Miscelánea Matemática **33** (2001) 1–19 SMM

La aportación de Gauss a la geometría hiperbólica: su carteo con matemáticos y científicos de su época

Sonia Ursini
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav, IPN
sursinil@mailer.main.conacyt.mx

Introducción.

A principios del siglo XIX, después de varios siglos de intentos infructuosos por demostrar el V Postulado de Euclides a partir de los otros cuatro, se abren paso las primeras ideas acerca de la posibilidad de desarrollar una geometría no-euclidiana, geometría que se construye negando el V Postulado y considerando válida la hipótesis del ángulo agudo. La hipótesis del ángulo agudo implica que la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que dos rectos y que dada una recta en el plano y un punto exterior a ella, hay una infinidad de paralelas por ese punto a la recta dada.

Se suele atribuir la paternidad de estas ideas a tres grandes matemáticos que las desarrollan de manera casi contemporánea y, al parecer, independiente.

En 1826 Nikolai Ivanovich Lobachevski expone ante los miembros de la Facultad de Físico-Matemática de la Universidad de Kazan, sus ideas acerca de una nueva geometría. El manuscrito, titulado *Exposition succincte des principes de la Géomètrie avec une demonstration rigoureuse du theorème des parallèles*, fue entregado a una comisión de profesores de la misma Universidad y al parecer se extravió (Lombardo-Radice, 1974). Entre 1829 y 1830 Lobachevski publica en el periódico Kazanski Vestnik algunos artículos bajo el título *Acerca de los fundamentos* *de la geometría.* Estos artículos constituyen la primera obra publicada que se conozca, acerca de la geometría no-euclidiana. En 1835 publica la *Geometría Imaginaria.* Más adelante, entre 1835 y 1838 publica por partes los *Nuevos Principios de la Geometría con una Teoría Completa de las Paralelas* donde se incluye el desarrollo completo de la que había denominado Geometría Imaginaria.

Por otro lado, en 1832 el matemático húngaro Wolfgang Bolyai publica dos volúmenes de matemáticas elementales titulados *Tentamen.* En ellos reúne sus ideas acerca de los principios de la matemática e incluye, como un apéndice al primer volumen, una nueva teoría sobre el espacio desarrollada por su hijo, Janos Bolyai (1802-1866). En este apéndice, titulado *La ciencia absoluta del espacio*, Janos Bolyai da una definición de rectas paralelas y sus propiedades, y a partir de ello desarrolla una geometría no-euclidiana. Janos Bolyai define las paralelas diciendo "*Si el rayo AM no es cortado por el rayo BN situado en el mismo plano, pero es cortado por todo rayo BP comprendido en el ángulo ABN, diremos que al rayo BN es paralelo al rayo AM ...*" (Bolyai J., 1832, p. 5).

El otro gran matemático al que se suele considerar entre los iniciadores de la geometría no-euclidiana es Karl Friedrich Gauss (1777–1855). A diferencia de N.I. Lobachevski y J. Bolyai, Gauss no dejó publicación alguna que nos permita apreciar sus aportaciones a la nueva geometría. La única información que se tiene al respecto se encuentra en las cartas que intercambió a lo largo de más de tres décadas con algunos colegas y amigos. En éstas discute sus ideas acerca de la posibilidad de desarrollar una geometría distinta a la geometría euclidiana y presenta algunos avances. Sin embargo, no deja de despertar cierta curiosidad el hecho de que no existan publicaciones de Gauss sobre geometría no-euclidiana, sobre todo cuando recordamos que este tema le interesó profundamente y trabajó sobre él a lo largo de 30 ó 35 años de su vida, como él mismo lo comenta en una carta dirigida a su amigo Wolfgang Bolyai en 1832. Para satisfacer esta curiosidad sería quizás necesario salirse del ámbito de las matemáticas y adentrarse en un análisis socio-histórico de la época y del ambiente en el que vivió Gauss. Habría que analizar además la personalidad de este matemático, astrónomo y geodesta alemán. No es éste, sin embargo, el propósito de este escrito. Aquí sólo comentaremos que en las universidades alemanas de la época se consideraba que la geometría euclidiana era la *única* geometría que describía correctamente el espacio. Como consecuencia de amplias discusiones al respecto, ya en 1763 en la Universidad de Göttingen se había declarado, de manera oficial, la necesidad de someterse a la geometría euclidiana. Gauss se formó en la Universidad de Göttingen, fue director del Observatorio Astronómico de Göttingen y varias veces decano de la Facultad de Astronomía de esta Universidad. Esto es, pertenecía a las autoridades académicas, era un académico reconocido y apreciado. Sus biógrafos lo describen además como una persona que siempre trataba de evitar los enfrentamientos, en particular con las autoridades (tanto las académicas como las estatales); era muy conservador, nacionalista, tradicionalista y admirador de la realeza y la aristocracia.

Esta información junto con los comentarios que hace el mismo Gauss en alguna de sus cartas, pueden ayudarnos a formular algunas hipótesis que nos permitan entender por qué este gran matemático nunca publicó sus ideas acerca de una geometría no-euclidiana. En una carta enviada a Taurinus en 1824, por ejemplo, Gauss pide absoluta discreción con las ideas sobre geometría que allí va a expresar. En otra carta, que envía a Bessel en 1829, manifiesta su temor a las reacciones que pudieran provocar sus ideas acerca de la geometría al no ser debidamente comprendidas. Gauss temía exponer públicamente sus ideas, si bien las discutía en privado, aunque siempre de manera muy sucinta y sólo al alcance de expertos en el tema. Exponer abiertamente sus concepciones sobre geometría hubiera implicado criticar las ideas dominantes, enfrentarse con lo establecido, probablemente provocar una reacción oficial desfavorable. Parece que Gauss no estaba dispuesto a enfrentar situaciones de este tipo.

Finalmente, es también interesante observar como su personalidad y su carácter profundamente conservador influyeron en la producción misma de sus ideas. Al analizar algunas de las cartas queda de manifiesto el conflicto que se generaba entre sus principios conservadores y las ideas innovadoras que lo empujaban hacia la aceptación y el desarrollo de una geometría no-euclidiana, y este conflicto parece haber frenado además un desarrollo temprano y más completo de la misma. Pero finalmente Gauss admitió la posibilidad de una geometría distinta a la euclidiana, que no asume como cierto el V Postulado, y esto le permitió desarrollar varios de sus aspectos, aunque nunca los presentó públicamente.

Las ideas de Gauss a través de su correspondencia.

Los intercambios epistolares que Gauss sostuvo con amigos y colegas y en los cuales discute sus puntos de vista acerca de los fundamentos de la geometría, pueden dividirse en tres grandes períodos:

I. Período. En este período la correspondencia que sostiene Gauss principalmente con Wolfgang Bolyai (carta de 1799 y carta de 1804) revela su fuerte preocupación por tratar de probar el V Postulado de Euclides.

II. Período. Las notas personales de Gauss de 1813 y las cartas que intercambia con Gerling (1816), Wechter (1816) y Olbers (1817) nos hacen partícipes de las dudas que se están gestando en Gauss acerca de la unicidad de la geometría euclidiana. Ponen además de manifiesto sus primeras consideraciones acerca de la posibilidad de que se pueda desarrollar una geometría no-euclidiana.

III. Período. Este período abarca la correspondencia que Gauss intercambió con colegas y amigos entre 1818 y 1832. En este lapso bastante largo de tiempo se carteó con Gerling (1818, 1819, 1832), Taurinus (1824), Schumacher (1831) y Wolfgang Bolyai (1832). Se cuenta además con sus notas personales de 1828. Tanto de las cartas como de sus notas se desprende que Gauss ha llegado a aceptar la posibilidad de desarrollar una geometría no-euclidiana totalmente coherente, que no incluye el V Postulado de Euclides, y la desarrolla, si bien no publica nada al respecto.

A continuación se comentan de manera muy sucinta estos tres períodos. Para ello se toman como referencia las traducciones parciales y los comentarios que aparecen en Bonola (1906), Coxeter (1977) y Lombardo-Radice (1974).

Cartas del I. Período.

El interés de Gauss gira alrededor de la prueba del V Postulado de Euclides.

1799 - carta a W. Bolyai. Esta carta contiene, al parecer, el primer registro escrito al que se tiene acceso de las ideas de Gauss acerca de los fundamentos de la geometría. En ella Gauss da una prueba del V Postulado de Euclides asumiendo su falsedad de manera similar a como lo hicieran Saccheri y Lambert años antes. No hay pruebas contundentes de que Gauss conociera los trabajos de estos últimos. Sin embargo, Gauss no queda satisfecho con la demostración que realiza y comenta en su carta a su amigo y compañero de estudios Wolfgang Bolyai: "*Por ejemplo, si se pudiera demostrar que es posible tener un triángulo rectilíneo cuya área fuera mayor que cualquier área dada, entonces estaría listo para probar con absoluto rigor toda la geometría*" (Bonola, 1906, p. 65).

1804 - carta a W. Bolyai. Esta carta contiene algunos comentarios de Gauss acerca de las paralelas y surgen en respuesta a la Teoría de las Paralelas escrita por Wolfgang Bolyai. Conviene mencionar que Wolfgang Bolyai se ocupó de este tema a lo largo de toda su vida. En la carta Gauss expresa a su amigo el deseo de que logren vencer por fin los obstáculos encontrados en estas investigaciones que preocupan a ambos.

Cartas y notas del II. Período.

Gauss manifiesta su insatisfacción con los logros obtenidos y empieza a discutir la posibilidad de desarrollar una geometría no-euclidiana.

1813 - de las notas de Gauss. En sus notas personales Gauss registra el comentario siguiente: "*En la teoría de las paralelas aun no hemos progresado más allá de Euclides. Es una vergüenza para la matemática que tarde o temprano tendrá que adquirir otro aspecto*" (Coxeter, 1977, p. 388). Aquí no hay aun comentario alguno sobre una nueva geometría, pero se expresa claramente la insatisfacción con lo logrado hasta el momento.

1816 - carta a C. L. Gerling. En esta carta Gauss retoma la discusión acerca de las pruebas del V Postulado señalando el error cometido por Legendre en su prueba. En ésta, así como otras cartas de este período, Gauss empieza a mencionar la idea de una *nueva geometría* para la que existe una unidad absoluta de medida que llama *la constante.*

1816 - carta de Wechter. Gauss recibe una carta de Wechter. De los comentarios de este último se desprende que Gauss había estado discutiendo con él acerca de una nueva geometría que denominaba Anti-Euclidiana. Wechter escribe " *Si su geometría Anti-Euclidiana es cierta ¿por qué "la constante" queda indeterminada?*" (Coxeter, 1977, p. 388).

1817 - carta a H. W. M. Olbers. En esta carta a Olbers hay evidencias de las dudas que aún acechaban a Gauss y de lo difícil que le resultaba aceptar la existencia de una geometría diferente a la Euclidiana. Escribía: "*Llego más y más a la conclusión de que no se puede probar la necesidad de nuestra geometría (la euclidiana). Quizás en otra vida obtendremos cierta comprensión de la naturaleza del espacio, lo que por ahora está fuera de nuestro alcance*". (Coxeter, 1977, p. 388–389).

Cartas y notas del III. Período.

Gauss acepta la posibilidad de una geometría no-euclidiana, da definiciones y desarrolla demostraciones.

1818 - carta de C. L. Gerling. A petición de Schweikart, profesor de jurisprudencia, Gerling envió a Gauss un memorandum solicitando su opinión sobre las ideas que en él se presentaban. En el memorandum Schweikart afirmaba que existían dos geometrías: la Euclidiana y la *astral*. Consideraba que en la *geometría astral* la suma de los ángulos de un triángulo era distinta a 180°, era menor a 180°, y que esta suma decrecía cuando el área del triángulo crecía. Afirmaba también que, en esta geometría, si bien la altura de un triángulo rectángulo isósceles crecía al crecer los lados del triángulo, ésta no podía superar un determinado segmento que él, Schweikart, llamaba "*constante*".

1819 - carta a C. L. Gerling. Gauss contesta a la carta enviada por Gerling en 1818 y en ella alaba el trabajo desarrollado por Schweikart. Comenta que el defecto angular de un triángulo no sólo aumenta con el área, sino que es proporcional a ésta. Añade también que él mismo ha ampliado la geometría *astral* y que podría probar todo si se conociera la "constante" de Schweikart.

1824 - carta a F. A. Taurinus. Gauss dirige esta carta a Taurinus, sobrino de Schweikart, y le solicita explícitamente guardar absoluta discreción acerca de lo que le va a comentar. En esta carta encontramos por primera vez una referencia explícita, por parte de Gauss, a la geometría no-euclidiana: "*No puedo encontrar contradicción alguna que surja de esta geometría no-euclidiana*" (Coxeter, 1977, p. 389). Dirá además: "*Lo que en este sistema repugna a nuestra razón es que, si éste fuese verdadero, en el espacio existiría un segmento (geométricamente) definido, si bien desconocido para nosotros. Sin embargo, me parece que si prescindimos de la sabiduría verbal de los metafísicos, vacía de significado, sabemos muy poco o casi nada de la esencia del espacio: no podemos confundir lo que a nuestros ojos resulta algo no natural con lo absolutamente imposible*" (Lombardo-Radice, 1974 p. 34). Con este comentario Gauss manifiesta claramente su inconformidad con las ideas oficialmente establecidas. Por eso, quizás, insistió en la discreción. Afirma además que al suponer que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es menor que 180° lleva a una geometría diferente a la euclidiana, pero consistente, que él ya ha desarrollado completamente. Menciona también la existencia de una constante, unidad absoluta de longitud, cuyo valor no se puede fijar a priori.

1828 - de las notas de Gauss. Las notas personales de Gauss de este período también dan testimonio de su preocupación por el tema en cuestión. Aparecen nuevamente registros de los intentos de Gauss para probar, de manera independiente del V Postulado, que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Repite de hecho lo ya desarrollado anteriormente por Schweikart. Prueba varias de las proposiciones de Euclides siguiendo los pasos del mismo Euclides. Estas notas sugieren la persistencia de cierta resistencia de Gauss en aceptar una geometría diferente, de sus intentos por probar la validez absoluta de la geometría euclidiana, y de lo difícil que le resultaba aceptar que ambas podrían eventualmente convivir.

1831 - carta a H. K. Schumacher. Aquí Gauss comenta acerca de su propio ensayo titulado *Líneas Paralelas*, no publicado, y escribe: "*Después de meditar cerca de cuarenta años sin escribir algo al respecto... he empezado, por fin, a poner por escrito algunos de mis pensamientos para que no mueran conmigo*". (Coxeter, 1977, p. 389). En este ensayo Gauss da, entre otras, una definición de líneas paralelas, demuestra que esta propiedad es simétrica y transitiva y define puntos correspondientes sobre dos paralelas.

1832 - recibe el escrito de Janos Bolyai titulado "La Ciencia Absoluta del Espacio". En enero de 1832 Gauss recibe el texto de geometría escrito por su amigo Wolfgang Bolyai en 1829. Este texto incluye un Apéndice escrito por el hijo de Wolfgang Bolyai, Janos Bolyai, titulado *La Ciencia Absoluta del Espacio.* Se dice que una primera copia del texto ya había sido enviada a Gauss con anterioridad, sin embargo, parece que éste nunca la recibió.

1832 - carta a C. L. Gerling. En febrero de 1832 Gauss comenta, en una carta a Gerling, acerca del Apéndice escrito por Janos Bolyai. Entre otras cosas afirma que Janos ha redescubierto todas las ideas y resultados que él mismo, Gauss, ya había desarrollado. Considera que Janos las ha sabido presentar de una manera muy elegante, si bien demasiado concisa para que alguien no familiarizado con el tema las pueda entender.

1832 - carta a W. Bolyai. Esta carta está dirigida a Wolfgang Bolyai. En ella Gauss reivindica de manera muy sutil la primacía de las ideas expuestas por Janos Bolyai en el ya citado Apéndice. Dice que lo desarrollado por este último coincide casi totalmente con lo que él, Gauss, había estado pensando en los últimos 30 ó 35 años. Añade también que si bien no había tenido la intención de publicar estas ideas, finalmente había decidido hacerlo para que no murieran con él. Sin embargo, con gran sorpresa constata que se le está ahorrando esa molestia y manifiesta su alegría por el hecho de que sea el hijo de un viejo amigo el que se le haya adelantado en ponerlas por escrito. Hace además algunos comentarios corrigiendo la nomenclatura usada por Janos Bolyai. Finalmente afirma que él tiene otra manera de proceder para demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo difiere de 180° en una cantidad proporcional al área del triángulo, e incluye en la carta una prueba, puramente geométrica, que consta de siete pasos.

Si bien las cartas y las notas de Gauss aportan elementos muy valiosos que nos permiten conocer las ideas de Gauss acerca de la geometría no-euclidiana en distintas etapas de su vida, no encontramos en ellas ni una exposición clara y sistemática de esta nueva geometría ni un desarrollo detallado de las pocas demostraciones que allí se incluyen. Tanto en sus notas como en sus cartas Gauss es muy escueto, no proporciona detalles, se dirige exclusivamente a los pocos iniciados en el tema. Parece que Gauss cuida siempre que sus ideas respecto a la geometría no-euclidiana no trasluzcan demasiado y, eventualmente, le acarreen problemas. Muy diferente en este aspecto es, como ya lo mencionamos al principio, el trabajo de Lobachevski, que es el único que desarrolla plenamente y en detalle la nueva geometría y externa públicamente sus ideas en múltiples ocasiones.

A partir de las cartas y las notas personales de Gauss no es fácil apreciar plenamente hasta qué punto había desarrollado la nueva geometría. Sin embargo, si nos tomamos el trabajo de hacer explícitos los pasos que subyacen a las demostraciones que Gauss presenta de manera muy concisa y escueta, nos damos cuenta del grado de este desarrollo. Con este propósito a continuación se analiza la demostración que incluyó en la carta dirigida a Wolfgang Bolyai en 1832. Para ello nos basamos en la traducción de la misma que aparece en Coxeter (1977).

Como ya se mencionó, en la carta que dirige a Wolfgang Bolyai en 1832 Gauss incluye una demostración de siete pasos en la que prueba que *la suma interna de los ángulos de un triángulo puede ser menor que 180° y que ésta difiere de 180° en una cantidad proporcional al área del triángulo.*

A continuación se presenta la demostración de Gauss (se usa la letra cursiva para resaltarla) y se comenta cada uno de los siete pasos.

El primer paso de la demostración de Gauss incluye una afirmación acompañada de una figura:

I. *Tres líneas paralelas por pares en direcciones opuestas forman un triángulo T triplemente asintótico.*

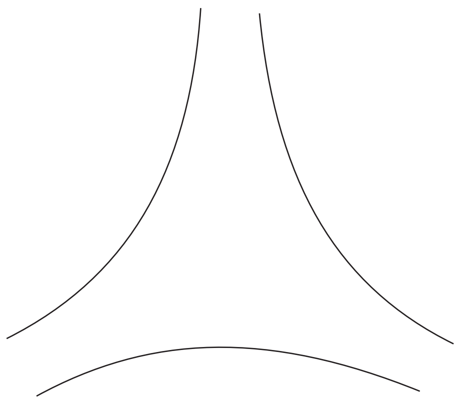

Figura 1.

Ante todo hay que analizar qué implica esta afirmación. ¿Puede existir un triángulo triplemente asintótico? La contestación es afirmativa si se considera que:

1. dada una recta y un punto exterior a ella, existen dos paralelas a la recta que salen del punto en sentidos opuestos;

2. dado un ángulo siempre existen dos líneas paralelas con ese ángulo como ángulo de paralelismo.

Gauss en su ensayo titulado *Líneas Paralelas* (no publicado) definió qué entendía por paralelas:

> *Si las líneas rectas coplanares AM, BN no se intersectan mutuamente mientras que cualquier línea recta que pasa por A entre AM y AB corta BN, entonces se dice que AM es paralela a BN.*

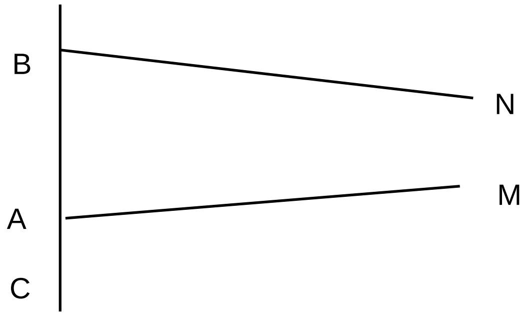

Figura 2.

(Bonola, 1906, p. 67–68)

Esta definición implica que la paralela a BN por el punto A es el primer rayo, de un haz de rayos que salen de un punto, que no corta la recta BN. Gauss no menciona de manera explícita el ángulo de paralelismo pero lo usa. Se trata del ángulo que forma la paralela a una recta dada con la perpendicular a la misma recta trazada desde el punto del cual sale el rayo paralelo. El ángulo de paralelismo se suele indicar con $\pi(a)$ donde a representa la distancia del punto a la recta.

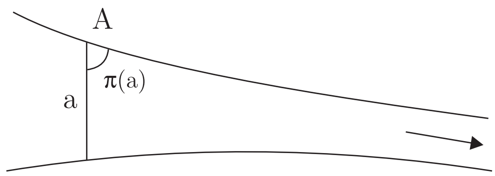

Figura 3.

Con estas premisas construyamos un triángulo triplemente asintótico. Para ello consideremos una recta y un punto A exterior a la misma, a una distancia a

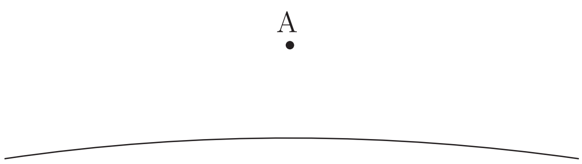

Figura 4.

Tracemos las dos paralelas a la recta por el punto A indicando con $\pi(a)$ el ángulo de paralelismo correspondiente

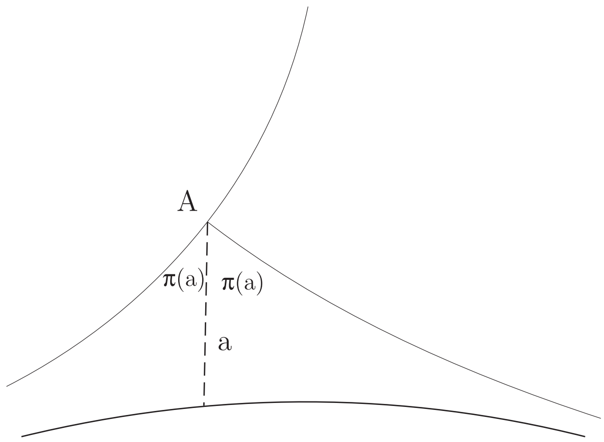

Figura 5.

Al bisectar el ángulo $\pi - 2\pi(a)$ se obtienen los ángulos $\pi(c)$

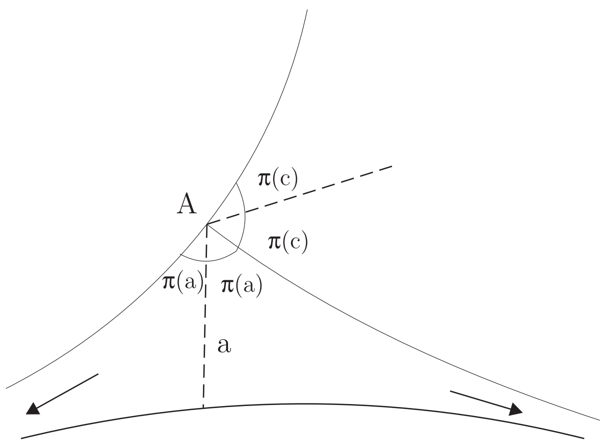

Figura 6.

El ángulo $\pi(c)$ puede ser también un ángulo de paralelismo y, por lo tanto, a la distancia c del punto A y perpendicularmente a la bisectriz del ángulo $\pi - 2\pi(a)$ encontraremos la paralela correspondiente

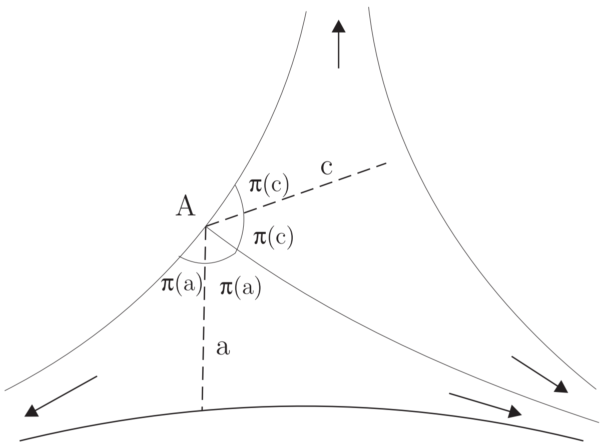

Figura 7.

Hemos construido así un triángulo triplemente asintótico constituido por las tres rectas *ab*, *cd* y *ef* , que son paralelas por pares en direcciones opuestas: *ab* paralela a *dc*, *cd* paralela a *fe* y *ef* paralela a *ba*.

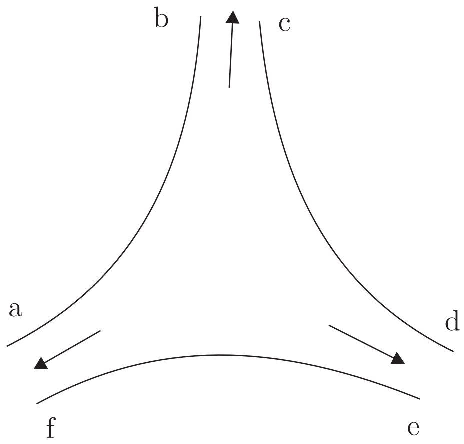

Figura 8.

En el segundo paso de su demostración Gauss afirma:

II. *El área de T es finita (si así no fuera se podría aproximar por un triángulo ordinario de área arbitrariamente grande, lo cual volvería euclidiana a esta geometría).*

Para entender esta afirmación hay que remitirse a la carta de 1799 que Gauss escribió a Wolfgang Bolyai en la que se puede leer "*Por ejemplo, si se pudiera demostrar que es posible tener un triángulo rectilíneo* *cuya área fuera mayor que cualquier área dada, entonces estaría listo para probar con absoluto rigor toda la geometría*" (Bonola, 1906, p. 65). Al no poder probar esta afirmación Gauss acepta la hipótesis contraria, lo que implica que el triángulo en cuestión tiene un área finita.

El tercer paso de la demostración consta de la afirmación siguiente:

III. *Una línea fe y dos líneas a ella paralelas desde un punto exterior A forman un triángulo doblemente asintótico cuya área es una función $f(\phi)$ del ángulo externo en A, área que crece desde $f(0) = 0$ hasta $f(\pi) = t$.*

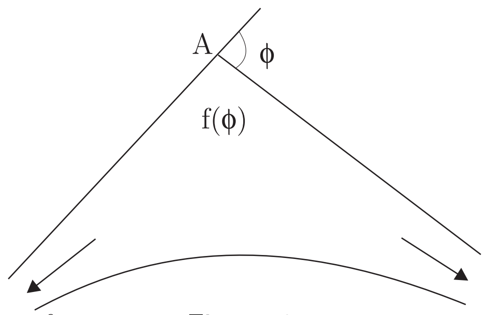

Figura 9.

En efecto, podemos observar en la gráfica que cuando el ángulo $\phi = 0$, las dos paralelas a la recta fe forman entre si un ángulo de 180° y estamos, por lo tanto, en la geometría de Euclides. Desaparece así el triángulo doblemente asintótico y, por lo tanto, su área $f(0)$ es igual a cero. Por lo contrario, cuando el ángulo ϕ tiende a π nos aproximamos al triángulo triplemente asintótico ya mencionado en el primer paso de esta demostración, cuya área $f(\pi)$ es igual a t .

En el cuarto paso se afirma:

IV. *En la siguiente figura vemos que $f(\phi) + f(\pi - \phi) = t$.*

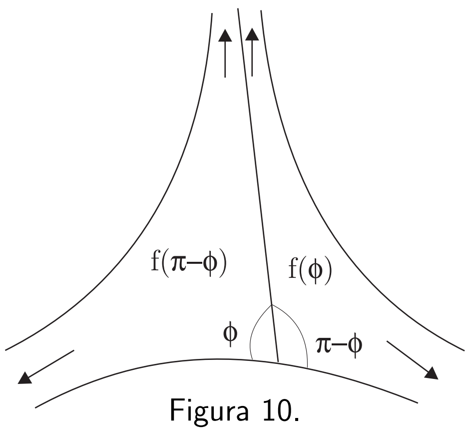

Figura 10.

Lo que se observa aquí es que Gauss descompone el triángulo triplemente asintótico en dos triángulos doblemente asintóticos. Si recordamos la manera en la que se procedió para construir el triángulo doblemente asintótico, nos damos cuenta que esta descomposición es posible:

Si se acepta además la afirmación hecha en el paso tres, queda evidente este cuarto paso.

El siguiente es el quinto paso de la demostración de Gauss:

V. *En la siguiente figura vemos que*

$$f(\phi) + f(\psi) + f(\pi - \phi - \psi) = t\,.$$

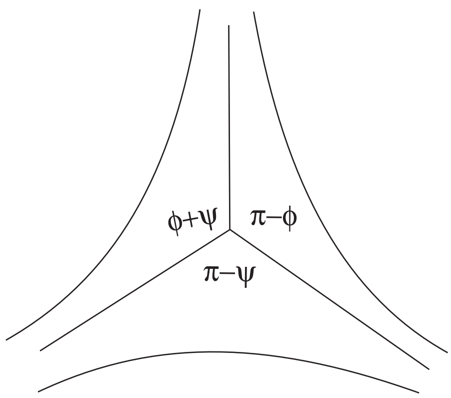

Figura 11.

Para aceptar esta afirmación hay que considerar otra construcción de un triángulo triplemente asintótico. Consideremos la recta bb' y un punto A exterior a la misma. Tracemos las dos paralelas a la recta que salen del punto A. Llamemos ψ al ángulo externo en A.

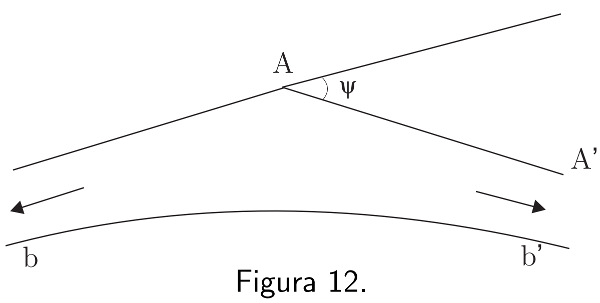

Figura 12.

Podemos considerar ahora a ψ como un ángulo de paralelismo y construir la paralela dd' a la recta AA'.

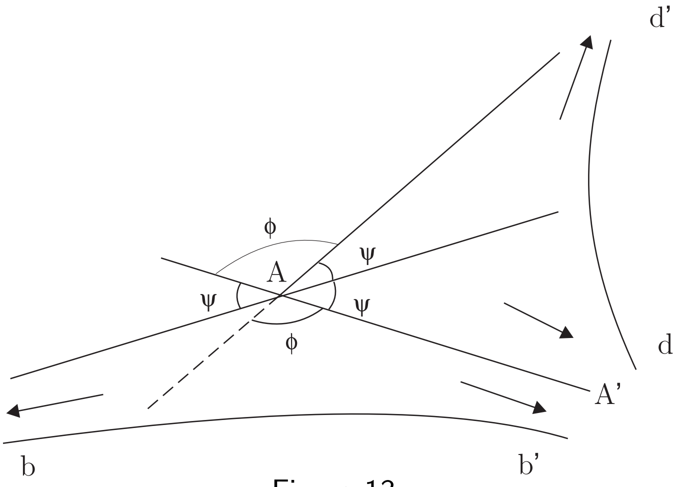

Figura 13.

Consideremos ahora el ángulo $(\phi+\psi)/2$ como ángulo de paralelismo y construimos la paralela correspondiente ee'.

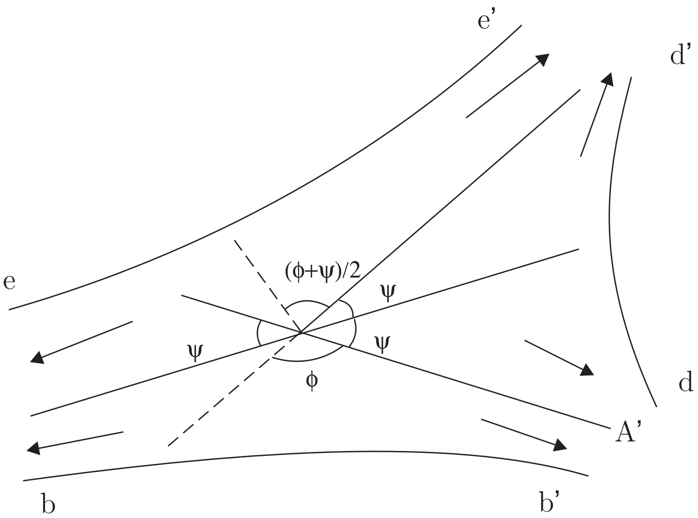

Figura 14.

Consideremos ahora los tres triángulos doblemente asintóticos bAb', dAd' y eAe'. Por el paso tres el área de estos tres triángulos será respectivamente $f(\psi), f(\phi)$ y $f(\pi-\phi-\psi)$. De lo cual se obtiene la siguiente ecuación $f(\phi)+f(\psi)+f(\pi-\phi-\psi)=t$.

Sigue el sexto y penúltimo paso de la demostración:

VI. *Dado que* $f(\phi)+f(\psi)=t-f(\pi-\phi-\psi)=f(\phi+\psi)$, $f(\phi)/\phi$ *es constante y es* $f(\phi)/\phi=t/\pi$.

Del paso cuatro se tiene que $f(\phi)+f(\pi-\phi) = t$ o sea $f(\phi) = t-f(\pi-\phi)$. Si ahora se sustituye en esta expresión el ángulo ϕ por el ángulo $\phi+\psi$ se tiene que: $f(\phi+\psi)+f(\pi-\phi-\psi) = t$ esto es $f(\phi+\psi) = t-f(\pi-\phi-\psi)$. Pero por el paso V sabemos que $f(\phi) + f(\psi) = t - f(\pi - \phi - \psi)$, por lo tanto se tendrá, $f(\phi) + f(\psi) = f(\phi + \psi)$.

Lo anterior implica que $f(\phi + \phi) = f(\phi) + f(\phi) = 2f(\phi)$. Se trata por lo tanto de una función lineal. Esto nos permite afirmar que la relación que existe entre el ángulo y el área debe ser constante. En efecto, consideremos $\phi = n\psi$, se tendrá: $f(\phi)/\phi = f(n\psi)/n\psi = nf(\psi)/n\psi = f(\psi)/\psi$.

¿Cuál es esta constante? La constante en realidad se proporciona desde el paso tres, cuando se afirma que el área es función del ángulo externo y ésta crece desde $f(0) = 0$ hasta $f(\pi) = t$. Tendremos así que para todo ángulo la relación entre éste y el área es $f(\phi)/\phi = t/\pi$.

Éste es el último paso, el séptimo, con el cual Gauss termina la demostración anunciada:

VII. *En la siguiente figura vemos cómo un triángulo T triplemente asintótico puede descomponerse en un triángulo finito ABC de área digamos Z y tres triángulos doblemente asintóticos cuyas áreas son:*

$$\alpha = f(A) = (t/\pi)A$$
$$\beta = f(B) = (t/\pi)B$$
$$\gamma = f(C) = (t/\pi)C$$

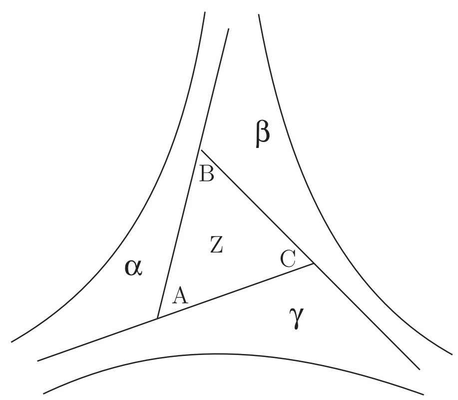

Figura 15.

De donde $t = \alpha + \beta + \gamma + Z = (t/\pi)(A + B + C) + Z$ y $Z = (t/\pi)(\pi - A - B - C)$.

Ante todo veamos que es factible llevar a cabo la construcción propuesta[1]. Consideremos un triángulo triplemente asintótico y tomemos un punto arbitrario en su interior. Tracemos a partir de este punto las dos paralelas a la recta bb'. Por transitividad estas dos rectas son a su vez paralelas en un sentido de paralelismo también a $d'd$ y a $e'e$ respectivamente.

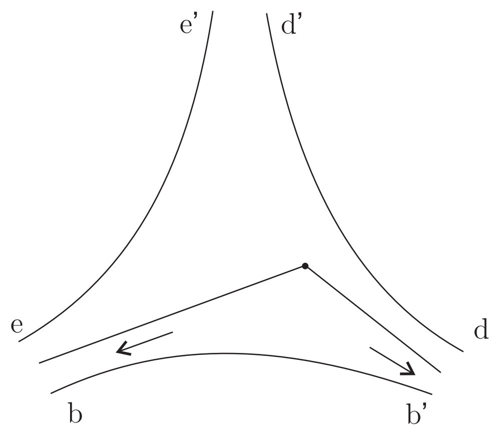

Figura 16.

Tomemos ahora otro punto arbitrario sobre la paralela común a $b'b$ y $e'e$ y tracemos a partir de este punto la otra paralela a la recta ee'.

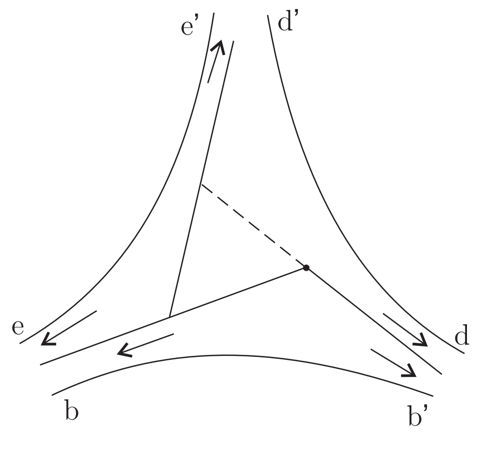

Figura 17.

[1]Para esta construcción no se tomará en consideración el axioma de Pasch –que afirma que "una recta que entra a un triángulo por un vértice sale por el lado opuesto a ese vértice"– dado que Pasch es posterior a Gauss.

Prolonguemos ahora la paralela común a bb' y $d'd$ hasta que cruce la paralela a ee'. No hay duda de que llegará a cruzarla dado que ee', su paralela y dd' se acercan asintóticamente, mientras que la paralela común a bb' y $d'd$, que es la que estamos considerando, se aleja cada vez más de $d'd$ cuando la prolongamos (esto por definición de paralelismo).

Hemos construido así un triángulo finito, cuyos ángulos denotaremos como hace Gauss con A, B y C y cuya área se designará con Z.

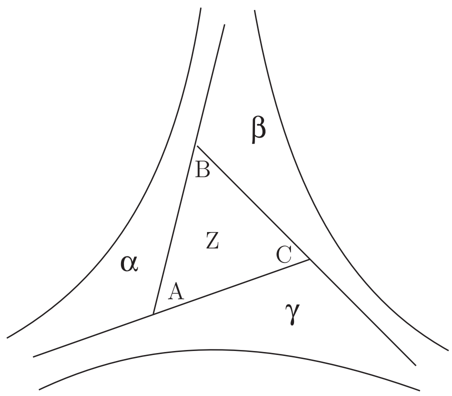

Figura 18.

Las áreas de los tres triángulos doblemente asintóticos obtenidos se pueden expresar en función de la constante determinada en el paso seis: $\alpha = f(A) = (t/\pi)A$, $\beta = f(B) = (t/\pi)B$, $\gamma = f(C) = (t/\pi)C$.

Considerando que el área del triángulo triplemente asintótico es igual a t, se tiene $t = \alpha + \beta + \gamma + Z = (t/\pi)(A + B + C)$ de donde el área del triángulo finito resulta ser $Z = (t/\pi)(\pi - A - B - C)$. Por lo tanto, la suma de los ángulos de un triángulo finito difiere de 180° por una cantidad proporcional a su área, ya que: $A + B + C = \pi - Z\pi/t$.

Comentario a modo de conclusión.

La demostración que acabamos de analizar y cuyos pasos hemos hechos explícitos, nos permite ver hasta qué punto había desarrollado Gauss sus ideas acerca de la geometría en la que se supone como cierta la hipótesis del ángulo agudo en sustitución del V Postulado de Euclides. Podemos así observar que Gauss estaba usando de manera implícita muchas de las ideas fundamentales sobre las que se sustenta esta nueva geometría. Esto reafirma lo que él mismo había comentado en sus cartas cuando decía haber avanzado mucho en el desarrollo de esta nueva geometría. Sin embargo, a diferencia de N. I. Lobachevski o Janos Bolyai, no hay evidencias que nos permitan afirmar que Gauss logró el desarrollo completo de una geometría no-euclidiana. Éste probablemente estaba en su mente pero no dejó testimonios escritos y bien estructurados de ello.

Referencias

[1] J. Bolyai (1832). The Science Absolute of Space, en Bonola R. (1906), *Non-Euclidean Geometry*. Dover Publications.

[2] R. Bonola (1906). Non-Euclidean Geometry. Dover Publications.

[3] H.S.M. Coxeter (1977). Gauss as a Geometer. *Historia Matemática* **4**, 379–396.

[4] L. Lombardo-Radice (1974). Lobačevskij, matematico-filosofo, en N. I. Lobačevskij, *Nuovi Princìpi della Geometria, con una teoria completa delle parallele*, pp. 13–54, Universale Scientifica Boringhieri.