ell_1') = \ell_1''$

Como $m_1(\ell_2)$ está entre ℓ_1' y ℓ_2'

$m_2 \circ m_1(\ell_2)$ $m_2(m_1(\ell_1))$ está entre $m_2(\ell_1') = \ell_1''$ y $m_2(\ell_2')$

por la propiedad 8.2, pero

$m_2(\ell_2')$ está entre ℓ_1'' y ℓ_2'',

$\therefore$ por la proposición 8.3

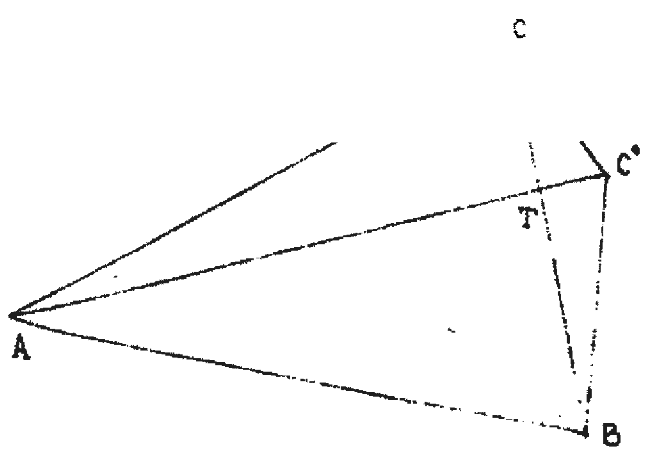
$m_2 \circ m_1(\ell_2)$ está entre ℓ_1'' y ℓ_2''

$\therefore (\widehat{\ell_1,\ell_2}) < (\widehat{\ell_1'',\ell_2''})$

L.Q.Q.D.

11. Más propiedades acerca de triángulos.

Definición. Sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tres semirretas, que parten del mismo punto P, diremos que ℓ_2 y ℓ_3 están del mismo lado con respecto a ℓ_1 si ℓ_2 (ó ℓ_3) está entre ℓ_1 y ℓ_3 (o entre ℓ_1 y ℓ_2)



Demostración. Podemos suponer que la semirrecta determinada por A y C' está entre las semirrectas determinadas por A y C y A y B, la recta determinada por C y B une dos puntos de estas dos últimas semirrectas intersecta a la semirrecta AC' en cierto punto T.

Hay dos casos:

i) $T \in [A, C']$ ii) $C' \in [A, T]$

examinemos el primer caso:

Como $L[A,C] = L[A,C']$ entonces

$$\widehat{ACC'} = \widehat{CC'A}$$

y como $L[B,C] = L[B,C']$, $\widehat{BCC'} = \widehat{CC'B}$ (1)

pero $\widehat{ACC'} > \widehat{BCC'}$ (porque la semirrecta determinada por C y T está entre la determinada por C y A y la determinada por C y C')

$$\therefore \widehat{CC'A} > \widehat{BCC'} \qquad (2)$$

y $\widehat{CC'B} > \widehat{CC'A}$ (3) (porque la semirrecta determinada por C' y A está entre los determinados por C' y C y C' y B)

$$\therefore \widehat{CC'A} > \widehat{CC'A}\text{ , por (8.4) (y de (2),(1) y (3))}$$

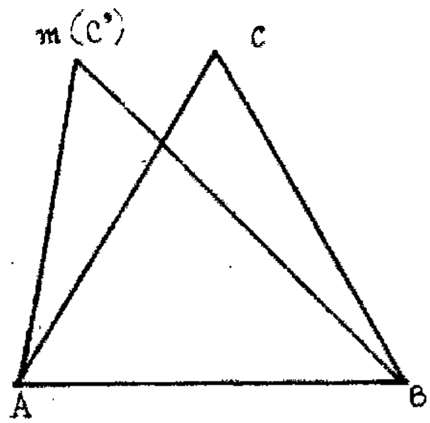
lo cual no puede ser por la propiedad (8.1).

$\therefore$ i) no puede ocurrir, entonces ocurre ii)

esto es $C' \in [A,T]$, peró de igual manera se vé que esto tampoco puede ocurrir $\therefore C = C'$

L.Q.Q.D.

<u>Proposición 6.</u> Sean ABC y A'B'C dos <u>triángulos tales que</u> $L[A,B] = L[A',B']$, $L[A,C] = L[A',C']$ y $L[B,C] = L[B',C']$, <u>entonces los dos triángulos</u> son <u>iguales.</u>



Demostracion. Como $L[A,B] = L[A',B']$, existe por definición $m \in M$ con $m[A',B'] = [A,B]$ así -- que $m(A') = A$, $m(B') = B$. Ahora bien $m(C')$ cae del mismo lado que C con respecto a la recta determinada por A y B o del lado - contrario si ocurre lo primero, entonces por la propiedad anterior $m(C') = C$. Si al lado contrario, $S_\ell m(C')$ cae del mismo lado que C y aplicando otra vez la - propiedad anterior al triángulo $S_\ell m(A')\ S_\ell m(B')\ S_\ell m(C")$ tenemos que $S_\ell m(C') = C$ $\therefore$ los dos triángulos son iguales.

L.Q.Q.D.

Propiedad 11.4. Sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tres semirrectas que parten de P y análogamente sean ℓ_1', ℓ_2', ℓ_3' tres semirrectas partiendo de P', entonces si $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (\ell_1' \hat{,} \ell_2')$ y $(\ell_2 \hat{,} \ell_3) = (\ell_2' \hat{,} \ell_3')$ se tiene - $(\ell_1 \hat{,} \ell_3) = (\ell_1' \hat{,} \ell_3')$.

También si $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (\ell_2' \hat{,} \ell_1')$ y $(\ell_2 \hat{,} \ell_3) = (\ell_3' \hat{,} \ell_2')$ entonces

$$(\ell_1 \hat{,} \ell_3) = (\ell_3' \hat{,} \ell_1').$$

Demostración. Como $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (\ell_1' \hat{,} \ell_2')$, existe $m \in M$ tal que $m(\ell_1) = \ell_1'$ y $m(\ell_2) = \ell_2'$ (por definición), pero

$$(\ell_2' \hat{,}\ m(\ell_3)) = (m(\ell_2) \hat{,} m(\ell_3)) = (\ell_2 \hat{,} \ell_3) = (\ell_2' \hat{,} \ell_3')$$ (por hipotesis).

$\therefore$ por la propiedad 7.1 $m(\ell_3) = \ell_3'$

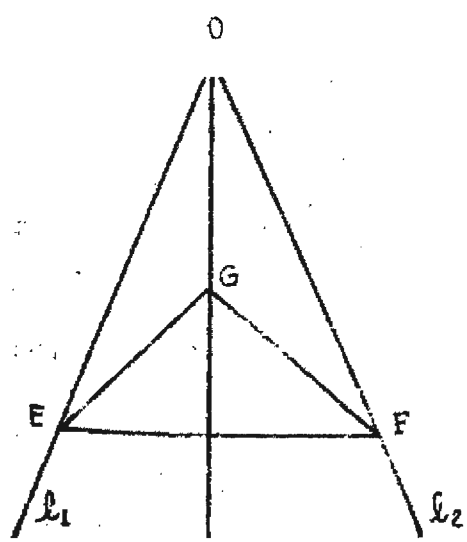
Así que $(\ell_1 \hat{,} \ell_3) = (\ell_1' \hat{,} \ell_3')$

L.Q.Q.D.

Una observación cuidadosa.

Hemos dicho anteriormente que dos tirángulos ABC y A'B'C' son iguales si existe un movimiento $m \in M$, tal que $m(A)=A'$, $m(B)=B'$ y $m(C)=C'$. Ahora bien según se vió en la proposición 4 existen casos en que existe una transformación S_ℓ tal que $S_\ell(A)=A'$ - - $S_\ell(B)=B'$, $S_\ell(C)=C'$, desde luego aquí $S_\ell \in M$ (*¿por qué?*), sin embar bargo $L[A,B]=L[A',B']$, $L[A,C]=L[A',C']$ y $L[B,C]=L[B',C']$ además $A\hat{B}C = C'\hat{B}'A'$ $B\hat{C}A = A'\hat{C}'B'$ $C\hat{A}B = B'\hat{A}'C'$, en cualquier caso, sin embargo, diremos que los dos triángulos son iguales; en caso de que se deba tener precisión diremos iguales en el sentido estricto si son iguales en el sentido de la definición.

Proposición 7. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos semirrectas que parten de 0, tales que no sean complementarias, existe entonces una semirrecta t partiendo de 0, de suerte tal que $(\widehat{\ell_1,t}) = (\widehat{t,\ell_2})$. En tal caso diremos que la semirrecta t biseca al ángulo formado por ℓ_1 y ℓ_2.



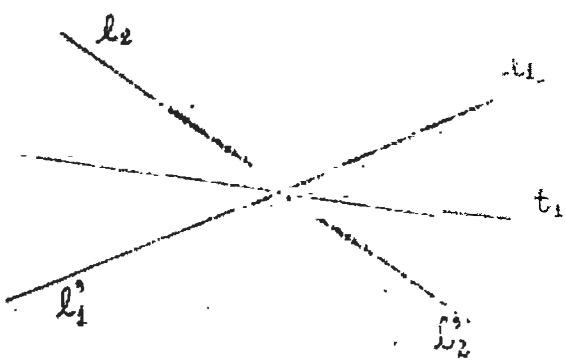
Demostración. Sea E un punto $\neq 0$ sobre ℓ_1. Con centro en 0 tracemos en círculo de radio - igual a $L[0,E]$, este círculo - por el Axioma 5 intersecta a - ℓ_2 en un punto F. Sobre $[E,F]$ construyamos un triángulo equilátero de manera tal que $G \neq 0$. Si G fu se igual a 0 tomamos el $S_t(0)FE$, en donde t es determinada por E y F; como 0 ≠

está en T, $S_t(0) \neq 0$. Así que podemos suponer $G \neq 0$. Tracemos la recta determinad a por G y 0. Entonces los triángulos 0EG y 0FG son tales que $L[0,E] = L[0,F]$, $L[E,G] = L[F,G]$, $L[0,G] = L[0,G]$. Además si t' designa a la recta determinada por 0 y G - uno es imagen del otro por medio de $S_{t'}$ $\therefore$

$\widehat{E0G} = \widehat{G0F}$ $\therefore$ la recta t' cumple las condiciones de la proposición.

L.Q.Q.D.

Proposición 8. Consideremos dos rectas m_1 y m_2 que se intersecta en un punto 0. Sean ℓ_1 y ℓ_1' las dos semirrectas en m_1, determinados por 0 en m_1 y ℓ_2, ℓ_2' aquellas determinadas en m_2. Entonces $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (\ell_1' \hat{,} \ell_2')$.

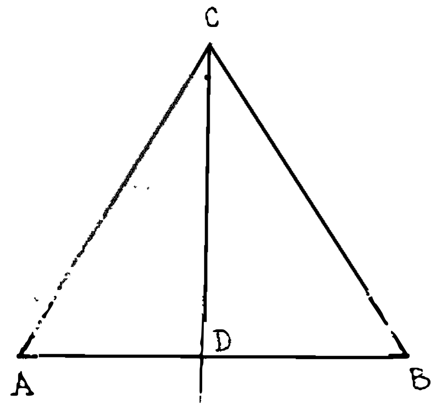


Demostración. Sea t_1 la semirrecta que pasa por 0 y que biseca el ángulo determinado por ℓ_2' y ℓ_1. Sea t la recta determinada por t_1. Entonces como $(\ell_2' \hat{,} t_1) = (t_1 \hat{,} \ell_1)$ y $(t_1 \hat{,} \ell_1) = (S_t(\ell_1) \hat{,} t_1)$ tenemos por la propiedad 10.1 que $S_t(\ell_1) = \ell_2'$ $\therefore$ $S_t(m_1) = m_2$ $\therefore$ $S_t(\ell_1) = \ell_2$ $\therefore$ $\ell_1 = S_t(\ell_2)$. En vista de lo cual obtenemos $(\ell_1, \ell_2) = (S_t(\ell_2) \hat{,} S_t(\ell_1)) = (\ell_1' \hat{,} \ell_2')$

L.Q.Q.D.

Proposición 9. Dado cualquier segmento de recta $[A,B]$ podemos encontrar P en $[A,B]$, tal que $L[A,P] = L[P,B]$.

Demostración. Sobre el segmento de recta $[A,B]$ construyamos en triángulo equilátero ABC



Consideremos el ángulo ACB, entonces por la proposicion podemos encontrar una semirrecta t partiendo de C que biseca el ángulo ACB, como t está entre CA y CB, corta al segmento $[A,B]$ en un punto D en $[A,B]$, entonces si nos fijamos en los triángulos ACD y tenemos $L[A,C]=L[C,B]$ y $L[C,D]=L[C,D]$ y como ACD = DCB tenemos por la proposición 4 que los triángulos ACD y DCB son iguales $L[A,D] = L[D,B]$ L.Q.Q.D.

Proposición 10. Sea ℓ una recta dada y 0 un punto en ℓ_1 tonces podemos encontrar una recta t que pase por 0 de manera que si ℓ_1 y ℓ_2 son las semirrectas determinadas por 0 en ℓ y t_1, las determinadas por 0 en t, tenemos:

$$(\widehat{\ell_1,t_1}) = (\widehat{t_1,\ell_2}) \qquad (\widehat{\ell_1,t_2}) = (\widehat{t_2,\ell_2})$$

Demostración. Sea $P\neq 0$ en ℓ y sea P' un punto con $0\in[P',P]$ y $L[P',0] = L[P,0]$ (Axioma 5). Sobre $[P,P']$ tracemos un triángu equilátero TPP', entonces si t_1 es la semirrecta que parte de 0 pasa por T y P está en ℓ_1 y P' en ℓ_2 se tiene que $(\ell_2,t) = (t,\ell_1$
En efecto los triángulos TP0 y T0P' son tales que

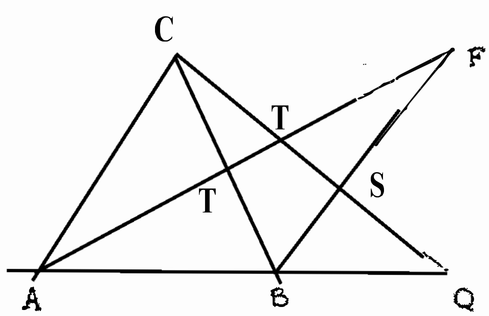
$$L[P,T] = L[P',T] \qquad L[P,0] = L[0,P']$$

$$y\ L[T,0] = L[T,0]$$

y los lados determinados por 0P y 0P' están en lados distintos respecto a OT $\therefore$ $P'\hat{O}T = T\hat{O}P$ por la proposición 6.

L.Q.Q.D.

Proposición 11. Sea ABC un triángulo arbitrario, entonces cualquier ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores opuestos.



Demostración. Sea E el punto medio de $[C,B]$ y F un punto sobre la recta determinada por A y E tal que $L[A,E] = L[E,F]$.

Sea $T\epsilon[E,F]$,tal que la recta determinada por C y T corte a la recta determinada por A y B en un punto Q, entonces si ℓ es la recta determinada por C y B, $T\epsilon C_\ell(F)$ A está del lado contrario de F con respecto a ℓ. Además $Q\notin C_\ell(A)$ $\therefore$ por la propiedad 8.2: $Q\epsilon C_\ell(F)$ .. $T \sim_\ell Q$ $[T,Q]$ no intersecta a ℓ .. T y Q está del mismo lado con respecto aC, por lo tanto Q está en la semirrecta que parte de C y pasa por T. Fijémonos en las semirrectas que parten de C y pasan por F, T y E, éstas cortan a la recta determinada por A y E en F, T y E $\therefore$ la semirrecta que pasa por T está entre las otras dos porque $T\epsilon[E,F]$ pero la recta determinada por B y F une a la primera y a la tercera, así que por 7.4 la recta determinada por B y F intersecta a la determinada por C y T en cierto punto S con $S\epsilon[B,F]$.

Consideremos ahora las semirrectas que parten de F y pasan por

T, S y Q éstas intersectan a la recta determinada por C y Q en T, S, Q respectivamente y a la recta determinada por A y B en A,B y Q entonces como $B\in[A,Q]$, $S\in[T,Q]$ (Axioma 11) $\therefore$ la semirrecta que parte de B y pasa por F se halla entre las que parten de B y pasan por C y Q.

$$\therefore\ \widehat{FBE} < \widehat{QBE}$$

Consideremos ahora los triángulos ACE y EFB tenemos que

$$L[C,E] = L[E,B] \text{ (por construcción)}$$

y

$$L[A,E] = L[E,F] \text{ (por construcción)}$$

Además $\widehat{BEF} = \widehat{CEA}$ $\therefore$ por la proposición 4 los dos triángulos AEC y FEB son iguales de donde $\widehat{FBE} = \widehat{ACE}$

Así que

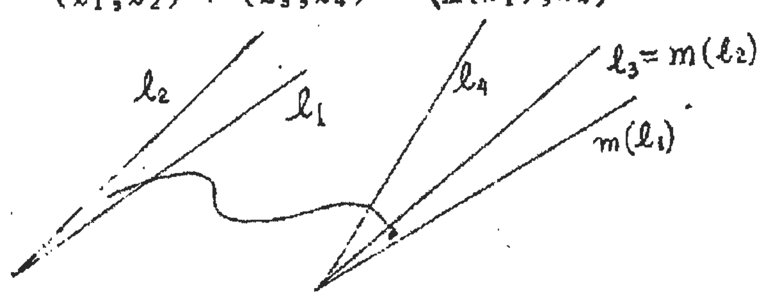
$$\widehat{ACE} < \widehat{QBE}$$

L.Q.Q.D.

12. <u>Sumas de ángulos.</u>

<u>Definición.</u> Sean ℓ_1, ℓ_2 dos semirrectas que parten de 0 y ℓ_3, ℓ_4 semirrectas que parten de 0'. Sea $m\in M$, tal que $m(\ell_2)=\ell_3$, entonces consideremos las semirrectas que parten de 0': $m(\ell_1)$ y ℓ y pondremos

$$(\widehat{\ell_1,\ell_2}) + (\widehat{\ell_3,\ell_4}) = (\widehat{m(\ell_1),\ell_4})$$



Observación. La semirrecta $m(\ell_1)$ no depende de la m escogida, tal que $m(\ell_2) = \ell_3$. En efecto sea otra m' tal que $m'(\ell_2) = \ell_3$, entonces consideremos $m' \circ m^{-1}$, tenemos

$$m' \circ m^{-1}(\ell_3) = m'(\ell_2) = \ell_3$$

$m' \circ m^{-1}(m(\ell_1)) = m'(\ell_1)$. Así que

$$(\ell_3, \widehat{m(\ell_1)}) = (m' \circ m^{-1}(\ell_3), \widehat{\ } \; m' \circ m^{-1}(\ell_1))$$

$$= (\ell_3, m'(\ell_1))$$

$\therefore \quad m(\ell_1) = m'(\ell_1)$, por 10.2

Proposición 12.1 $(\ell_1 \widehat{,} \ell_2) + (\ell_2 \widehat{,} \ell_3) = (\ell_1 \widehat{,} \ell_3)$

Propiedad 12.2 Si m es un movimiento tal que $m(\ell_1) = \ell_2$, entonces

$$(\ell_1 \widehat{,} \ell_2) + (\ell_2, \widehat{m(\ell_4)}) = (\ell_1, \widehat{m(\ell_4)})$$

$$= (\ell_1 \widehat{,} \ell_2) + (\ell_3 \widehat{,} \ell_4)$$

Demostración.

m^{-1} es tal que $m^{-1}(\ell_2) = \ell_3$ $\therefore$ por definición

$$(\ell_1, \ell_2) + (\ell_3, \ell_4) = (m^{-1}(\widehat{\ell_1}), \ell_4)$$

Propiedad 12.3. Si $(\ell_1, \ell_2) = (\ell_1', \ell_2')$

$$(\ell_3 \widehat{,} \ell_4) = (\ell_3', \ell_4'),$$

entonces

$$(\ell_1 \widehat{,} \ell_2) + (\ell_3 \widehat{,} \ell_4) = (\ell_1' \widehat{,} \ell_2') + (\ell_2' \widehat{,} \ell_4')$$

Demostración. Como $(\ell_1 \hat{,} \ell_2) = (\ell_1' \hat{,} \ell_2')$, existe $m_1 \in M$ con $m_1(\ell_1) = \ell_1'$ $m_1(\ell_2) = \ell_2'$ y como

$(\ell_3 \hat{,} \ell_4) = (\ell_3', \ell_4')$, existe $m_2 \in M$ con

$$m_2(\ell_3) = \ell_3', m_2(\ell_4) = \ell_4'$$

Ahora sea m tal que $m(\ell_2) = \ell_3$, entonces

$$(\ell_1 \hat{,} \ell_2) + (\ell_3 \hat{,} \ell_4) = (m(\ell_1) \hat{,} \ell_4)$$

Consideremos $m_2 m\, m_1^{-1} \in M$, tenemos entonces

$$m_2 m\, m_1^{-1}(\ell_2') = m_2 m(m_1^{-1}(\ell_2'))$$

$$= m_2 \circ m(\ell_2) = m_2(m(\ell_2))$$

$$= m_2(\ell_3) = \ell_3'$$

.. por definición

$$(\ell_1' \hat{,} \ell_2') + (\ell_3' \hat{,} \ell_4') = (m_2 m\, m_1^{-1}(\ell_1'), \ell_4'),$$

pero

$$(m_2 m\, m_1^{-1}(\ell_1') \hat{,} \ell_4') = (m_2^{-1}(m_2 \hat{m}\, m_1^{-1})\ (\ell_1'),\ m_2^{-1}(\ell_4'))$$

$$= (m m_1^{-1} \hat{(}\ell_1'), \ell_4) = (m\,(m^{-}{}_1{}^{1}(\ell_1')) \hat{,}, \ell_4) = (m(\ell_1)\ , \ell_4)$$

$$= (\ell_1, \ell_2) + (\ell_3, \ell_4)$$

L.Q.Q.D.

Propiedad 12.4. Sean $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$, pares de semirrecta que parten respectivamente de O_1, O_2 y O_3 entonces:

$$[(\ell_1 \hat{+} \ell_2) + (\ell_3 \hat{,} \ell_4)] + (\ell_5 \hat{,} \ell_6) = (\ell_1 \hat{,} \ell_2) + [(\ell_3 \tilde{,} \ell_4) + (\ell_5 \hat{,} \ell_6)]$$

Demostración: Sea $m_1 \in M$ con $m_1(\ell_2) = \ell_3$ y $m_2 \in M$ con $m_2(\ell_4) = \ell$

entonces

$$(\ell_1\hat{,}\ell_2) = (m_1(\ell_1)\hat{,}m_1(\ell_2)) = (m_1(\ell_1)\hat{,}\ell_3)$$

$$(\ell_3\hat{,}\ell_4) = (m_2(\ell_3)\hat{,}m_2(\ell_4)) = (m_2(\ell_3)\hat{,}\ell_5)$$

Así que:

$$[(\ell_1\hat{,}\ell_2) + (\ell_3\hat{,}\ell_4)] + (\ell_5\hat{,}\ell_6) = (m_1(\ell_1)\hat{,}\ell_4) + (\ell_5\hat{,}\ell_6)$$

$$= (m_2 m_1(\ell_1)\hat{,}\ell_6)$$

y

$$(\ell_1\hat{,}\ell_2) + [(\ell_3\hat{,}\ell_4) + (\ell_5\hat{,}\ell_6)]$$

$= (\ell_1\hat{,}\ell_2) + (m_2(\ell_3)\hat{,}\ell_6)$ como $m_1(\ell_2) = \ell_3$

$$m_2(m_1(\ell_2)) = m_2(\ell_3)$$

$$\therefore$$

$$(\ell_1\hat{,}\ell_2) + (m_2(\ell_3)\hat{,}\ell_6) = (m_2 \circ m_1(\ell_1)\hat{,}\ell_6)$$

$$\therefore [(\ell_1\hat{,}\ell_2) + (\ell_3\hat{,}\ell_4)] + (\ell_5\hat{,}\ell_6)$$

$$= (\ell_1\hat{,}\ell_2) + [(\ell_3\hat{,}\ell_4) + (\ell_5\hat{,}\ell_6)]$$

L.Q.Q.D.

Propiedad 12.5. Si ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 son semirrectas que parten de 0 entonces

$$(\ell_1\hat{,}\ell_2) + (\ell_2\hat{,}\ell_3) = (\ell_2\hat{,}\ell_3) + (\ell_1\hat{,}\ell_2)$$

Demostración. Sea ℓ la recta determinada por ℓ_1 y S_ℓ la simetría con respecto a esta recta, tenemos entonces:

$(\ell_1,\ell_2) = (S_\ell(\ell_2), S_\ell(\ell_1))$

$(\ell_2\hat{,}\ell_3) = (S_\ell(\ell_3)\hat{,} S_\ell(\ell_2))$

entonces por definición

$$(S_\ell(\ell_3) \hat{,} S_\ell(\ell_2)) + (S_\ell(\ell_2)\hat{,}S_\ell(\ell_1)) = (S_\ell(\ell_3),S(\ell_1)) = (\ell_1\hat{,}\ell_3)$$

así que por 12.3

$$(\ell_2\hat{,}\ell_3) + (\ell_1\hat{,}\ell_2) = (\ell_1\hat{,}\ell_3) = (\ell_1\hat{,}\ell_2) + (\ell_2\hat{,}\ell_3)$$

<u>Proposición 12.6 Si</u> ℓ_1,ℓ_2 <u>son semirrectas que se inician en</u> 0 <u>y</u> ℓ_3,ℓ_4 <u>semirrectas que</u> se <u>inician en</u> 0', <u>tenemos:</u>

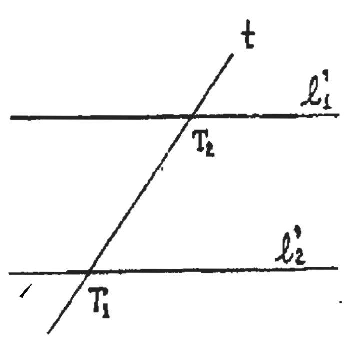
$$(\ell_1\hat{,}\ell_2) + (\ell_3\hat{,}\ell_4) = (\ell_3\hat{,}\ell_4) + (\ell_1\hat{,}\ell_2)$$

<u>Demostración.</u> Sea $m \in M$ con $m(\ell_2) = \ell_3$ entonces

$$\begin{aligned}(\ell_1\hat{,}\ell_2) + (\ell_3\hat{,}\ell_4) &= (m(\ell_1)\hat{,} m(\ell_2)) + (\ell_3\hat{,}\ell_4) \\ &= (\ell_3\hat{,}\ell_4) + (m(\ell_1)\hat{,}m(\ell_2)) \text{ por } 12.5 \\ &= (\ell_3\hat{,}\ell_4) + (\ell_1\hat{,}\ell_2) \quad \text{por } 12.3.\end{aligned}$$

L.Q.Q.D.

13. <u>Paralelismo</u>



Sean dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 y una tercera t que las corta en T_1 T_2 respectivamente. Entonces T_1 determina en ℓ_1 dos semirrectas ℓ_1' y ℓ_1''. Análogamente T_2 determinará en ℓ_2 dos semirrectas ℓ_2' y ℓ_2''.

Definición 13.1. Si ℓ_1' y ℓ_2' están del mismo lado con respecto a t diremos que ℓ_1 y ℓ_2 son rectas correspondientes.

Definición 13.2. En t consideremos la semirrecta t_1 que parte de T_1 y pasa por T_2, ahora por t_2 denotaremos aquella semirrecta que pasa por T_2 y está contenida en la semirrecta t_1. Entonces los ángulos $(\widehat{\ell_2', t_1})$ y (ℓ_1', t_2) se llamarán correspondientes, y los ángulos $(\widehat{\ell_2, t_1})$ y $(\widehat{\ell_1'', t_2'})$ (en donde t' es la recta complementaria de t_2) se llamarán alternos internos.

Proposición 13. Con las notaciones anteriores; si $(\widehat{\ell_1', t_2}) = (\widehat{\ell_2', t_1})$ entonces las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas (En otras palabras si ángulos correspondientes son iguales $\ell_1 || \ell_2$).

Demostración. Como $(\widehat{\ell_1', \ell_1''}) = (\widehat{\ell_2', \ell_2''})$

y

$$(\widehat{\ell_1', t_2}) = (\widehat{\ell_2', t_1})$$

entonces

$$(\widehat{t_2, \ell_1''}) = (\widehat{t_1, \ell_2''}) \quad \text{por la propiedad 11.4}$$

Si ℓ_1 y ℓ_2 no fuesen paralelas se intersectarían en algún punto P fuera de t. Por la propiedad 8.3, P está del mismo lado que ℓ_1' o está del mismo lado que ℓ_1''. Si ocurre lo primero P está en ℓ_1' $\therefore$ P está en ℓ_2' $\therefore$ las semirrectas ℓ_1' y ℓ_2' se intersectarían en P. Consideremos el triángulo $T_1 T_2 P$. Entonces un ángulo externo es el ángulo $(\widehat{\ell_1', t_2})$ y un ángulo interno opuesto sería (ℓ_2', t_1) $\therefore$ por la proposición 12 $(\widehat{\ell_1, t_2}) > (\widehat{\ell_2, t_1})$ pero por hipótesis

$$(\widehat{\ell_1', t_2}) = (\widehat{\ell_2', t_1})$$

$\therefore$ por la propiedad 10.2 esto no puede ocurrir $\therefore$ P no está del lado de ℓ_1', un razonamiento completamente análogo probará que P tampoco puede estar del lado de ℓ_1''. Así que P no puede existir $\therefore$ ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas

L.Q.Q.D.

Proposición 14. Con las notaciones anteriores si ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas entonces

$$(\widehat{\ell_2', t_1}) = (\widehat{\ell_1', t_2})$$

$$(\ell_2', t_1) = (\ell_1'', t_2')$$

Esto es si ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas entonces los ángulos correspondientes que se forman con t son iguales, y los angulos alternos internos también son iguales.

Demostración. Sea T el punto medio de $[T_1, T_2]$ (Proposición 10). Así que $L[T_1, T] = L[T, T_2]$ por lo tanto existe $m \in M$ con $m(T_1) = T$ y $m(T) = T_2$ Tenemos para cierto orden de t

$$T_1 \alpha T \alpha T_2$$

m transforma la semirrecta que parte de T_1 y pasa por T en la semirrecta que parte de T y pasa por T_2

$$L[T_2, T] = L[T_1, T] = L[m(T_1), m(T)]$$

$$= L[m^2(T_1), m^2(T)] = L[T_2, m^2(T_1)]$$

$\therefore$ $m^2(T) = T$ ó $T_2 \alpha\, m^2(T)$ (Axioma 5)

Si $m^2(T)=T$, $m^2(T) = m(T_1)$ $\therefore$ $m(T) = T_1$

$\therefore$ $T_2 = T_1$ lo cual no puede ser $\therefore$ $T_2 \alpha\, m^2(T)$

$\therefore$ m^2 aplica t_1 en t_2.

Sean P y P' a lados opuestos de t, si $m(C_\ell(P))=C_\ell(P)$ entonces $m^2(C_\ell(P)) = C_\ell(P)$, si $m(C_\ell(P))=C_\ell(P')$ entonces $m^2(C_\ell(P)) = m(C_\ell(P')) = C_\ell(P)$ $\therefore$ P y $m^2(P)$ siempre están del mismo lado con respecto a t $\therefore$ ℓ_1' y $m^2(\ell_1')$ están del mismo lado con respecto a t y

$$(\widehat{\ell_1',t_1}) = (\widehat{m^2(\ell_1'), m^2(t_1)}) = (\widehat{m^2(\ell_1'), t_2})$$

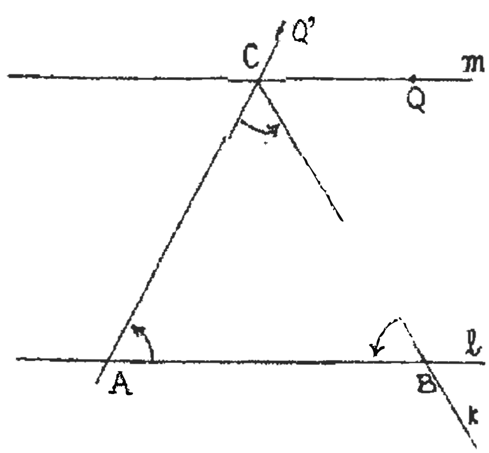
$\therefore$ ℓ_1 y $m^2(\ell_1)$ son paralelas

$\therefore$ $m^2(\ell_1) = \ell_2$ y el teorema queda probado.

<u>Proposición 15.</u> <u>Sea</u> ABC <u>un</u> <u>triángulo, entonces</u>

$$\widehat{CAB} + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 2 \text{ rectos.}$$

<u>Demostración.</u> Sea ℓ la recta determinada por A y B. Entonces por C tracemos una recta m paralela a ℓ, sea t la recta determinada por A y C, sea k la recta determinada por B y C. Sea Q un punto sobre m que esté del lado contrario a A con respecto a k y Q' colocado en el lado contrario de A con respecto a m así tenemos lo siguiente.



$\widehat{CAB} = \widehat{Q'CQ}$ por ángulos correspondientes

$\widehat{ABC} = \widehat{QCB}$

$\therefore \widehat{CAB} + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} =$

$= \widehat{BCA} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC}$

$= \widehat{BCA} + \widehat{Q'CB}$

$= \widehat{Q'CB} + \widehat{BCA} = \widehat{Q'CA} = 2$ rectas

L.Q.Q.D.

CAPITULO II

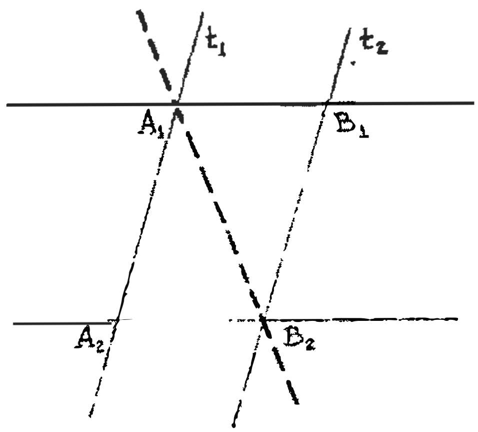
(Construcción de los números reales)

1. Las traslaciones. Deseamos ahora describir con precisión ciertas transformaciones pertenecientes a M, éstas intuitivamente corresponden a lo que comúnmente llamamos una traslación. ¿Qué propiedades debería de cumplir un movimiento, para que corresponda a nuestro concepto intuitivo de traslación?. Supongamos así que el plano transparente lo trasladamos. Entonces, si P es un punto del plano transparente, durante el movimiento describirá una línea recta. Y cualquier otro punto describiría también otra línea recta paralela a la descrita por P. Y si consideramos la transformación inducida por este movimiento, la recta descrita por P, la transformación la aplica en sí misma. También si ℓ' es cualquier recta su imagen es paralela a ℓ' o igual a ℓ'. Otra característica de la traslación es que a todos los puntos los mueve. Así, en primer lugar vemos que tales traslaciones efectivamente existen.

Proposición 1. Sean ℓ_1, ℓ_2 dos rectas paralelas y t_1, t_2 otras dos paralelas de manera tal que ℓ_1 intersecta a t_1 y t_2 en A_1, B_1 y ℓ_2 intersecta a t_2 en A_2, B_2 respectivamente. Entonces $L[A_2,B_2] = L[A_1, B_1]$ y $L[A_1,A_2] = L[B_1,B_2]$.

<u>Demostración.</u> Consideremos los triángulos $A_1A_2B_2$ y $A_1B_2B_1$ entonces tenemos lo siguiente:

$$B_2\hat{A}_1A_2 = A_1B_2B_1 \text{ (Alternos internos)}$$



$$A_2\hat{B}_2A_1 = B_1\hat{A}_1B_2$$

por consiguiente los triángulos $B_1A_1B_2$ y $A_2B_2A_1$ son iguales (Prop. Cap. I),

$$L[B_1,A_1] = L[B_2,A_2] \text{ y}$$

$$L[A_2,A_1] = L[B_2,B_1]$$

L.Q.Q.D.

Sea dada una recta ℓ, y dos puntos distintos A y B sobre ℓ . Como se vió en la demostración de la proposición 13 Cap. I. Existe una $m \in M$, tal que

i) $m(A) = B$

ii) A la semirrecta que parte de A y pasa por B, m la aplica en la semirrecta que pasa por B y está contenida en la semirrecta anterior.

iii) $m = m_1^2$ con m_1 en M

<u>Lema.</u> Sea α el orden de ℓ, tal que $A \,\alpha\, B$, entonces si P está en ℓ: $P \,\alpha\, m(P)$.

Demostración. Sea P en ℓ ocurren dos casos

$$\text{i)}\quad P\,\alpha\,A \qquad\qquad \text{ii)}\quad A\,\alpha\,P$$

Si ocurre el primero y $m(P)\,\alpha\,P$ entonces

$$m(P)\,\alpha\,P\,\alpha\,A\,\alpha\,B$$

$$L[m(P),B] > L[P,A]$$

pero por otra parte $L[m(P),\, m(A)] = L[P,A]$, lo cual no puede . .

$$P\alpha m(P)$$

Si $A\alpha P$ todavía pueden ocurrir dos casos:

a) $A\alpha P a B$ b) $B\alpha P$

en el primer caso P está en ℓ_1 y $m(P)$ está en $m(\ell_1)$ pero por

$$\text{ii)}\quad m(\ell_1) = \{Q\in\ell \mid B\alpha Q\} \qquad\qquad B\alpha m(P)$$

$$\therefore P\alpha m(P)$$

b) Si $m(P)\alpha P$ entonces, como $A\alpha P$:

$$B\alpha m(P),$$

por lo tanto

$$L[B,m(P)] < L[B,P] < L[A,P], \text{ pero}$$

$$L[B,m(P)] = L[m(A),m(P)] = L[A,P]$$

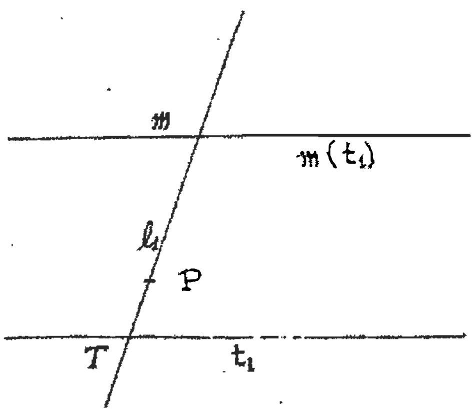
lo cual no puede ser

$$m(P)\,\alpha\,P$$

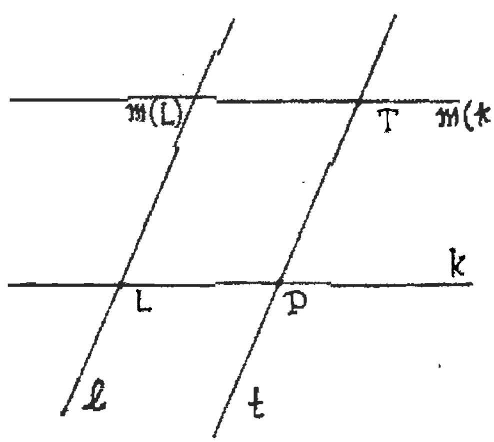
L.Q.Q. D.

Ahora usando el lema caracterizaremos la transformación que cumplen con i) ii) y iii) de otra forma y veremos que corresponden a nuestra idea intuitiva de traslación.

En primer lugar si t es una recta que intersecta a ℓ_1 en T, entonces m(t) es paralela a t. En efecto, si t_1 es una semirrecta determinada por T, $m(t_1)$ es una semirrecta determinada por m(T).



Sea ℓ_1 la semirrecta en ℓ que parte de T y pasa por m(T). Entonces si $P \neq T$ y P está en ℓ_1, m(P) también está en ℓ_1 (por el lema) $\therefore$ $m(\ell_1) \subset \ell_1$ pero $(t_1 \hat{,} \ell_1) = (m(t_1) \hat{,} m(\ell_1))$ $\therefore$ t y m(t) son paralelas (proposición 13 Capítulo I). Consideremos a t una recta paralela a ℓ, y L un punto sobre ℓ, sea k la recta determinada por L y P, entonces $m(k) \| k$ y esta recta pasa por m(L). Sea T la intersección de con m(k). Entonces por la Prop. 1.



$$L[m(L),T] = L[L,P].$$

Por otra parte m(P) se encuentra en m(k).

Además P y m(P) están del mismo lado con respecto a ℓ; T y P también se encuentran del mismo lado con respecto a ℓ, por lo tanto

$m(P)$ y T se encuentran del mismo lado con respecto a L, por lo tanto $m(P)$ y T se encuentran del mismo lado con respecto a $m(L)$, pero

$$L[m(L),m(P)] = L[L,P]$$

$$\therefore \quad L[m(L),T] = L[m(L),m(P)]$$

$$\therefore \quad T = m(P)$$

Así, si P está en t $m(P)$ está en t, por consiguiente si $t||\ell$ entonces $m(t) = t$.

Además se puede ver que $m(P)\neq P$ para toda P en el plano. En efecto si $m(P)=P$ para un punto P del plano, consideremos una recta t que pase por P e intersecte a ℓ en un punto T, entonces $m(t)$ es paralela a t pero como $P=m(P)$ está en $m(t)$ entonces $m(t)=t$.

Así $m(T)$ está en ℓ y en $m(t) = t$ $\therefore$ $m(T) = T$. Y como cualquie punto de ℓ puede unirse a P por medio de una recta se tiene que $m(T)=T$ pasa todo punto T del plano, salvo quizá para la recta que pasa por P y es paralela a ℓ. Pero tomando un punto T no en esta recta como P podemos ver que todos los puntos de esta recta quedan también fijos $\therefore$ $m=I$, lo cual no puede ser ya que $m(A) = B$ y $A\neq B$. Así que m tiene las siguientes propiedades:

i) $m(A) = B$

ii) Si $m(\ell) = \ell$ y $\ell'||\ell$ entonces $m(\ell') = \ell$ (ℓ la recta determinada por A y B)

iii) $m(P)\neq P$ para cualquier P

iv) $t||m(t)$ ó $t=m(t)$

Definición. A una transformación que satisfaga ii) – iv) le llamaremos una traslación, y a las rectas ℓ tales que $m(\ell)=\ell$ les llamaremos trazas de la transformación, a I, aunque no satisface las propiedades anteriores la llamaremos una traslación.

Proposición 2. Si m es una traslación, las trazas es la familia de rectas paralelas a la recta determinada por A y m(A), en donde A es cualquier punto del plano.

Demostración. Sea A un punto cualquiera del plano, sea ℓ la recta determinada por A y m(A), entonces por iv) $\ell \| m(\ell)$ ó $\ell=m(\ell)$, pero m(A) está en ℓ y en $m(\ell)$, por tanto $\ell=m(\ell)$.

Ahora sea ℓ_1 una recta con $m(\ell_1)=\ell_1$, sea B en ℓ_1, entonces sea ℓ_2 la paralela a ℓ que pasa por B, tenemos por ii) que $m(\ell_2)=\ell_2$ $\therefore$ m(B) está en ℓ_2 $\therefore$ $\ell_2=\ell_1$.

Proposición 3. Sea m una traslación, entonces si para algún punto P y una orden α en una recta ℓ se tiene $P\alpha m(P)$, entonces para toda Q en ℓ $Q\alpha m(Q)$.

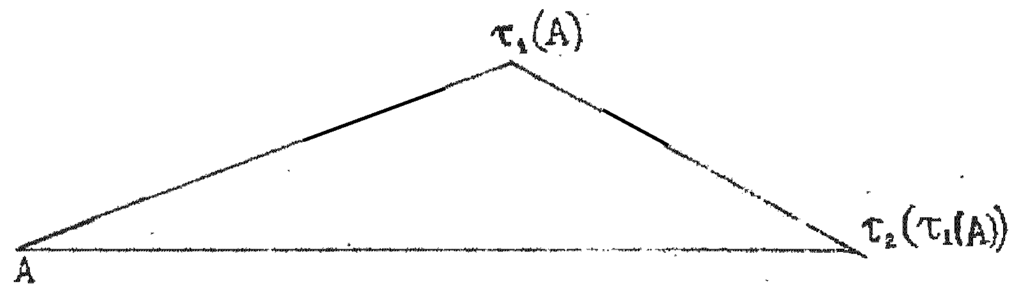
Demostración. Ver la demostración del lema.

Proposición 4. Si τ_1 y τ_2 son traslaciones $\tau_2\circ\tau_1$ es también una traslación.

Demostración. Como τ_1 y $\tau_2 \in M$ entonces también $\tau_2\circ\tau_1 \in M$. Si τ_1 ó $\tau_2=I$ la conclusión es inmediata. Ahora bien si $\tau_2\circ\tau_1=I$, como I es una traslación, tendremos probada la proposición.

Podemos suponer que $\tau_2\circ\tau_1\neq I$.

Caso i) las trazas de τ_2 y τ_1 son distintas. Sea entonces $A \in P$ $\tau_1(A) \neq A$. Consideremos la recta ℓ_1 determinada por A y $\tau_1(A)$, esta recta es traza de τ_1, ahora bien consideremos $\tau_2(\tau_1(A))=B$ y sea ℓ_2 la recta determinada por B y $\tau_1(A)$ $(B\neq\tau_1(A))$, entonces ℓ_2 es traza de τ_2 $\therefore$ $\ell_1 \neq \ell_2$ $\quad$ $B \neq A$ o sea $\tau_2\tau_1(A)\neq A$.

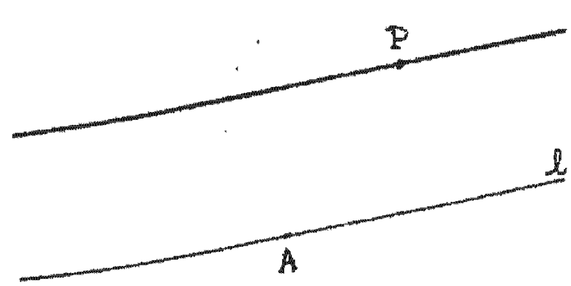


Caso ii) Las trazas de τ_1 y τ_2 coinciden. En este caso si t es una traza común a τ_1 y τ_2 entonces $\tau_2 \circ \tau_1(t) = \tau_2(\tau_1(t))$

$$= \tau_2(t)=t$$

así que ii) se cumple, iv) también claramente se cumple para $\tau_2 \circ \tau_1$ probemos ahora que $\tau_2 \circ \tau_1$ cumple con la propiedad iii). Supongamos entonces que para cierta A en P.

$$\tau_2 \circ \tau_1(A) = A$$



Sea ℓ una traza común a τ_1 y τ_2 que pase por A. Consideremos P un punto arbitrario del plano no en ℓ, por P hagamos pasar una recta ℓ_1 paralela a ℓ, así que ℓ_1 es traza para $\tau_2 \circ \tau_1$. Sea t la recta determinada por A y P. Tenemos así -

que $\tau_2\tau_1(t)$ y t tienen a A como punto común $\tau_2\tau_1(t)$
como τ_2 $\tau_1(\ell_1) = \ell_1$ entonces $\tau_1\tau_2(P)$ que está en la intersección de $\tau_2\tau_1(t)$ y $\tau_2\tau_1(\ell)$ que es la intersección de t y ℓ es igual a P.
Ahora tomando cualquier P fuera de ℓ y tomándola como A, se demues igualmente que los puntos de ℓ quedan también fijos frente a $\tau_2 \circ \tau_1$.

$$\therefore \quad \tau_2 \circ \tau_1 = I \text{ lo cual no es el caso}$$

$$\therefore \quad \tau_2\tau_1(A) \neq A \text{ para toda } A$$

por lo tanto $\tau_2\tau_1$ es una traslación.

<u>Proposición 5.</u> Sean A y B puntos del plano existe entonces traslación única T tal que T(A)=B.

Demostración. Hemos probado ya la existencia de tal T, demostramos ahora su unicidad. Así supongamos que T y T' son dos traslaciones con

$$T(A) = T'(A) = B$$

Así $T^{-1} \circ T'$ es también una traslación por la propiedad 4, y

$$T^{-1} \circ T'(A) = T^{-1}(B) = A$$

$$\therefore \; T^{-1} \circ T' = I$$

$$\therefore \; T' = T$$

L.Q.Q.D

<u>Proposición 6.</u> Sean T_1 <u>y</u> T_2 <u>traslaciones; entonces</u> $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$.

Demostración. Descartando el caso trivial en que T_1 ó $T_2 = I$. Tenemos dos casos:

A) Las trazas de T_1 y T_2 son paralelas.

B) Las trazas de T_1 y T_2 no son paralelas.

A) Sea $P \in \mathcal{P}$, consideremos ℓ_1 la recta determinada por P y $T_1(P)$. Sea ℓ_2 la recta $T_2(\ell_1)$ determinada por $T_2(P)$ y $T_2(T_1(P))$. Entonces si llamamos ℓ_3 a la recta determinada por P y $T_2(P)$ $T_1(\ell_3) \| \ell_3$ y pasa por $T_1(P)$.

Por otra parte la recta t determinada por $T_1(P)$ y $T_2(T_1(P))$ es traza de T_2 $\therefore$ paralela a ℓ_3, por consiguiente $t = T_1(\ell_3)$

$\therefore$ $T_1T_2(P)$ está en t

pero $T_1T_2(P)$ está en ℓ $\therefore$ en la intersección

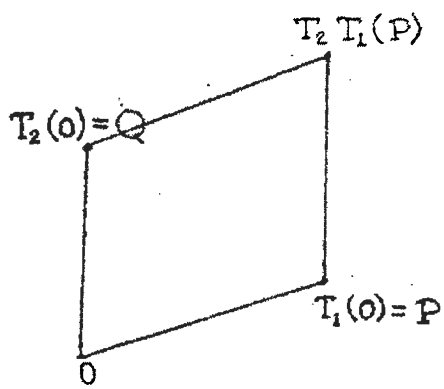
pero $T_1T_2(P)$ también está en esta intersección; así que $T_1T_2(P) = T_2T_1(P)$

L.Q.Q.D.

2. <u>Operaciones entre los puntos del plano.</u>

De aquí en adelante fijaremos O un punto del plano. Una - vez escogido este punto, definiremos operaciones en el plano, es to es a cada par de puntos del plano le asociaremos otro nuevo - punto.

Intuitivamente (o lo que a esto le corresponde en la practica escogeremos cierto punto 0 y por la acción sobre este punto de las traslaciones estudiaremos a éstas últimas. Esto tiene sentido ya que la traslación T queda completamente determinada por T(0). Asi si T_1 y T_2 son traslaciones, $T_2 \circ T_1$ es también una traslación, como se ha visto $T_2T_1(P)$ queda completamente determinado por la



construcción geométrica:
Trazamos por 0 los segmentos de recta [0,P] y [0,Q] , entonces por P trazamos una paralela ℓ a la recta determinada ') por y la recta ℓ consideramos el punto R tal que L[R,P] = L[0,Q] . Este punto R es tal que R = $T_2T_1(0)$.

Así pues a este punto lo denotaremos por:

$$P + Q$$

Tenemos así la siguiente definición.

Definición. Si P y Q son puntos del plano, entonces

$$P + Q = T_{0Q} \circ T_{0P}(0)$$

Tenemos entonces las siguientes propiedades:

S.1. $P + Q = Q + P$

S.2. $P + (Q+R) = (P+Q) + R$

S.3. $P + 0 = P$

S.4 Dado P existe P' con $P + P' = 0$

Demostración.

S.1) Por definición

$$P + Q = T_{OQ} \circ T_{OP}(O) \quad \text{pero} \quad T_{OQ} \circ T_{OP} = T_{OP} \circ T_{OQ}$$

$$\therefore P + Q = T_{OP} \circ T_{OQ}(O) = Q + P$$

S.2) $P + (Q+R) = T_{O(Q+R)} \circ T_{OP}(O)$

pero $T_{O\,Q+R} = T_{OR} \circ T_{OQ}$ por definición de $Q + R$

$$P + (Q + R) = (T_{OR} \circ T_{OQ}) \cdot T_{OP}\ (O)$$

$$= (T_{OR} \circ (T_{OQ} \circ T_{OP})(O)$$

$$= T_{OR} \circ (T_{O,P+Q})\ (O) = (P+Q) + R$$

S.3) $P + O = T_{oo} \circ T_{op}\ (O) = I \circ T_{op}\ (O) = T_{op}\ (O) = P$

S.4) Consideremos T_{OP}^{-1}, entonces

$$T_{OP}^{-1}\ (O) = P'$$

$$\text{y} \quad P + P' = T_{OP'} \circ T_{OP}(O) = T_{OP}^{-1} \cdot T_{OP}(O) = I(O) = O$$

3. Los números naturales.

Consideremos los números naturales $\{1,2,3...\}$ y el siguiente principio de inducción que nos será muy útil para probar afirmaciones en las que intervienen los naturales.

Supongamos que para cada número natural n tenemos una cierta proposición P_n, y que deseamos probar P_n para cada número natural n.

Ahora bien supongamos que para cierto número natural k_0, podemos probar P_{k_0}, así que ahora lo más natural sería intentar demostrar P_{k_0+1}, mediante cierto procedimiento; ahora ya en posesion de la verdad de P_{k_0+1}, trataríamos de agenciarnos algún método para proseguir adelante: esto es para probar P_{K_0+2}, etc.

La tarea a la que nos enfrentamos será ciertamente ardua, ya que el procedimiento que se usará en cada P_n podría ser distinto al usado en las demás P_n. Sin embargo si tuviéramos una manera fija de pasar de cualquier P_n a la siguiente, nuestra tarea se simplificaría enormemente ya que no habría más que probar P_{k_0}, entonces automáticamente podríamos probar P_{k_0+1}, luego P_{k_0+2}, etc., así hasta llegar a cualquier P_N. Así podemos establecer el método inducción matemática.

Supongamos que para cada natural tenemos una proposición P_n entonces si la verdad de P_n implica la de P_{n+1} para todo natural $n \geq k$ y P_k es cierta, entonces P_n es cierta para toda $n \geq k$.

Ejemplo (I.S. Sominskii. El método de la inducción matemática. Miselánea Matemática # 3).

Pn : n rectas distintas en un plano, pasando por un punto dividen al plano en 2n partes.

Así para cada número natural n tenemos una proposición P_n

P_1 una recta divide al plano en 2 partes

P_2 dos rectas div iden al plano en 4 partes

P_3 tres rectas dividen al plano en 6 partes

Probemos P_1 pero esto es precisamente el contenido de la proposición 8.2.

Pasemos a probar P_2

ℓ_1 la recta dada divide al plano en dos partes (por P_1) $C^1_{\ell_1}$ y $C^2_{\ell \ell_1}$. Ahora bien como es fácil ver si ℓ es una semirrecta distinta a ℓ_2 una semirrecta está complehtamente en alguna $C^i_{\ell_1}$ y la otra semirrecta en la otra $C^j_{\ell_1}$. Cada semirrecta divide a la C^i_{ℓ} respectiva en dos partes, así aparecen dos nuevas partes $\therefore$ - aparecen 4 partes.

Pasemos ahora a examinar el paso de P_k a P_{k+1}. Entonces supongamos que P_k es cierta, con el añadido de que si C_s es cualquiera de las partes en que se divide el plano por las k rectas, entonces si ℓ es una semirrecta distinta a las dadas que se inicie en T (la intersección de las k rectas), entonces C_3 contiene a toda ℓ o no tiene puntos en común con ℓ. A esta nueva proposición denotémos le por P'_k Desde luego P'_1 es válida. Probemos ahora que P'_k implica P'_{k+1}.

Sean $\ell_1, \ldots, \ell_{k+1}$ k+1 rectas distintas que pasan por un punto T entonces porque se está suponiendo P'_k

$\ell_1, \ldots, \ell_k$ dividen al plano en 2k partes

$C_1\ C_2, \ldots, C_{2k}$ y cada una de estas C_j tiene la propiedad de que si ℓ es una semirrecta $\neq \ell_1, \ldots, \ell_k$ que se inicia en T, o bien ℓ está contenida en C_j o no tiene puntos en común con C_j.

Consideremos ℓ_{k+1}, T divide a esta recta en dos semirrectas ℓ y ℓ' la primera está contenida en alguna C_j y ℓ' en otra C_k $\therefore \ell$

divide a C_j en dos partes y ℓ' a C_k también en 2. Así el plano queda dividido en 2k+2 partes ∴ en 2(k+1) partes ∴

P_{k+1} es válida ∴ por el principio de inducción

P_N es válida para todo natural N

4. <u>Las potencias de un movimiento.</u>

Sea m en M, y n un número natural, queremos definir m^n, lo definiremos de la siguiente manera:

$$m^0 = I$$

$$m^1 = m$$

y si m^k ha sido ya definido

$$m^{k+1} = m_0 m^k$$

<u>Propiedad 4.1.</u> Si n y t son enteros y $m \in M$ tenemos lo siguiente:

$$m^n{}_0\, m^t = m^{n+t}$$

<u>Demostración.</u> Sea t un natural fijo, demostraremos por i ción sobre n que

$$m^n{}_0 m^t = m^{n+t}$$

Caso n = 1. En este caso

$$m^1{}_0\, m^t = m_0 m^t = m^{t+1} \quad \text{(por definición)}$$

∴ la fórmula se cumple para n=1.

Supongamos ahora que $m^k{}_0\, m^t = m^{k+t}$

antonces $m^{k+1} \circ m^t = (m \circ m^k) \circ m^t$

$$= m \circ (m^k \circ m^t)$$

$$= m \circ m^{k+t} = m^{k+t+1}$$

$$= m^{(k+1)+t}$$

L.Q.Q.D.

Ahora sea $-m$ con $m>0$ un entero negativo, definiremos

$$m^{-m} = (m^{-1})^m$$

y tenemos:

<u>Propiedad 4.2.</u> $(m^m)^{-1} = m^{-m}$

<u>Demostración.</u> Por inducción sobre m

$m = 1$ $(m^1)^{-1} = (m)^{-1} = m^{(-1)}$

Supongamos ahora válida la propiedad para k y probémoslo para k+1

$$m^{k+1} \circ m^{-(k+1)} = m^{k+1} \circ (m^{-1})^{k+1}$$

$$= m \circ m^k \circ (m^{-1})^k \circ (m^{-1})$$

$$= m \circ (m^k \circ (m^k)^{-1}) \circ m^{-1}$$

$$= m \circ I \circ m^{-1} = I$$

$$(m^{k+1})^{-1} = m^{-(k+1)}$$

<u>Propiedad 4.3.</u> Si m y n son naturales

$$m^m \circ m^{-n} = m^{m-n}$$

<u>Demostración.</u> Supongamos primero que $m-n\geq 0$, entonces

$$m^{m-n} \circ m^n = m^{m-n+n} = m^m \text{ (por 4.1)}$$

$$\therefore \quad m^{m-n} \cdot m^n = m^m$$

multiplicando esta igualdad por la derecha por $m^{-n} = (m^n)^{-1}$ obtenemos

$$m^{m-n} = m^m \cdot m^{-n}$$

Ahora si $m-n < 0$

$$m^{m-n} = (m^{-1})^{n-m}$$

y

$$(m^{-1})^n \circ (m^{-1})^{-m} = (m^{-1})^{n-m}$$

$$m^{-n} \circ m^m = m^{m-n}$$

$$\therefore \quad m^m \circ m^{-n} = m^{m-n}$$

L.Q.Q.D.

5. Los enteros, los racionales.

Escojamos una recta ℓ que pase por nuestro punto fijo 0. Sobre la recta ℓ, escojamos otro punto fijo $U \neq 0$. Consideremos T_{OU}, entonces $T_{OU}(0) = U$, a este punto lo denotaremos por 1 y el punto $T_{OU}{}^{n}(0)$ lo denotaremos por n.

El objetivo de todo lo que sigue será encontrar relaciones - entre cualquier T con traza ℓ y T_{OU}, o lo que es lo mismo entre T(0) y T_{OU}. Nuestro deseo es poder describir cualquier punto sobre la recta en términos de T_{OU}.

Por lo pronto ya tenemos algunos puntos descritos en función de T_{OU}, esto es los puntos denotados por 0,1,2,....

Propiedad 5.1. Sea T una traslación $\neq I$, entonces $T^n \neq I$ para toda $n \geq 1$.

Demostración. Por inducción sobre n.

Si $n=1$ $T^1=T$ y $T \neq I$, por hipótesis.

Supongamos entonces que $T^k \neq I$. Sea ℓ una traza de T, esto - es una traza de T^k. Sea A en ℓ, escojamos el orden α de ℓ, tal que

$$A \overset{\alpha}{\neq} T^k(A)$$

entonces

$$T^k(A) \alpha T(T^k(A)) = T^{k+1}(A)$$

por lo tanto

$$A \overset{\alpha}{\neq} T^{k+1}(A)$$

$$T^{k+1} \neq I$$

L.Q.Q.D.

Pensemos en P cualquier punto del plano, y m un entero, por mP denotaremos a

$$mP = T_{OP}^{m}(O)$$

así que

$$oP = O.$$

también por la propiedad 5.1 $mP \neq 0$ para toda $m \neq 0$ y $P \neq 0$.

Tenemos también en virtud del párrafo 4 que

$$(m+n)\,P = mP + nP$$

también se tiene:

<u>Propiedad 5.2.</u> $m(P + Q) = mP + mQ$

<u>Demostración.</u> Por definición

$$m(P + Q) = T_{O(P+Q)}^{m}(O) = (T_{OQ} \cdot T_{OP})^{m}(O)$$

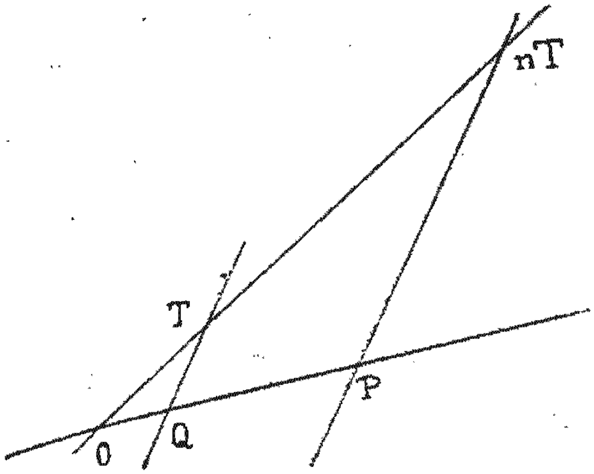
$$= T_{OQ}^{m} \circ T_{OP}^{m}(O)$$

$$= mP + mQ$$

<u>Propiedad 5.3.</u> Si P es un punto cualquiera del plano y n es un entero $\neq 0$ existe Q en P tal que $nQ = P$.

<u>Demostración.</u> Consideremos la recta ℓ_1 determinada por O y P

Sea ℓ_1' una recta distinta a ℓ_1 pasando por O, sobre ℓ_1 consieremos un punto $T \neq O$. Consideremos nT, que está en ℓ_1' tracemos la recta t determinada por nT y P ahora por T tracemos una recta t' paralela a t que corta a ℓ_1 en Q cierto punto de ℓ_1. Afirmamos que $nQ=P$. En efecto



$$T_{QT} \circ T_{OQ} = T_{OT}$$

$$\therefore \quad T_{OnT} = T^n_{OT} = T^n_{QT} \circ T^n_{OQ}$$

$$T_{OnT}(0) = nT$$

$T^n_{OQ}(0)$ está en la recta ℓ_1

por otra parte la recta t determinada por $T^n_{OQ}(0)$ y $T^n_{QT}(T^n_{OQ}(0))$ es paralela a la recta determinada por Q y T, y nT está en t

$$\therefore \quad T^n_{OQ}(0) = P \qquad \therefore \qquad nQ = P \quad \text{por definición.}$$

Ahora si $nQ' = P$, entonces

$$nQ' + (-1)nQ = 0$$

$$\therefore \quad n(Q'+(-Q)) = 0$$

$$\therefore \quad Q' + (-Q) = 0 \quad \therefore \quad Q' = Q$$

Nota. De aquí en adelante $A + (-B)$ lo denotaremos por $A - B$.

<u>Observación</u> $\quad (-Q) = (-1)Q.$

$$-nQ = (-n)Q.$$

Definición. Sea n un entero, y Q el punto, tal que $nQ = 1$, denotaremos a Q por $\frac{1}{n}$ y a $m(\frac{1}{n})$ por $\frac{m}{n}$

<u>Proposición 5.4.</u> $\quad m(nP) = (mn)P$ para enteros m y n cuales quiera.

Demostración. Consideremos a n fijo y demostremos la afirmación por inducción sobre m. Para $m \geq 0$.

$$0(nP) = 0 \quad y \quad (0n)P = 0\,P = 0$$

$\therefore$ la afirmación es válida para $m = 0$.

Supongamos la afirmación cierta para k

$$k(nP) = (kn)P.$$

$$\begin{aligned}(k+1)(nP) &= k(nP) + (nP)\\ &= (kn)P + nP = (kn+n)P\\ &= ((k+1)n)P\end{aligned}$$

$\therefore$ la afirmación es válida para toda $m \geq 0$.

Si $m = -m'$, con $m' > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}(-m')(nP) &= -[m'(nP)] = -[(m'n)P]\\ &= (-m'n)P\end{aligned}$$

L.Q.Q.D.

Proposición 5.5. $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ si y sólo si $mn' = m'n$.

Demostración. Si $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, multiplicando esta igualdad por nn' obtenemos:

$$n'n\left(\frac{m}{n}\right) = nn'\left(\frac{m'}{n'}\right)$$

$$\therefore n'\left(\frac{nm}{n}\right) = n\left(\frac{n'm'}{n'}\right)$$

$$\therefore n'm = nm'$$

L.Q.Q.D.

Proposición 5.6

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = mn' + \frac{nm'}{nn'}$$

Demostración.

$$\frac{m}{n} = \frac{mn'}{nn'}$$

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m'n}{nn'}$$

$$\therefore \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn'}{nn'} + \frac{m'n}{nn'}$$

$$= mn' \left(\frac{1}{nn'}\right) + m'n \left(\frac{1}{nn'}\right)$$

$$= \frac{mn' + m'n}{nn}$$

Definición. A los puntos de ℓ de la forma $\frac{m}{n}$ los llamaremos racionales y el conjunto de estos puntos lo denotaremos por $\mathbb{Q}$.

Definición. Sea $\frac{m}{n}$ un racional y P un punto deP , si Q es el punto tal que $nQ = P$ definimos

$$\frac{m}{n} P = mQ$$

Veamos que esta definición no depende de la pareja m,n elegida para representar al racional $\frac{m}{n}$.

En efecto, sea $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$,entonces $m'n = n'm$, denotemos por Q' al punto,tal que $n'Q' = P$ entonces $\frac{m'}{n'} P = m'Q$.

tenemos que

$$nn'\,m'Q' \;=\; nm'n'Q' = nm'P$$

y

$nn'\,mQ \;=\; n'm\,nQ \;=\; n'mP$, pero como $m'n = mn'$, entonces $(nn')m'Q' \;=\; (nn')mQ$

$$\therefore\; nn'(m'Q - mQ) = 0 \quad \therefore\; m'Q = mQ$$

L.Q.Q.D.

Proposición 5.7 Si q_1 y q_2 son racionales y $P \in \mathcal{P}$

$$(q_1q_2)P \;=\; q_1(q_2P)$$

Demostración. Sean $q_1 = \dfrac{m}{n}$ $q_2 = \dfrac{m'}{n'}$

$$q_1q_2 = \frac{mm'}{nn'}$$

Sea Q tal que $nn'Q = P$ entonces por definición

$$\frac{mm'}{nn'}\,P \;=\; nm'Q$$

pero (nQ) es tal que $n'(nQ) = P$

$$\therefore\; q_2P = m'(nQ) = (m'n)Q$$

y $m'Q$ es tal que $n(m'Q) \;=\; (m'n)Q \;=\; q_2P$

$$\therefore\; q_1(q_2P) \;=\; mm'Q \;=\; (q_1q_2)P$$

L.Q.Q.D.

Proposición 5.8. Si q_1 y q_2 son racionales y $P, Q \in \mathcal{P}$, enton ces

$$(q_1 + q_2)P = q_1P + q_2P$$

$$q_1(P + Q) = q_1P + q_1Q$$

Demostración. Si $q_1 = \frac{m}{n}$, $q_2 = \frac{m'}{n'}$

$$q_1 + q_2 = \frac{mn' + m'n}{nn'}$$

$$(q_1 + q_2)P = [(mn' + m'n)/nn']P$$

$$= (mn' + m'n)\left[\frac{1}{nn'}P\right] = mn'\left[\frac{1}{nn'}P\right] + m'n\left[\frac{1}{nn'}P\right]$$

$$= mn'/nn'\ P + m'n/nn'P$$

$$= m/n\ P + m'/n'P = q_1P + q_2P$$

Ahora bien

$$n(1/nP + 1/nQ) = n(1/n)P + n(1/n)Q$$

$$= P + Q$$

$$\therefore\ (1/n)\ (P + Q) = 1/nP + 1/nQ$$

$$\therefore\ m/n\ (P + Q) = m[1/nP + 1/nQ]$$

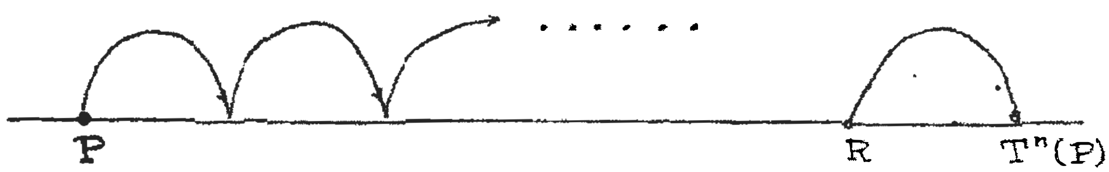
$$= m/nP + m/nQ$$

L.Q.Q.D.

6. El orden y las operaciones en ℓ.

Hasta ahora hemos encontrado cierto subconjunto de elementos de ℓ que tienen una relación directa con la traslación T_{OU}. Con el fin de seguir adelante con nuestro análisis es necesario introducir el siguiente Axioma:

Axioma 12. Sea T una traslación con traza ℓ, sean P y R puntos arbitrarios de ℓ, con $P\alpha R$ para cierto orden α de ℓ, exis te entonces un entero n tal que $R\alpha T^n(P)$



Definicion.

Si ℓ es una recta, escojamos en ella un orden α, sea P en ℓ, entonces a la semirrecta ℓ_1 definida por $\{q|P\alpha Q\}$ le llamaremos la α- semirrecta determinada por P, a la otra le llamaremos la α'- semirrecta.

Proposición 6.1. Sea T una traslación de traza ℓ, en cierto orden α, entonces si para un par de puntos P,Q de ℓ se tiene $T(P)$ α $T(Q)$ entonces si R y K son puntos de la recta con $R\alpha K$ se también $T(R)\ \alpha\ T(K)$. Análogamente si $T(Q)\ \alpha\ T(P)$ ocurre lo mismo para cualesquiera otra pareja de puntos.

Demostración.

Designemos por ℓ_1 la α- semirrecta determinada pór P, entonces $T(\ell_1)$ es la α-semirrecta determinada por $T(P)$. Ahora bien si $R\ \alpha\ P$, la α- semirrecta ℓ_2 determinada por R, contiene a ℓ_1 $T(\ell_2)\supset T(\ell_1)$ y $T(\ell_2)$ es también una α- semirrecta . . como $K \in \ell_2$, $T(K) \in T(\ell_2)$ $T(R)\ \alpha\ T(K)$

Si $P\alpha R$, $T(\ell_2) \subset T(\ell_1)$, pero también $T(\ell_2)$ es una α- semirrecta $\therefore$ igualmente como $K \in \ell_2$, $R\alpha K$. Un razonamiento análogo prueba la otra afirmación de la proposición.

L.Q.Q.D.

Proposición 6.2. Si T es una traslación y ℓ es una traza de T entonces $P\alpha Q$ implica $T(P)\ \alpha\ T(Q)$.

Demostración: Sea A en ℓ, $B = T(A)$, entonces

$$T = T_{AB}$$

denotemos por C al punto medio de [A,B], tenemos así

$$T = T^2_{AC}$$

$\therefore$ si $P\ \alpha\ Q$ tenemos i) $T_{AC}(P)\ \alpha\ T_{AC}(Q)$ para toda P y Q con $P\ \alpha\ Q$

ó ii) $T_{AC}(Q)\ \alpha\ T_{AC}(P)$

Si ocurre i) se tiene

$$T^2_{AC}(P)\ \alpha\ T^2_{AC}(Q)$$

$\therefore$ $T(P)\ \alpha\ T(Q)$

si ocurre lo segundo tendríamos

$$T^2_{AC}(P)\ \alpha\ T^2_{AC}(Q)$$

$\therefore$ en cualquir caso $T(P)\ \alpha\ T(Q)$

L.Q.Q.D.

Proposición 6.3. Si P,Q y R están en una recta t, con orden α y $P \alpha Q$, entonces $P + R \alpha Q + R$

Demostración

$$P + R = R + P = T_{OR} \circ T_{OP}(0)$$

$$= T_{OR}(P)$$

análogamente

$$Q + R = T_{OR}(Q) \text{ , como } P\alpha Q$$

$$T_{OR}(P) \alpha T_{OR}(Q)$$

$$\therefore P + R \alpha Q + R$$

L.Q.Q.D.

Definición. Sea α el orden de la recta fija ℓ, tal que $0\alpha 1$, entonces pondremos $P \leq Q$, si $P\alpha Q$ y $P<Q$ si $P \neq Q$ y $P\alpha Q$. A los elementos de ℓ tales que $0<P$ les llamaremos positivos y a aquellos tales que $P<0$ les llamaremos negativos.

Proposición 6.3. Si P Q y R están en ℓ y

$$P < Q, \text{ entonces } P + R < Q + R$$

Corolario. Si $P>0$, $-P<0$.

Demostración. Si $-P \geq 0$, entonces

$$0 < P + (-P) = 0$$

$$\therefore 0 < 0$$

lo cual no puede ser $\therefore -P < 0$

L.Q.Q.D.

Proposición 6.4. Si P α Q son puntos de una recta ℓ_1 y $q>0$ es un racional: $qP\alpha qQ$.

Demostración. Primero probemos la proposición cuando $q=m$ es un entero positivo, demostremos esto por inducción sobre m.

Si $m=1$

$$1\cdot P = P \ \alpha \ Q = 1\cdot Q$$

$$\therefore \ 1\cdot P \ \alpha \ 1\cdot Q$$

$\therefore$ la proposición se cumple para $m=1$. Supongamos ahora la proposición válida para $k-1$ y demostrémosla para k.

$$kP = (1 + (k-1))\ P = P + (k-1)P$$

pero como $k-1>0$

$$(k-1)P \ \alpha \ (k-1)Q$$

$$\therefore \ P + (k-1)P \ \alpha \ (k-1)Q + P$$

pero $P \ \alpha \ Q$

$$\therefore \ (k-1)Q + P \ \alpha \ (k-1)Q + Q$$

$$\therefore \ kP \ \alpha \ kQ$$

Ahora sea $q = m/n$ con $m>0$ y $n>0$

$$\therefore \ mP \ \alpha \ mQ$$

Ahora bien si $mQ/n \ \alpha \ mP/n$

Tendríamos $nmQ/n \ \alpha \ nmP/n$

$$\therefore \ mQ \ \alpha \ mP$$

que no es el caso

$$\therefore \quad qP \,\alpha\, qP$$

L.Q.Q.D.

7. Los racionales y su relación con los puntos restantes.

Hasta ahora hemos considerado ciertos puntos cuya relación con T_{OU} es clara ¿Son éstos todos los puntos?. Por lo pronto no podemos contestar a esta pregunta. Sin embargo veremos que dado cualquier punto P en ℓ existe un punto racional arbitrariamente "cercano".

Primero veamos el siguiente resultado.

Proposición 7.1. Si P está en ℓ con $0<P$, entonces existe un punto de la forma $1/n \in [0,P]$

Demostración. Por el axioma 12 existe un entero n tal que

$$1 < T^n_{OP}(0) = nP$$

Ahora bien que

$$n(1/n) < nP$$

pero $n>0$ ya que si $n<0$ tendríamos $nP<0<1$

$\therefore$ si $P< 1/n$

entonces $nP<1$ lo cual no sucede

por lo tanto $1/n \notin P$ y como $n>0$

$$0 < 1/n < P, \text{ o sea}$$

$$1/n \in [0,P]$$

L.Q.Q.D.

Proposición 7.2. Sea $[A,B]$ un segmento de ℓ con $A<B$, entonces existe un racional q tal que $q\in[A,B]$

Demostración.

$$A < B$$

entonces

$$0 = A + (-A) < B + (-A) = B-A$$

Por la proposición anterior existe un entero $n>0$, tal que

$$1/n \in [0,B-A]$$

Además por el axioma 12 existe un entero $m>0$, tal que

$$A < m(1/n) \quad (*)$$

fijémonos en m_0 el entero más chico que cumple con $(*)$, entonces

$$(m_0-1)(1/n) \leq A$$

$$\therefore \quad m_0(1/n) + (-1)1/n \leq A$$

$$\therefore \quad m_0(1/n) \leq A + (1/n)$$

pero $\quad 1/n < A-B$

$$\therefore \quad B + 1/n < m_0(1/n)$$

y $\quad (B + 1/n) + (-1/n) < m_0(1/n) + (-1/n)$

$$\therefore \quad B < (m_0-1)(1/n)$$

$$\therefore \quad B < (m_0-1)\,1/n < A$$

L.Q.Q.D.

Así que dado cualquier P en ℓ, hay puntos racionales tan cercanos a P como queramos. Aprovecharemos en lo que sigue este resultado de la manera siguiente:

Sabemos que entre los racionales hay dos operaciones la suma $q_1 + q_2$ que no es más que la suma de los puntos del plano y el producto $q_1 \cdot q_2$. Queremos ahora extender este producto a todos los elementos de ℓ. Para eso vamos a definir de manera geométri tal producto, veremos que esta operación para los racionales coinde con la original. Además se verá que si P_1 y P_2 son elementos ℓ_1 y q_1 q_2 son racionales "cercanos" a P_1 y P_2 entonces $q_1 q_2$ es "cercano" a $P_1 P_2$. Esto será muy importante ya que hará que las propiedades del producto para racionales sean válidas también p los elementos de ℓ.

8. La definición de producto entre elementos de ℓ.

Con el fin de poder trabajar con comodidad veremos algunas relaciones entre traslaciones y cualquier movimiento m de M.

Proposición 8.1. Sea m un movimiento tal que $m(0)=0$, entonces $mT\,m^{-1}$ es una traslación y $mT\,m^{-1} = T_{om(T(o))}$.

Demostración. Probemos primero que mTm^{-1} es una traslación en primer lugar es claro que $mTm^{-1} \in M$.

Ahora sea t una traza para T, tenemos entonces que

$$mTm^{-1} \circ m(t) = m \circ T(t) = m(t)$$

$\therefore$ $m(t)$ queda fija bajo mTm^{-1}

Ahora si $t' \| m(t)$ $\quad m^{-1}(t') \| m^{-1}m(t)$

$$\therefore \quad m^{-1}(t') \| t$$

llamando $t'' = m^{-1}(t')$ tenemos $t''||t$ y $t' = m(t'')$

$\therefore$ como $t''||t$ t'' es traza de T $\therefore$ igual que antes

$t' = m(t'')$ queda fijo bajo mTm^{-1}.

Ahora si

$$mTm^{-1}(A) = A$$

entonces $Tm^{-1}(A) = m^{-1}(A)$, lo cual no puede ocurrir $\therefore$ $mTm^{-1}(A) \neq A$

Además si ℓ es cualquier recta y llamamos $\ell' = m^{-1}(\ell)$

$$\ell = m(\ell')$$

$$\therefore \; mTm^{-1}(\ell) = mTm^{-1}(m(\ell')) = mT(\ell')$$

y

$$\ell'||T(\ell') \text{ ó } \ell'=T(\ell') \qquad mT(\ell')||m(\ell')$$

ó $$m(\ell') = mT(\ell')$$

$\therefore$

$$mTm^{-1}(\ell)||\ell \text{ ó } mTm^{-1}(\ell) = \ell$$

$\therefore$ mTm^{-1} es una traslación.

Además como $mTm^{-1}(0) = mT(0)$

$$mTm^{-1} = T_{om(T(0))}$$

L.Q.Q.D.

<u>Corolario 1.</u> $m(T_{OP}(Q)) = T_{Om(P)}(m(Q))$

<u>Demostración.</u>

$$m\, T_{OP}m^{-1}(m(Q)) = m\, T_{OP}(Q)$$

pero por otra parte por la proposición

$$m\, T_{OP}m^{-1}(m(Q)) = T_{Om(P)}(m(Q))$$

$$\therefore \; m(T_{OP}(Q)) = T_{Om(P)}(m(Q))$$

L.Q.Q.D.

<u>Corolario 2.</u> $m(-P) = -m(P)$

<u>Demostración.</u> $-P = {}_{OP}^{1}(0)$

$$m(-P) = m\,T_{OP}^{-1}(0) = m\,T_{OP}^{-1}\,m^{-1}(0)$$

$$= (mT_{OP}m^{-1})(0) = T_{Qm(P)}^{-1}(0) = -m(P)$$

L.Q.Q.D.

<u>Proposición 8.2.</u> Sea m un movimiento con $m(0)=0$ y P un punto de ℓ, entonces $m(qP) = qm(P)$ para q racional.

<u>Demostración.</u> Demostraremos la proposición primero cuando $q=n$ un entero >0, por inducción sobre n.

Tenemos así para $n=1$

$$m(nP) = m(P) = 1\cdot m(P)$$

$\therefore$ tenemos que la proposición se cumple para $m=1$

Ahora bien, si suponemos que la proposición es válida para el entero k demostremos que vale para k+1.

$$m((k+1)P) = m(P + kP) = m(T_{OP}(kP))$$

$$= T_{Om(P)}(m(kP))$$

$$= T_{Om(P)}(km(P))$$

$$= T_{Om(P)}(T_{Om(P)}^{k}(0))$$

$$= T_{Om(P)}^{k+1}(0) = (k+1)m(P)$$

Así que

$$m((k+1)P) = (k+1)m(P)$$

$\therefore$ la proposición se cumple para todo entero $n>0$

Ahora si $n = -n'$ con $n'>0$

$$m(nP) = m(-n(-P) = m(n'(-P))$$

$$= n'm(-P) = n'(-m(P)) \quad \text{(Corolario 2)}$$

$$= (-n')m(P) = nM(P)$$

Y si n es un entero

$$n\, m(1/nP) = m(n1/nP) = m(P)$$

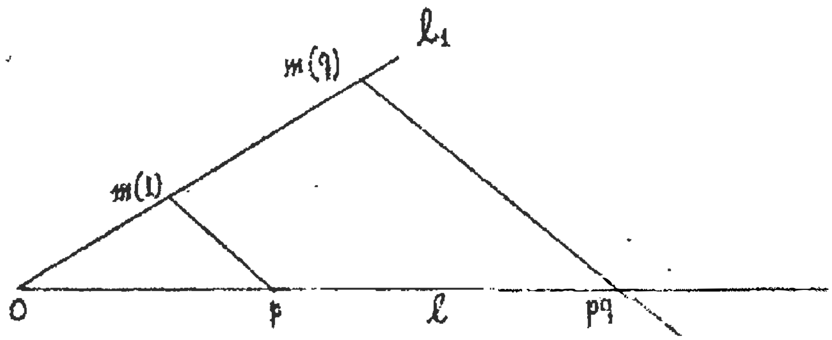
$$\therefore \quad m(1/nP) = 1/_n m(P)$$

$$\therefore \quad m/nm(P) = mm(1/nP) = M(m/nP)$$

L.Q.Q.D.

Definición. Sean p,q elementos de ℓ tales que $p\geq 0, q\geq 0$. Entonces si $p=0$ ó $q=0$ qp lo definimos $=0$. Si $p>0$ y $q>0$ definimos qp de la manera siguiente. Consideremos ℓ_1 una recta distinta a ℓ_1 pasando por 0 fija. Entonces $\ell_1 = m(\ell)$, con $m(0) = 0$ y $m\in M$.

Ahora tracemos la recta t determinada por p y m(1), ahora por m(q) tracemos una recta paralela a t que cortará a ℓ en cierto punto C a este punto lo denotaremos por qp.



Proposición 8.3. Si q es un racional >0 y P un punto de ℓ, entonces qp coincide con el producto definido en el párrafo 5.

Demostración. Supongamos que q=m/n,m>0, n>0, entonces

$$m(q) = m(m/n\cdot 1) = m/nM(1)$$

Pongamos $T_1 = 1/n\ m(1)$. Entonces por T_1 tracemos una paralela a la recta determinada por m(1) y P en la definición de producto la recta trazada corta a ℓ en cierto punto T. Tenemos así

$$T_{OT_1} = T_{TT_1} \circ T_{OT} \quad \therefore \quad T^n_{OT_1} = T^n_{TT_1} \circ T^n_{OT}$$

pero

$$T^n_{OT_1}(0) = n\ 1/n\ m(1) = m(1)$$

$$\therefore \quad m(1) = T^{(n)}_{TT_1}(T^n_{OT}(0))$$

pero la recta determinada por $m(1) = T^n_{TT_1}(T^n_{OT}(0))$ y $T^n_{OT}(0)$ es traza de T_{TT_1} $\therefore$ es paralela a la recta determinada por m(1) y P $\therefore$ $P = T^n_{OT}(0)$,es decir

$$nT = P$$

de igual manera

$$T^{m}_{OT_1} = T^{m}_{TT_1} \circ T^{m}_{OT}$$

$$\therefore \quad T^{m}_{OT_1}(0) = m\ 1/n\ m(1) = m/n\ m(1)$$

$\therefore$ por razones análogas a las anteriores

$$T^{m}_{OT}(0) = C \quad \therefore \quad mT = C$$

$$\therefore \quad m/nP = C$$

L.Q.Q.D.

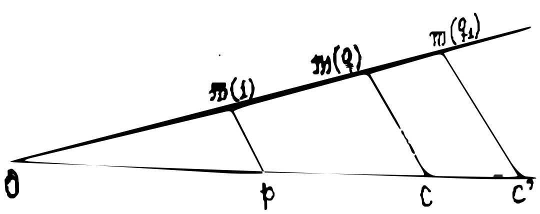
<u>Corolario</u>. Si $P = m/n$ <u>y</u> $q = m'/n'$ <u>entonces</u>

$$qp = mm'/nn'$$

Así que nuestro producto coincide en los racionales con el previamente definido, así hemos cumplido la primera etapa de nuestro programa. Ahora veamos que en cierta forma el producto qp de dos elementos de ℓ se puede aproximar con el grado de exactitud que uno quiera por racionales. Con este fin primero veamos nuestro producto como se comporta con respecto al orden.

<u>Proposición 8</u>.4. Si q y $p>0$ son elementos de ℓ y $q_1>q$ entonces $q_1p > qp$

<u>Demostración</u>. Como $0 < q < q_1$



$q \in [0, q_1]$

$\therefore \quad m(q) \in [0, m(q_1)]$

$\therefore \quad m(q)$ está entre 0 y $m(q_1)$

Ahora si trazamos por 0 $m(q)$ y $m(q_1)$ paralelas a recta determinada por $m(1)$ y P, estas rectas cortarán a ℓ en pq, pq_1 $\therefore$ por el Axioma 11:

$$pq \in [0, pq_1] \text{ , esto es}$$

$$0 < pq < pq_1$$

L.Q.Q.D.

Proposición 8.5. Si p_0, q_0 son racionales positivos con $p_0<p, q_0<q$ entonces $q_0p_0 < qp$.

Demostración. Como $P_0 < P$ y q_0 es racional

$$q_0p_0 < q_0p \quad \text{y como } q_0<q$$

por 8.4 se tiene $q_0p < qp$

$$\therefore \quad q_0p_0 < qp$$

L.Q.Q.D.

Proposición 8.6. Sea N_0 un natural dado, $p,q>0$, existe entonces una $N>0$ natural, tal que si q_0 es racional y

$$q_0 \in [p-1/N, P], \text{entonces } 0 < qp-q_0p < 1/N_0$$

Demostración. Consideremos el elemento $N_0p>0$, entonces el Axioma 12 existe un natural N_1 con $N_0p<N_1$ y N_2 otro natural con

$$1/N_2 < q \text{ , sea } N = \text{máx } (N_1, N_2)$$

entonces $N_0 p < N_1 \le N$

$$1/N \le 1/N_2 < q$$

$\therefore$ si q_0 es un racional en $[q_0 - 1/N, q]$

$$q_0 \le q$$

y $q_0 - 1/N \le q_0 \therefore q \le q_0 + 1/N$

$$\therefore qp < (q_0 + 1/N)P = q_0 p + 1/N\ P$$

$$\therefore qp - q_0 p < \frac{1}{N} P < \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{N_0} = 1/N_0$$

L.Q.Q.D.

<u>Proposición 8.7.</u> Sea q_0 un racional >0 y $P>0$. Sea N_0 un entero dado, existe entonces N, tal que si p_0 es racional y $p_0 \in [p-1/N, P]$ entonces $0 < q_0 p - q_0 p_0 < \frac{1}{N_0}$

<u>Demostración.</u> Tomemos el entero $N>0$, tal que

$$N_0 q_0 < N \quad y \quad 0 < 1/n < P$$

Ahora sea p_0 un racional en $[P-1/N, P]$

entonces $P - 1/N < P_0 < P$

$$\therefore P < P_0 + 1/N$$

$$\therefore q_0 p < q_0 (P_0 + 1/N) = q_0 p_0 + q_0/N$$

$$\le q_0 p_0 + q_0 N_0/NN_0 < q_0 p_0 + N/NN_0$$

$$= q_0 p_0 + 1/N_0$$

$$\therefore\ 0 < q_0p - q_0p_0 < 1/N_0$$

L.Q.Q.D.

<u>Proposición 8.8.</u> Dados $p,q>0$ y N_0 un entero natural, entonces existe otro natural N, tal que si p_0 y q_0 son racionales en $(p-1/N,P)$ y $(q-1/N,q)$ respectivamente, entonces

$$0<qp - q_0p_0 < 1/N_0$$

<u>Demostración.</u> Por la proposición 8.6 si tomamos el natural $N_1>0$, tal que

$$2N_0p \le N_1$$

$$1/N_1 < q$$

entonces si $q_0\epsilon[P-1/N,P]$ y q_0 es racional se tiene

$$0 < qp - q_0p < 1/2N_0$$

y por 8.7, si tomamos el entero N_2, tal que

$$2N_0q_0 < 2N_0q < N_2 \quad y$$

$$0 < 1/N_2 < p$$

entonces para P_0 racional en $[P-1/N_2,P]$

$$0 < q_0p - q_0p_0 < 1/2N_0$$

$\therefore$ si tomamos $N = \text{máx}\ (N_1,N_2)$

y q_0 está en $(q - 1/N,q)$

y p_0 en $(P-1/N,q)$

$$0 < qp \quad q_0p_0 = qp - q_0p + q_0p - q_0p_0 < \frac{1}{N_0}$$

L.Q.Q.D.

Resumiendo, si tenemos dos elementos $q>0$ y $p>0$, y queremos aproximarnos a qp por un producto de racionales $q_0<q$ y $p_0<p$ de manera tal que el error cometido, esto es la diferencia

$$qp - q_0p_0 \text{ sea } < \frac{1}{N_0}$$

entonces existe una N tal que si

$$q - q_0 < 1/N \quad y \quad p - p_0 < 1/N$$

$$qp - q_0p_0 < \frac{1}{N_0}$$

Así que basta que el error en q y en p sean menores que 1/N.

Proposición 8.9. Si $p,q>0$ entonces $pq = qp$.

Demostración. Supongamos que $qp \neq pq$ entonces popemos suponer $qp - pq > 0$ $\therefore$ existe N_0 natural, tal que

$$1/N_0 < qp - pq$$

por la proposición anterior existen racionales $p_0 < p$, $q_0 < q$,

con $qp - q_0p_0 < 1/N_0 + 1$

$0 < qp - pq = qp - q_0p_0 + (p_0q_0 - pq)$

pero $p_0q_0 - pq < 0$

$$0 < qp - pq < \frac{1}{N_0+1} < \frac{1}{N_0}$$

lo cual no puede ser $\therefore$ $qp = pq$

L.Q.Q.D.

Proposición 8.10. Si q_1, q_2, q_3 son >0, entonces

$q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3$

Demostración. Sea M un natural dado, existe entonces un tural $N>0$, tal que si

$$r_1 \in [q_1-1/N, q_1] \;,\; r_2 \in [q_2-1/N, q_2]$$

$$r_3 \in [q_3-1/N, q_3]$$

y r_1, r_2, r_3 son racionales, entonces

$$0 < q_1(q_2q_3) - r_1(r_2r_3) < \frac{1}{M}$$

Por la proposición 8.9. existe un natural N_1, tal que si r_1 y r_2, son racionales con $r_1 \in [q_2q_3-1/N_1, q_2q_3]$, $r_2 \in [q_1-1/N_1, q_1]$

$$q_1(q_2q_3) - r_1r < \frac{1}{M}$$

también por 8.9, existe un natural N_2, tal que si r_2 y r_3 son racionales con $r_2 \in [q_2-1/N_2, q_2]$ $r_3 \in [q_3-1/N_2, q_3]$,

entonces: $$q_2q_3 - r_2r_3 < \frac{1}{N_1}$$

. si $N=\text{máx}(N_1, N_2, N_3)$ y r_1, r_2, r_3 son racionales con $r_1 \in [q_1 - 1/N, q_1]$, $r_2 \in [q_2 - 1/N, q_2]$, $r_3 \in [q_3 - 1/N, q_3]$

entonces

$$q_1(q_2q_3) - r_1(r_2r_3) < \frac{1}{M}$$

de manera completamente análoga se puede probar que si M es un tural dado, existe N', tal que si r_1' r_2' y r_3' son racionales con

$$r_1' \in [q_1-1/N', q_1],\; r_2' \in [q_2-1/N', q_2], r_3' \in [q_3-1/N', q_3],$$

entonces

$$0 < (q_1q_2)q_3-(r_1'r_2')r_3' < \frac{1}{M}$$

Ahora supongamos que $q_1(q_2q_3) \neq (q_1q_2)q_3$, entonces se puede suponer que

$$q_1(q_2q_3) - (q_1q_2)q_3 > 0$$

$\therefore$ existe un natural N_0, tal que

$$1/N_0 < q_1(q_2q_3) - (q_1q_2)q_3,$$

pero por otra parte existen racionales r_1, r_2, r_3, tales que

$$q_1(q_2q_3) - r_1(r_2r_3) \quad \frac{1}{2N_0}$$

y

$$(q_1q_2)q_3 - (r_1r_2)r_3 \quad \frac{1}{2N_0}$$

$$\therefore \quad 0 < q_1(q_2q_3) - (q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3) - r_1(r_2r_3) + (r_1r_2)r_3 - (q_1q_2)q_3$$

pero

$$r_1r_2 < q_1q_2$$

$$\therefore \quad r_1r_2r_3 < (q_1q_2)q_3$$

$$\therefore \quad r_1r_2r_3 - (q_1q_2)q_3 < 0$$

$$\therefore \quad 0 < q_1(q_2q_3) - (q_1q_2)q_3 < \frac{1}{2N_0} < \frac{1}{N_0} < q_1(q_2q_3) - (q_1q_2)q_3$$

lo cual es absurdo $\therefore$ $q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3$

L.Q.Q.D.

Una demostración completamente análoga a las anteriores prueba lo siguiente:

Proposición 8.11. Si $p, q, r>0$, entonces

$$p(q + r) = pq + pr$$

Proposición 8.12. Si $p\neq 0$, $p>0$, existe q tal que $pq = 1$.

Demostración. Tracemos la recta t determinada por $m(1)$ y P, ahora por 1 tracemos $t' \| t$ de manera que t' corta a ℓ_1 en cierto punto q', entonces si ponemos $q=m^{-1}(q')$ es fácil ver de la definición que $qp = 1$.

L.Q.Q.D.

9. La multiplicación para todos los elementos de ℓ

Definición. Si p, q son elementos de ℓ y $p<0$ $q<0$ entonces $-p>0$, $-q>0$ y definimos $pq = (-p)(-q)$, si $p<0$ y $q>0$, $-p>0$ y definimos $pq = -(-p)q$

Es fácil ver que con esta definición todas las propiedades probadas para los elementos positivos de ℓ se siguen conservando.

10. Longitud de segmentos. Semejanza de triángulos.

Una vez teniendo una aritmética en ℓ (esto es operaciones suma y multiplicación) estamos en condiciones de definir la longitud de un segmento de recta.

Definición. Sea $[A,B]$ un segmento de recta en el plano, sea t la recta que parte de A y pasa por B, entonces existe un movimiento m, tal que $m(t) = \ell \therefore m(A) = 0$ y definimos

$$L[A,B] = m(B) = p > 0.$$

Proposición 10.1. Si $[A,B]$ es un segmento de recta y $C \in [A,B]$, entonces $L[A,B] = L[A,C] + L[C,B]$.

Demostración. Sea t la semirrecta que parte de A y pasa por B. Sea m el movimiento que aplica t sobre ℓ, esto es $m(t) = \ell$

Sean $c_1 = m(c)$, $c_2 = m(B)$, etnonces

como $c \in [A,B] \therefore c_1 \in [0,C_2]$

Además $L[A,C] = c_1$, $L[A,B] = c_2$

Ahora consideremos la traslación $T_{0,-C_1}$, entonces

$$T_{0-C_1} \circ m[C] = T_{0-C_1}[C_1] = 0$$

y

$$T_{0-C_1} m(B) = T_{0,-C_1}(C_2) = c_2 - c_1$$ por definición

$$L[C,B] = c_2 - c_1$$

$$\therefore L[A,B] = c_2 = c_1 + (c_2 - c_1) = L[A,C] + L[C,B]$$

L.Q.Q.D.

Definición. Sean ABC y A'B'C' dos triángulos, diremos son semejantes si

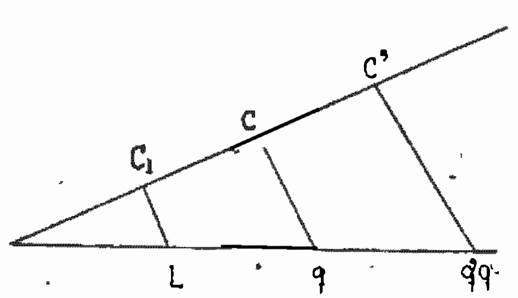
$$\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \qquad \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \qquad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

<u>Proposición 10.2.</u> Sean ABC y A'B'C' dos triángulos semejantes.

Supongamos que $L[A,B] = q$ y $L[A',B'] = q'q$, con q' un racional, entonces $L[A',C'] = q'L[A,C]$ y $L[B',C'] = q'L[B,C]$.

<u>Demostración.</u> Como $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$ existe un movimiento que aplica A' en A y a la semirrecta que parte de A' y pasa por en la semirrecta que parte de A y pasa por B, de igual manera aplica también la semirrecta que parte de A' y pasa por C' en aquella que parte de A y pasa por C, componiendo m_1 con otro movimiento m_2 podemos suponer (los movimientos no alteran las longitudes) que $A = A' = 0$, $B = q$, $B' = q'q$ y C y C' estan en una recta ℓ_1 que pasa por 0. Entonces como $0qC = 0q'qC'$ las rectas determinadas por q y C, y qq' y C' respectivamente s paralelas. Supongamos que $q' = m'/n$. Sea $C_1 = 1/_n C$; por C1 tracemos una recta t paralela a la recta determinada por C y q.

Esta recta corta a ℓ en cierto punto L. Entonces



$$T_{OC} = T_{LC_1} \circ T_{OL}$$

$$\therefore\ T_{OC} = T^n_{OC_1} = T^n_{LC_1} \circ T^n_{OL}$$

$T^n_{OL}(0)$ está en ℓ y la recta determinada por $T^{n}_{OL}(0)$ y $C = T^n_{LC_1}(T^n_{OL}(0))$

en traza de T_{LC_1} $\therefore$ paralela a la recta determinada por q y C $\therefore$

$$T^{n}_{OL}(0) = q \quad \therefore \quad L = 1/n\ q$$

$$\therefore \quad T^{m'}_{OL}(0) = m'\ 1/n\ q = m'/n\ q = q'q$$

$$T^{m'}_{OC_1} = T^{m'}_{LC_1} \circ T^{m'}_{OL}$$

y la recta determinada por $T^{m'}_{OL}(0) = q'q$ y $T^{m'}_{LC_1}(q'q)$ $= T^{m'}_{OC_1} = m'C_1$ es paralela a la recta determinada por los puntos q y C y pasa por q'q $\therefore$ $m'C_1 = C'$

$$\therefore \quad m'/n\ C = qC = C'$$

$$\therefore \quad L[A',C'] = q'L[A,C]$$

análogamente $\quad L[B',C'] = q'L[B,C]$

L.Q.Q.D.

<u>Proposición 10.3.</u> Sean ABC y A'B'C' dos triángulos semejantes.

Supongamos que $L[A,B] = q$ y $L[A',B'] = q'q$, entonces

$L[A',C'] = q'L[A,C]$ y $L[B',C'] = q'L[B,C]$.

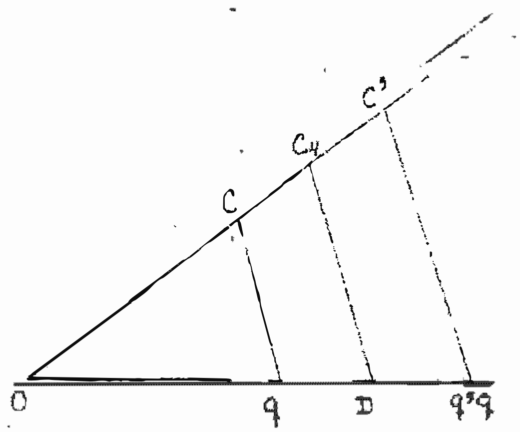
<u>Demostración.</u> Supongamos que $L[A',C'] \neq q'L[A,C]$, entonces hay dos posibilidades:

i) $L[A',C'] > q'L[A,C]$

ii) $L[A',C'] < q'L[A,C]$

Igual que en la proposición 10.2 podemos suponer que

$$A = A' = 0 \ , \quad B=q \ , \quad B' = q'q \ .$$



Tratemos el caso i) entonces, llamando $L[A',C']=c_2$ $L[A,C]=c_1$ c_1 tenemos que $q'c_1 < c_2$

$\therefore$ si c_3 es el punto, tal que $L[0,C_3]= q'C_1$, entonces $C_3 \in [C,C']$ $\therefore$

$q' < C_2C_1^{-1}$

$\therefore$ $\exists$ r racional con $q'< r < C_2C_1^{-1}$

$\therefore$ $q'C_1< rC_1 < C_2$

$\therefore$ si C_4 es el punto en ℓ_1 tal que $C_4 \in [C_3, C']$.

$$L\,[0,C_4] = rC_1 \qquad C_4 \in [C, C']$$

Por C_4 tracemos una paralela t a la recta determinada por y Q esta recta t cortará a ℓ en cierto punto D $\therefore$ como

$L[0,C_4] = rC_1 = rL[D,C]$ y r es racional y los triángulos ocq y $0C_4D$ son semejantes entonces

$$L[0,D] = rL[o,q] = rq \ \therefore \ D = rq$$

Además como $C_4 \in [C,C']$ por el Axioma 11

$D \in [q, q'q]$

$\therefore \quad rq < q'q$

pero por otra parte $q' < r \quad \therefore$

$$q'q < rq$$

$\therefore \quad rq < rq$ una contradicción

$\therefore$ i) no puede ocurrir. Análogamente se prueba que ii) tampoco puede ocurrir $\therefore$

$$L[A',C'] = q'L[A,C]$$

análogamente se prueba que

$$L[B',C'] = q'L[B,C]$$

L.Q.Q.D.

<u>Definición.</u> Un triángulo ABC se llama rectángulo si alguno de sus ángulos interiores es recto.

<u>Proposición 10.4.</u> Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo igual al recto entonces los triángulos son semejantes.

<u>Demostración.</u> Sean los ángulos $(\widehat{\ell_1,\ell_2})$ y $(\widehat{\ell_1',\ell_2'})$ los que son iguales; sea $(\widehat{\ell_3,\ell_4})$ y $(\widehat{\ell_3',\ell_4'})$ y $(\widehat{\ell_5,\ell_6}) = (\widehat{\ell_5',\ell_6'})$ = recto, los restantes ángulos, entonces

$$(\widehat{\ell_1,\ell_2}) + (\widehat{\ell_3,\ell_4}) + (\widehat{\ell_4,\ell_6}) = 2 \text{ rectos}$$

$$(\widehat{\ell_5,\ell_6}) = (\widehat{\ell_5',\ell_6'})$$

$$\therefore (\widehat{\ell_1,\ell_2}) + (\widehat{\ell_3,\ell_4}) + (\widehat{\ell_5,\ell_6}) = (\widehat{\ell_1',\ell_2'}) + (\widehat{\ell_3',\ell_4'}) + (\widehat{\ell_5,\ell_6})$$

$\therefore$ sumando a esta igualdad $(\widehat{\ell_6,\ell_5})$

tenemos

$$(\widehat{\ell_1,\ell_2})+(\widehat{\ell_3,\ell_4})+(\widehat{\ell_5,\ell_6})+(\widehat{\ell_6,\ell_5}) = (\widehat{\ell_1',\ell_2'})+(\widehat{\ell_3',\ell_4'})+(\widehat{\ell_5,\ell_6})+(\widehat{\ell_6,}$$

$$\therefore (\widehat{\ell_1,\ell_2})+(\widehat{\ell_3,\ell_4})+(\widehat{\ell_5,\ell_5}) = (\widehat{\ell_1',\ell_2'})+(\widehat{\ell_3',\ell_4'})+(\widehat{\ell_5,\ell_5})$$

$$\therefore (\widehat{\ell_1,\ell_2}) + (\widehat{\ell_3,\ell_4}) = (\widehat{\ell_1',\ell_2'}) + (\widehat{\ell_3',\ell_4'})$$

e igual que antes como $(\widehat{\ell_1,\ell_2})= (\widehat{\ell_1',\ell_2'})$

entonces $(\widehat{\ell_3,\ell_4}) = (\widehat{\ell_3',\ell_4'})$

$\therefore$ los triángulos son semejantes

L.Q.Q.D.

11. Las <u>Funciones trigonométricas.</u> Consideremos nuestra recta fija ℓ. Como sabemos ℓ divide al plano en dos partes C_1 y C_2 elijamos una de ellas y le diremos a ésta la parte positiva la otra se le llamará la parte negativa.

Ahora tomemos un par de rectas ℓ_1 y ℓ_2 que parten del mismo punto P, vamos a definir el seno de (ℓ_2,ℓ_1) o sea Sen $(i_2\,{}_6\,i_1)$ de la manera siguiente. Sea $m \in M$ tal que $m(\ell_1) = \ell$ y $m(P)=$

Ahora tomemos cualquier punto Q de $m(\ell_2)$ y bajemos una perpendicular a ℓ, entonces esta perpendicular cortará a ℓ en cierto punto q de ℓ, definimos

$$\text{Sen}(\widehat{\ell_2,\ell_1}) = \begin{cases} L[Q,q]/L[Q,0] & \text{si } M(\ell_2) \text{ está en la punta positiva del plano.} \\ -L[Q,q]/L[Q,0] & \text{si } M(\ell_2) \text{ está en la parte negativa.} \end{cases}$$

y como es fácil ver esta definición no depende del punto Q elegido sobre $m(\ell_2)$.

De igual manera el coseno de $(\widehat{\ell_2,\ell_1})$ ó $\cos(\widehat{\ell_2,\ell_1})$ se define como ; $\cos(\widehat{\ell_2,\ell_1}) = q/L[Q,0]$

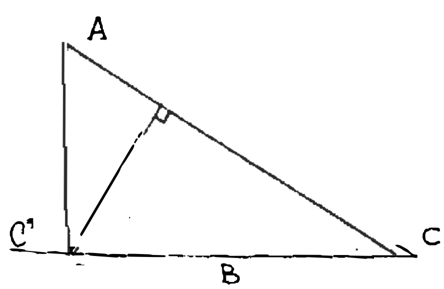
$$tg(\widehat{\ell_2,\ell_1}) = sen(\widehat{\ell_2,\ell_1})/\cos(\widehat{\ell_2,\ell_1})$$

$$cotg(\widehat{\ell_2,\ell_1}) = 1/tg(\widehat{\ell_2,\ell_1})$$

<u>Definición.</u> Sea $q \in \ell$, entonces por $|q|$, el valor absoluto de q, entenderemos $L[0,q]$, o sea $|q| = q$ si $q>0$ $|q| = -q$ si $q<0$.

12. <u>El Teorema de Pitágoras.</u>

Consideremos un triángulo rectángulo ABC con $\widehat{ABC}$ ángulo recto, entonces



$|\cos \widehat{BCA}| = L[B,C]/L[A,C]$

$\therefore$

$L[B,C] = L[A,C]|\cos \widehat{BCA}|$

<u>Proposición 12.1.</u> Sea ABC un triángulo rectángulo, con ABC = ángulo recto, entonces

$$L[B,A]^2 + L[B,C]^2 = L[A,C]^2$$

Demostración. Si prolongamos el lado BC hasta C' con $B \in [C',C]$. entonces $C'\hat{B}A$ es un ángulo exterior $\therefore$

$$C'\hat{B}A > C\hat{A}B$$

$$C'\hat{B}A > B\hat{C}A$$

pero $C'\hat{B}A$ = recto = $C\hat{B}A$

$$\therefore \quad L[A,C] > L[A,B] \quad \therefore \quad |\cos A\hat{B}C| < |$$

$$\text{análogamente} \qquad |\cos B\hat{C}A| < 1$$

Ahora por B tracemos una perpendicular a la recta t determinada por A y C sea T la intersección de la perpendicular con

entonces $L[A, T] = L[A,B]|\cos C\hat{A}B| < L[A,B] < L[A,C]$

$$L[T,C] = L[B,C]|\cos B\hat{C}A| < L[B,C] < L[A,C]$$

$$\therefore \quad T \in [A,C]$$

$$\therefore \quad L[A,C] = L[A,T] + L[T,C]$$

$$L[A,C] = L[A,B]|\cos C\hat{A}B| + L[B,C]|\cos B\hat{C}A|$$

$$\therefore \quad L[A,C]^2 = L[A,B]\, L[A,C]|\cos C\hat{A}B| + L[A,C]\, L[B,C]|\cos B\hat{C}A|$$

pero $L[A,C]|\cos C\hat{A}B| = L[A,B]$

y $L[A,C]|\cos B\hat{C}A| = L[B,C]$

$$\therefore \quad L[A,C]^2 = L[A,B]^2 + L[A,C]^2 \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Haciendo $L[A,B] = 1$ y $L[B,C] = 1$ obtenemos

$$L[A,C]^2 = 2$$

$\therefore$ existe $p > 0$ en ℓ con $p^2 = 2$. Veamos que p no puede ser un racional, porque si lo fuere $p = m/n$, con m y n números enteros sin factor común $\therefore$

$$m^2/n^2 = 2$$

$$\therefore \quad m^2 = n^2 2 \qquad \therefore \text{ 2 divide a } m^2$$

$$\therefore \text{ 2 divide a } m$$

$$\therefore \quad m = k2$$

$$\therefore \quad k^2 4 = n^2 \cdot 2$$

$$\therefore \quad k^2 \cdot 2 = n^2$$

$$\therefore \text{ 2 divide a } n^2$$

$$\therefore \text{ 2 divide a } n$$

lo cual no puede ser por consiguiente p no es racional.

Así que no todos los puntos de ℓ son racionales. Así que no todos los puntos q de ℓ tienen una relación directa con T_{OU}, sin embargo podemos encontrar una colección de puntos racionales q_n una q_n para cada n, tal que

$$|q - q_n| < 1/n$$

$\therefore$

podemos reemplazar cualquier q por una q_n racional con el grado de exactitud $1/n$ que puede ser tan chicos como queramos

<u>Corolario</u> Si ℓ_1 y ℓ_2 son semirrectas que parten de un punto P, entonces

$$\operatorname{Sen}(\widehat{\ell_1,\ell_2})^2 + \cos(\widehat{\ell_1,\ell_2})^2 = 1.$$