Miscelánea Matemática **62** (2016) 81-103 SMM

Acerca de la comprensión en matemáticas

Carlos Torres Alcaraz
Facultad de Ciencias, UNAM
Ciudad de México, D. F.
carlos.torres.0505@gmail.com

1. Introducción

No hace mucho tiempo la filosofía de las matemáticas comenzó a interesarse en diversos problemas que usualmente había desdeñado. Más allá de la preocupación por los fundamentos, hoy en día comprende cuestiones tales como el desarrollo de los conceptos matemáticos (v. gr., el concepto de número, o el de espacio), el papel y uso de diagramas, los modos de argumentación y el sutil problema de la comprensión matemática. Todo esto, precisamente, con el fin de *comprender* mejor las matemáticas. Una consecuencia de lo anterior es que las investigaciones se han enfocado más que nunca en el quehacer matemático, reconociendo con ello la condición de actividad humana de esta disciplina.

En esta ocasión abordaremos el problema de la *comprensión* en matemáticas, el cual se presenta en la práctica bajo distintas modalidades. Tenemos, por ejemplo, la *comprensión* en el aula, la *comprensión* de un método o procedimiento, la *comprensión* de un teorema, la *comprensión* de un problema a través de su visualización, la *comprensión* de una demostración, la *comprensión* de una teoría, la *comprensión* de los tipos de razonamiento (v. gr., el razonamiento en los *Elementos* de Euclides), la *comprensión* de los vínculos entre distintas áreas de las matemáticas (un sentido ampliamente expuesto por Philip Kitcher con relación a la unificación de teorías), la *comprensión* del modo en que se edifica una teoría (v. gr., la geometría de Hilbert) o la *comprensión* del pensamiento matemático mismo (su «naturaleza»).

Dentro de esta amplia gama de sentidos dirigimos nuestra atención hacia una cuestión de sumo interés: que no es sólo la voluntad de demostrar nuevos teoremas lo que mueve a los miembros de la comunidad matemática; por el contrario, también lo hace la voluntad de entender por qué las cosas son de una manera y no de otra. Con esto queremos decir, entre otras cosas, que el sentido y la riqueza de un teorema no necesariamente se ponen de manifiesto con su demostración. Esto, esperamos, nos llevará a mirar la actividad matemática desde otra perspectiva en la que la voluntad de entender sus resultados ocupa un importante lugar.

Salvo por algunas excepciones, estas cuestiones forman parte, por decirlo de algún modo, del *lado recóndito* del pensamiento matemático que las grandes escuelas —Logicismo, Formalismo e Intuicionismo— dejaron de lado, quizá porque las consideraban objeto de la psicología, la sociología o la pedagogía. Escuchemos a Paolo Mancosu, Klaus Frovin Jørgensen y Stig Andur Pedersen:

> En la segunda parte del siglo XX varios filósofos e historiadores han cuestionado si tales programas de fundamentación podrían agotar el reino de problemas filosóficos de importancia que nos podemos plantear acerca de la naturaleza de las matemáticas. Algunos lo han hecho en confrontación abierta con los programas fundacionistas que se centraron en el análisis lógico de la matemática, mientras que otros [...] han pedido una extensión del rango de cuestiones y problemas que deberían tratarse con relación a la comprensión de las matemáticas. La atención se ha dirigido entonces a la consideración de lo que los matemáticos hacen realmente cuando producen matemáticas. [...] Debido a ello, diversas cuestiones como la formación de conceptos, la comprensión, la heurística, los cambios en el estilo de razonamiento, el papel de las analogías y diagramas, etc. se han convertido en temas de interés. Los historiadores y filósofos están de acuerdo en que para entender las matemáticas hay más que el estudio de su estructura lógica, y ponen un mayor énfasis en la actividad matemática en tanto que actividad humana ¿Cómo se generan los conceptos matemáticos?, ¿cómo se enlaza este proceso con la justificación?, ¿qué lugar ocupan las imágenes visuales y los diagramas en la actividad matemática? Además de estas cuestiones cognitivas, uno también puede investigar cómo interactúa la matemática con las ciencias naturales, y cómo el pensamiento matemático depende o puede depender de la cultura en el que se halla inserto [10, p. 1].

En lo que sigue enumeramos algunos problemas que preocuparon a filósofos y matemáticos a finales del siglo XIX y primera mitad del XX (digamos, hasta el inicio de la segunda guerra mundial), y los comparamos con diversas cuestiones que en tiempos recientes han atraído nuestra atención:

Problemas Planteados por Frege, Russell, Hilbert, Poincaré, Brouwer, etc.	Era actual (digamos, a partir del último tercio del siglo XX)
¿Qué significa que una proposición matemática sea verdadera? ¿De qué tratan las teorías matemáticas? La matemática, ¿es parte de lógica, o tiene un objeto de estudio independiente de ella? ¿Es tautológica? ¿Cuál es el origen del Principio de Inducción Completa? ¿En qué sentido es «verdadero» el axioma de elección? ¿Cuál es la naturaleza de las proposiciones matemáticas? ¿Cuál es la fuente de su certeza? ¿Existe un concepto absoluto de la noción de prueba en las matemáticas? ¿Cómo están estructuradas las teorías matemáticas? ¿Cómo es posible el conocimiento matemático? ¿Qué son los números?	¿Por qué algunos teoremas tienen tantas demostraciones? ¿Cómo se formó el concepto de «espacio»? ¿El concepto de rigor ha sido siempre el mismo? ¿Qué significa comprender un teorema? ¿Es la búsqueda de nuevos teoremas lo que mueve a la matemática? Y si no, ¿qué otra cosa lo hace? ¿Todas las demostraciones tienen un mismo valor? ¿Podemos hablar de «estilos de demostración» en la matemática? ¿Qué lugar ocupan los diagramas en la geometría de Euclides? ¿Puede ser más importante el método de prueba que la proposición demostrada? ¿A qué se debieron los cambios en la matemática durante el siglo XVII? ¿Qué podemos decir de la imaginación y los experimentos mentales con relación a la construcción del conocimiento matemático?

Con relación al tema que nos ocupa, en un trabajo publicado en [16] examinamos diversas circunstancias que rodearon al teorema de Desargues y que le otorgaron un lugar muy especial en las investigaciones de Hilbert, lo cual nos permitió: i) observar de cerca las preocupaciones (no todas) que lo llevaron a escribir los *Fundamentos de la Geometría*, y ii) tener una mejor comprensión del carácter y la estructura de dicha obra. Una de tales preocupaciones la podemos resumir en pocas palabras: Aclarar la naturaleza y los alcances del teorema de Desargues, es decir, *entender* todo lo que rodea a este teorema.

2. Primera cuestión: Saber y entender no son lo mismo

Comencemos con una cuestión muy simple relacionada con el tema de la demostración en matemáticas. Nuestro propósito es cuestionar la idea de que la demostración de un resultado conduce inequívocamente a su comprensión, es decir, lo explica.

Se trata de un ejemplo muy cercano a la matemática escolar.

La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2$ ¿es convergente? De ser así, ¿a qué número converge?

Por favor, antes de seguir leyendo intente resolver este problema. (Tras una pausa) Tratándose de una serie infinita podemos recurrir a la teoría de límites (¿no es eso lo que nos hace verdaderos matemáticos?) Veamos.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2^k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2^2)^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4)^k}.$$

Se trata, por tanto, de una serie geométrica de la forma $a+ar+ar^2+\cdots+ar^n$ con $a=\frac{1}{4}$ y $r=\frac{1}{4}$. Como sabemos, por la teoría de series, la suma parcial de los primeros n términos de una sucesión geométrica está dada por

$$S_n = \frac{a(1-r)^n}{1-r}.$$

Para determinar su convergencia debemos calcular

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r)^n}{1-r},$$

que en este caso es

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4}^n)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Es así que mediante una meticulosa manipulación algebraica y ciertos teoremas de la teoría de series (relativos a las series geométricas) hemos podido determinar el valor de la serie infinita. Sin negar la importancia de dicha teoría ni el valor de los teoremas utilizados para resolver el problema, hay algo que no nos satisface del todo: la escasa significación de lo anterior. Digamos que no nos conformamos con seguir ciegamente el razonamiento formal, sino que queremos entender la *idea* de la prueba (el contexto más profundo, no sólo la maquinaria formal) ¿Por qué la serie converge justamente a ese valor y no a otro? Es más, ¿por qué converge? ¿Acaso el resultado obtenido no se puede explicar de otra manera? ¿Nos debemos conformar con la ciega aplicación de ciertos procedimientos ya estandarizados para resolver problemas? Sí, sabemos que la teoría de series es el resultado del esfuerzo realizado por un gran número de matemáticos desde el siglo XVII, y que este aparato teórico, de suma utilidad en la práctica, es un maravilloso legado que debemos valorar, pero, ¿de eso y nada más de eso se trata la matemática, de que un conjunto de mentes brillantes solucione las cosas a gran escala y los demás actúen como meros usuarios? Si la respuesta del lector es afirmativa, nos parece que este es el momento de reconsiderar las cosas.

Repito. No se trata de vilipendiar la teoría formal de series y sucesiones. Todos sabemos que ésta constituye un enorme compendio en el que los resultados se presentan bajo una organización lógica casi perfecta. No obstante, este modo de presentación tiene el defecto de que en él se han borrado los caminos que siguieron sus creadores al obtener los resultados. El camino que se sigue es el de la lógica, no el del descubrimiento o la invención. Escuchemos a George Polya:

> Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa. Sin embargo, éste es sólo uno de sus aspectos. La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente sólo en pruebas. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo, así como la idea de la prueba antes de efectuarla en detalle. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez. El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba, pero ésta a su vez se descubre mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición [12].

En 1963 este autor ya había dicho algo parecido:

> ... el pensamiento matemático no es puramente «formal»; no sólo se ocupa de axiomas, definiciones y pruebas rigurosas, sino de muchas otras cosas que le pertenecen: generalización de casos observados, argumentos inductivos, argumentos por analogía, reconocimiento de un concepto matemático en, o extraído de, una situación concreta. El profesor de matemáticas tiene una excelente oportunidad para familiarizar a sus estudiantes con estos procesos de pensamiento «informales» de suma importancia, y con ello quiero decir que debería hacer un mejor uso de esta oportunidad en comparación con lo que suele hacerse hoy en día. Dicho de manera concisa aunque incompleta: Enseñemos probando las cosas por todos los medios, pero hagámoslo enseñando también a conjeturar [11, p. 606].

Un claro ejemplo de razonamiento por analogía es el que llevó a cabo Gödel al idear su famoso teorema de incompletud de la aritmética, llevado por el afán de imitar el razonamiento que pone en juego Jules Richard en su paradoja de 1905. La idea: Si pudiéramos construir en la aritmética de Peano un enunciado similar al de Richard en su argumento, un enunciado que en vez de hablar de su falsedad hablara de su indemostrabilidad en el sistema, esto tendría graves consecuencias (como las tuvo). El resto consistió en un enorme esfuerzo intelectual en el que las analogías y la creación de conceptos por similitud actuaron como arquetipos, como faros en medio de la obscuridad.

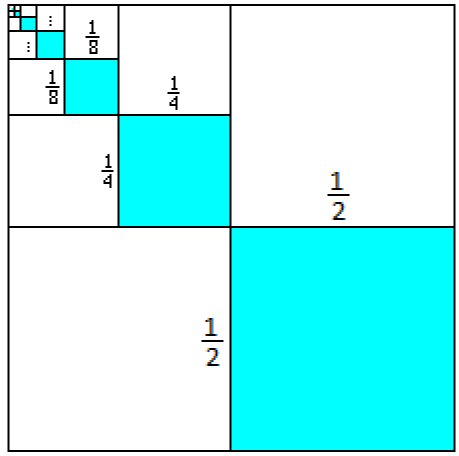
Es evidente que el trabajo matemático no sólo consiste en desarrollar rigurosos argumentos. Tal como lo señala Polya, en él se hallan presentes muchas otras cosas como la observación de casos y su generalización, el análisis de figuras, el manejo informal o intuitivo de los objetos, la puesta en juego de la imaginación, razonamientos por analogía y uno que otro *chispazo divino* (súbitas ocurrencias) que preceden a la lógica. Detrás de todo esto se halla también el deseo de comprender las cosas. Es más, en el proceso de elaboración de una teoría, por lo general el ordenamiento lógico (axiomático) es lo último que aparece. Quién realmente se interesa en las matemáticas no sólo quiere saber, sino entender (no sólo el qué o el cómo, sino el porqué, *inteligir* qué hay detrás de cada resultado).

Abundemos en el tema. El cálculo diferencial e integral, cuyos orígenes son anteriores al siglo XVII, no fue sistematizado sino hasta el siglo XIX con la introducción de la teoría de límites y el concepto de número real. Si sólo viéramos las cosas desde el punto de vista del resultado final (digamos, como lo presentan Haaser, LaSalle y Sullivan en su libro *Análisis matemático*) lo único que veríamos sería una estructura lógica sin ninguna explicación de cómo se llegó a ella, lo cual limitaría nuestra comprensión ¿Qué metas querían alcanzar quienes construyeron la teoría? ¿Acaso nunca se equivocaron? ¿Cómo obtuvieron tantos resultados? ¿Se los dictó algún ser superior? ¿Eran sobrehumanos? ¿Fueron capaces de idear tan poderosa teoría sólo por el gusto de jugar con ciertos conceptos (la cual, misteriosamente, después resultó de gran utilidad)?

El ejemplo con que iniciamos esta discusión no es trivial, al menos no lo es con relación al estudio y la enseñanza de las matemáticas. Cuestiones similares aparecen, por ejemplo, al tratar con las series de Taylor, donde se suele eliminar la *cola infinita* de la serie, reteniendo tan sólo los primeros términos:

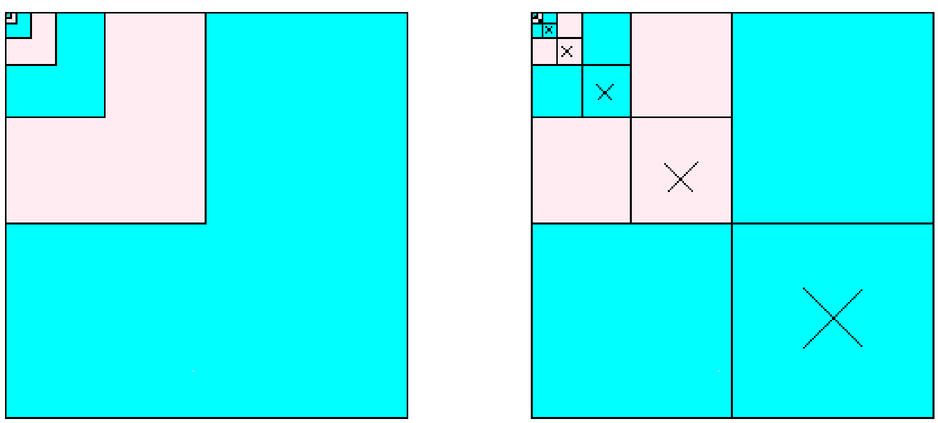
$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \text{vs.} \quad f(x_0) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

¿Cómo hacer para que los estudiantes se convenzan de que una suma infinita de números positivos no necesariamente crece hasta el infinito? ¿Y para convencerlos de que una suma infinita puede ser realmente insignificante? Un ejemplo convincente podría ser de gran ayuda. Uno de ellos es, justamente, el problema con que iniciamos esta discusión. No fue pensando en la teoría de series como se nos ocurrió, ni fue con la teoría de límites como descubrimos el valor de la suma $\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \ldots$ ¿Cómo lo hicimos? Observando con atención la siguiente figura, que después tuvimos el cuidado de ocultar. Veamos:



Una atenta mirada mostrará que se trata de una prueba visual de la igualdad $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

Podemos apoyar esta última afirmación con el siguiente argumento: Si dividimos el cuadrado unitario en «escuadras» como en la figura a la izquierda, y tomamos una tercera parte de cada escuadra (figura a la derecha), lo que obtenemos es la tercera parte de la superficie.



El resto consistió en expresar lo anterior en términos del álgebra. Y si bien el resultado se puede probar (tal como lo hicimos) con los recursos disponibles en la teoría de series, esto no va en contra del uso de diagramas, sino en defensa de la teoría: si en ella no pudiéramos derivar esta clase de resultados, ya la habríamos desechado. Su valor radica precisamente en que, por una parte, tiene el poder de probar con rigor muchas cosas que hemos descubierto por fuera de ella y, por la otra, en que nos permite llegar a conclusiones u obtener valores que de otro modo sería muy difícil alcanzar, o simplemente no podríamos.[1]

Podemos decir entonces que la fuente del resultado anterior no es la sofisticada teoría de series infinitas, sino su inmediata captación en un entorno diferente. Se trata de un descubrimiento basado en la observación de una figura en la que incluso se puede reconocer una estructura fractal, es decir, un patrón geométrico cuyas partes, en su conjunto, son idénticas al patrón total.[2] Esto concuerda con el señalamiento de Polya: antes de probar un teorema matemático hay que intuirlo, hay que conocer aquello que se quiere probar.

¿No constituye la solución gráfica de este problema un paso adelante en la vía de la comprensión? ¿Será cierto que el frío raciocinio y la mera manipulación algebraica, esto último altamente valorado por Leibniz y Hilbert, son suficientes para tener una clara comprensión de los resultados alcanzados? A estas alturas esperamos que la respuesta del lector sea un rotundo «no». No debemos olvidar que saber y entender no son lo mismo, y que la comprensión de la matemática requiere de algo más que la lógica. La construcción, manejo y observación de casos particulares, las analogías y la imaginería visual no se pueden arrojar así nomás por la borda. Eso sólo sucede, si acaso, en libros como el de Haaser, LaSalle y Sullivan donde el propósito es presentar los resultados de manera breve y concisa, con apego al método axiomático.

Esto justifica, explica y reivindica el uso de muchos tipos de prueba en la matemática que no califican como demostraciones en un sentido estrictamente lógico.[3]

---

[1] Por ejemplo, la teoría nos permite saber que una serie como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 x^n}{3n!}$ converge para todos los valores de x ¿Cómo es esto posible? Lo es a través de un teorema de carácter general, conocido como «criterio del cociente»: Dada una sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ de números reales o complejos tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ tiene un límite L, entonces la serie $\sum a_n$: 1) es absolutamente convergente si $L < 1$; 2) es divergente si $L > 1$; y 3) si $L = 1$, el criterio no decide nada acerca de la convergencia. Probar hechos notables como éste es lo que le da un valor incalculable a la teoría.

[2] En cuanto a la cola infinita, esta siempre tiene como valor $(1/3)(1/2^n)$, un número que para valores muy grandes de n se puede decir que es «insignificante», lo cual se puede anticipar visualmente examinando la figura anterior

[3] En rigor, la noción de prueba es mucho más comprensiva que la noción de demostración. Cabalmente, una prueba es un procedimiento aceptado por una comunidad para establecer un saber, es decir, un conocimiento válido. En cambio, por demostración matemática debemos entender, en el sentido estricto de la palabra, un argumento deductivo que asegura la verdad de una proposición con la sola ayuda de la lógica y otras afirmaciones previamente postuladas o establecidas. Desde este punto de vista, toda demostración es una prueba, pero no a la inversa. Al respecto, es común manejar estos términos como sinónimos, cosa que nosotros también hacemos cuando el contexto lo permite, conscientes de que en realidad sí hay una enorme diferencia entre ellas que por momentos hacemos valer.

3. Segunda cuestión: No todas las pruebas matemáticas tienen un mismo valor

La creencia de que la matemática es puramente formal y sólo se ocupa de axiomas, definiciones y pruebas rigurosas conduce a la idea de que todas las pruebas tienen un mismo valor: el de determinar la «verdad» de lo demostrado. En el caso de una teoría axiomática esto último se reduce a mostrar que cada teorema es consecuencia lógica de los axiomas. Al respecto, no está por demás insistir en que no es así como se hace la matemática. La postura de Polya nos parece mucho más atinada: En la práctica, el pensamiento matemático es algo que se ejerce de manera voluntaria y productiva, con un propósito, el cual en lo esencial se puede identificar con la solución de problemas. Desde esta perspectiva, el pensamiento matemático se contempla como algo muy cercano no sólo a la lógica, sino al arte (el de resolver problemas).

Algo semejante nos dice Nicolas D. Goodman en [4]:

> Las teorías matemáticas no son primeramente deducciones lógicas a partir de axiomas obtenidos por reflexión sobre conceptos; son, más bien, construcciones seleccionadas para resolver alguna colección de problemas, construcciones que se adaptan sin dificultad a los otros compromisos teóricos del matemático que las formula. Una teoría matemática es una teoría científica como cualquier otra, no más cierta, pero tampoco más desprovista de contenido. Los espacios de Hilbert son entidades teóricas a la par con los campos electromagnéticos o los quarks. [4, p. 119]

En nuestro caso el problema era: ¿Qué tanto espacio ocupa la sucesión (infinita) de cuadros en color? Tras de un atento examen a la figura podemos responder «1/3 de la superficie total» sin molestarnos en recurrir a la poderosa teoría de series. No lo creímos necesario, pues la respuesta ya la habíamos visto con claridad. La solución es curiosa y abre nuestro entendimiento a la comprensión: «La serie converge a 1/3 (y no a cualquier otra cosa) porque si dividimos el cuadrado unitario en escuadras $y \ldots$»[4]

[4] En general, la noción de prueba matemática abarca una enorme escala de opciones que va desde las pruebas visuales hasta los procedimientos formales de la lógica matemática contemporánea. No obstante, este punto de vista no es compartido por todos. Por el contrario, como ya lo hemos señalado, la imagen más trillada de esta noción es la de un procedimiento estrictamente lógico. Sin ir más lejos, veamos lo que dice Wikipedia en la entrada «Demostración en matemática» (9 de noviembre de 2015): «En matemáticas, una *demostración* o bien una *prueba* es un argumento deductivo para asegurar la verdad de una proposición matemática. En la argumentación se pueden usar otras afirmaciones previamente establecidas, tales como teoremas o bien afirmaciones iniciales o axiomas.» En otras palabras, según el autor del artículo nada que escape a la axiomática es digno de ser considerado una prueba matemática. Nótese como en lo anterior los términos «prueba» y «demostración» se manejan como sinónimos.

Bien entendida, nuestra querella no es en contra del rigor en la matemática, ni en contra del método axiomático, sino en contra de la idea de que la matemática es una fría ciencia deductiva en la que lo único que importa es deducir nuevos resultados[5]. Pensar así es absurdo. Como ya lo hemos dicho, antes de demostrar un resultado se le debe descubrir o conjeturar, lo cual se logra por otros caminos que los de la lógica, muchos de ellos marcados por el deseo de resolver un problema o el afán de entender.

Esto nos lleva a diferenciar las pruebas que simplemente establecen un resultado por la fuerza de la lógica de aquellas que permiten una clara comprensión del mismo. Y las cosas no terminan ahí. Más allá de la luz que proyectan algunas pruebas, las hay que abren nuevos caminos, nuevas perspectivas en el arte de la demostración y el descubrimiento de nuevos resultados.

¿Dónde se originó la idea de sólo recurrir a la deducción lógica? Sin ir hasta sus orígenes (Aristóteles, Euclides, etc.), en la época moderna la noción ya se encuentra en el libro *Vorlesungen Uber Neuere Geometrie* (Lecciones sobre las nuevas geometrías) escrito por Pasch en 1882, y reaparece en los *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la geometría) de Hilbert publicado en 1899. Sólo que aquí hay un problema: En ambos casos, los autores se refieren, no a la totalidad de la geometría, sino a su reconstrucción axiomática. En otras palabras, la noción de prueba que se aplica en un contexto axiomático no es absoluta, no impone nada a lo que se hace fuera de ahí. Véanse si no los argumentos que Hilbert, uno de los principales impulsores del método axiomático en la era moderna, esgrime en torno a las pruebas no axiomáticas en su disertación de 1900, o la manera en que trabaja en su libro *Anschauliche Geometrie (Geometry and the Imagination)* de 1932.[6]

---

[5] Esta idea se repite una y otra vez en el ámbito de la matemática. He aquí algunos ejemplos tomados de distintas épocas: «La matemática es la ciencia que infiere conclusiones necesarias» (Benjamin Pierce, 1881, p. 3); «La tesis fundamental de las siguientes páginas, de que la lógica y la matemática son idénticas, es algo que jamás me he visto en la necesidad de modificar.» Bertrand Russell [14, p. v]); Con su prueba de que las nociones fundamentales de la aritmética son derivables de la lógica pura, Russell ha mostrado que la necesidad matemática es de naturaleza analítica [13, p. 222]; «Definamos ahora la matemática como el campo que se ocupa de tres actividades principales: La estructura lógica, la aplicación de la lógica al descubrimiento de teoremas acerca de los números, el espacio, los patrones y otras estructuras relacionadas, y la aplicación de estos teoremas a otros campos.» (Hale, 2003, p. 3); «[. . .] la matemática es una ciencia formal que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entidades abstractas como números, figuras geométricas o símbolos.» (Wikipedia, 13 de septiembre de 2016, artículo «Matemáticas»). Las citas podrían continuar indefinidamente.

[6] Esto trae a colación la manera en que los defensores de ciertos puntos de vista suelen contar la historia. Con relación a Hilbert se trata de subrayar ciertos aspectos de su pensamiento que, fuera de contexto, cobran un significado diferente. Con esto queremos decir lo siguiente: Que la insistencia de Hilbert en los *Grundlagen der Geometrie* acerca del uso en exclusiva de argumentos lógicos obedece precisamente a la intención de estudiar la estructura lógica de esta teoría, sus principios y los vínculos deductivos entre ellos. Pero esto no significa que Hilbert considere injustificado el

Por el lado de Frege, Russell, etc., la idea de que toda prueba matemática es algo enteramente lógico está dada implícitamente en la tesis, ya mencionada, de que toda «verdad» matemática no es sino una verdad lógica engañosamente ataviada.

El problema con esta noción no es su rigidez, o que esté ligada a ciertas concepciones muy puntuales de la matemática. El verdadero problema es que oculta algunos rasgos muy importantes de la prueba tal como ésta aparece en la práctica matemática, sobre todo en el aula. Para aclarar este punto nos apoyaremos en una prueba míticamente atribuida a Carl Friedrich Gauss.

4. Una anécdota acerca de Gauss

Si usted no ha escuchado la anécdota según la cual Gauss, a la edad de 7 u 8 años (algunos dicen que 10), halló en un santiamén la suma de los números del 1 al 100, ¿dónde ha estado todo este tiempo?

En fin, para no dejar un vacío, aquí va en su versión más acostumbrada.

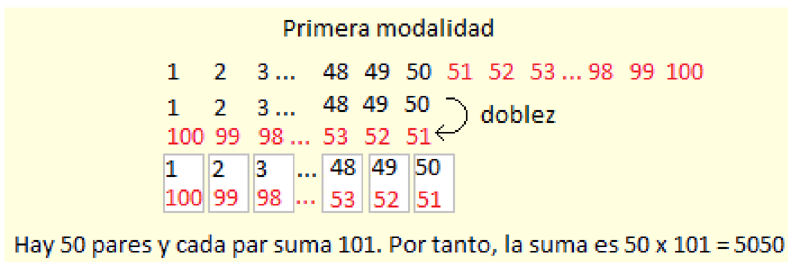
Entre 1784 y 1786, en el ducado de Brunswick, Alemania, un (suponemos que aburrido) profesor de educación primaria de nombre J. B. Bütner tuvo la penosa ocurrencia de imponer a sus discípulos la tarea de sumar los números del 1 al 100. Al poco tiempo, algo entre una milésima de segundo y unos cuantos minutos, el prodigioso Gauss lo sorprendió con la respuesta correcta: 5050. Escuchemos a Francisco R. Villatoro: «¿Cómo verificó el profesor la respuesta de Gauss? ¿Conocía el maestro de escuela la fórmula para sumar una serie aritmética? ¿El maestro sumó uno a uno los números del 1 al 100 alguna vez en su vida?»[7] Como referencia, Villatoro menciona un escrito de Brian Hayes publicado en la revista *American Scientist* (Año 2006, Vol. 94, No. 3) donde nos cuenta todo lo que se sabe sobre esta historia. Resulta que la anécdota nace de un escrito publicado por un tal Wolfang Sartorius un año después de la muerte de Gauss (fallecido en 1855), en el que lo alaba justo como eso, como un niño prodigio que aprendió a leer por sí mismo y que a los tres años de edad ya corregía los errores aritméticos de su padre. Se trata, por tanto, de una invención, ¿o acaso Sartorius sabía lo sucedido 70 años antes? Además, lo único que señala este autor es que se trataba de la suma de una progresión aritmética. Con el

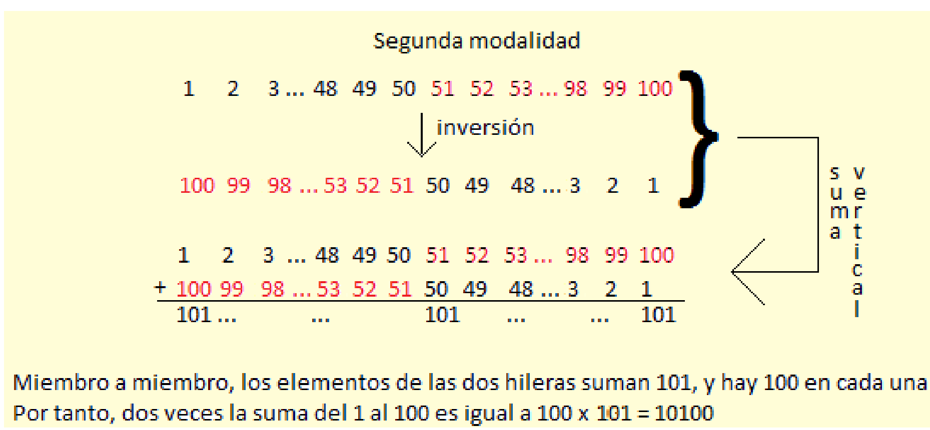
---

uso de otros medios fuera del contexto axiomático. No es tan torpe. Lo que sí considera posible es formalizar cualquier teoría matemática en un sistema axiomático una vez alcanzado cierto grado de madurez.

[7] Blog de Francisco R. Villatoro, http://francis.naukas.com/2010/04/15/iii-carnaval-de-matematicas-toda-la-verdad-sobre-la-anecdota-de-gauss-el-nino-prodigio-su-profesor-y-la-suma-de-1-a-100/

paso del tiempo la mitología matemática se encargó de condimentar la leyenda con diversos detalles, los cuales los reúne Hayes en una tabla comparativa con 70 renglones y 15 columnas. La tabla incluye nombres ilustres: Cantor, Polya, Boyer, Eves, Körner y Wikipedia. La suma preferida, por abrumadora mayoría, es del 1 al 100, aunque algunos dicen que era del 11 al 26, del 3 al 27, del 1 al 1000, del 1 al n (sí, al n) y del 5192 al 8792, mientras que otros dicen que se trataba de promediar los números del a al b, o del 81297 al 100899. La técnica descrita también varía, aunque se consideran dos modalidades: 1) el niño consideró 50 pares, pues se dio cuenta de que $100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3$, etc.; a esto corresponde la idea de que el chico dobló la sucesión por la mitad; y 2) el niño duplicó la sucesión numérica, invirtió la copia, la colocó debajo de la primera y sumó por columnas (dos hileras que verticalmente suman lo mismo).





Sin ir más lejos en tan sesudas indagaciones, preguntémonos: ¿Qué papel cumple esta leyenda? Obviamente, tiene un objetivo inmediato: resaltar la genialidad de Gauss, a quien se le suele llamar «el príncipe de las matemáticas». En este sentido la narración se asemeja a la de la mítica caída de la manzana en la cabeza de Newton o al quimérico baño de tina de Arquímedes y su famoso «Eureka». Pero también tiene otro propósito: el de despertar nuestra admiración y asombro ante un ingenioso argumento, ante una forma extremadamente simple de resolver un problema. Atribuir esto a un niño sujeto a los atropellos de un abominable maestro no es más que un recurso literario. El «niño Gauss» (es decir, quienquiera que haya ideado esta solución)[8] imaginó algo verdaderamente simple, eficaz y en extremo convincente. Es por ello que todos participamos con regocijo en la reproducción de la prueba, la cual suele culminar con el montaje de una fórmula ahora conocida como «fórmula de Gauss».

La idea de la prueba es muy simple: invierte el orden de los números, emparéjalos y obtendrás sumas iguales. Así, en vez de sumar los números uno por uno, sólo hay que multiplicar una vez. La multiplicación como suma abreviada: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 50 \times 101$. Es más, el procedimiento es válido para cualquier número, no sólo para el 100, el 27 o el 8792: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$. La «solución de Gauss» no sólo nos asombra por lo ingenioso del argumento, sino por el hecho de que el procedimiento es aplicable a cualquier número.

Podemos decir entonces que la pervivencia de esta legendaria narración se debe, no a lo que pudiera revelar acerca de Gauss (que no necesita de estas historias para ser reconocido), sino al placer extático que nos produce contemplar una ingeniosa solución de un problema matemático, ideada supuestamente por un niño.

Dicho lo anterior, examinemos la «prueba de Gauss» volviendo los ojos a la epistemología: ¿Qué podemos descubrir en ella? Veamos:

1. Tal como se presenta el argumento, este no constituye una demostración en el estricto sentido del término (v. gr., con apego a lo dicho en Wikipedia). En él entran en juego muchos otros factores además del razonamiento lógico. Por ejemplo, un paso fundamental consiste en notar que al sumar verticalmente los elementos de ambas hileras el resultado es siempre el mismo. Pero, ¿qué tienen que ver los números con «hileras» y «sumas verticales»? ¿Acaso estas últimas nociones no son geométricas? No es el momento de decir «Bueno, todo esto lo podemos formalizar y darle un sentido estrictamente analítico, digamos a través de nociones como la de función». Por favor, se trata de una prueba elaborada hipotéticamente por un niño apenas familiarizado con los números, una prueba, además, sumamente satisfactoria.

   Lo primero es reconocer que el argumento se apoya en nociones no aritméticas y pone en juego una facultad cognitiva diferente del razonamiento lógico: la intuición geométrica. Para usar una frase de Hermann Weyl, digamos que la prueba cae «dentro del círculo iluminado de nuestra intuición». Los números no sólo los

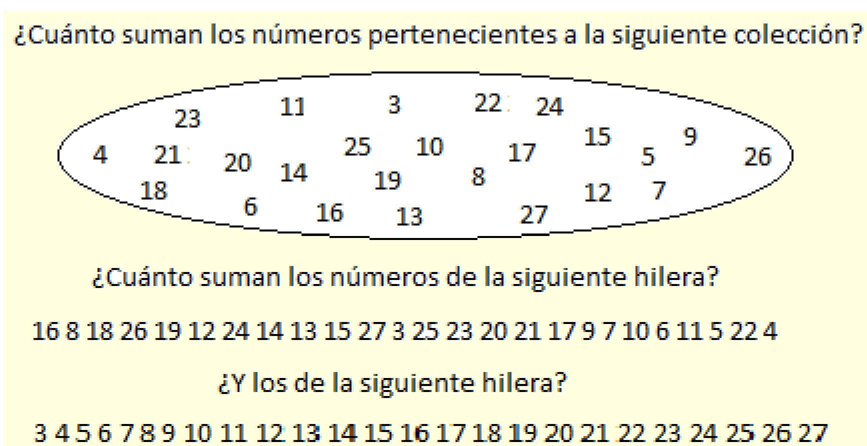
[8]A decir de Villatoro, en el siglo VIII ya se conocía la «fórmula de Gauss», la cual por cierto no es difícil de obtener con base en los números figurados de Pitágoras.

vemos como entidades abstractas (como lo hace Frege), sino formando una hilera que va de izquierda a derecha según nuestro modo de escribir. Están organizados, por decirlo de alguna manera, en el espacio (es aquí donde entra en escena un viejo ardid: lo que organizamos en el espacio no son los números mismos, sino sus representaciones simbólicas).

El juego geométrico no termina ahí. Después de formar una hilera con los números, ésta la *invertimos*. Estos arreglos *lineales* de los números son esenciales para el argumento, al igual que la idea de invertir el orden, es decir, de escribir en espejo la primera progresión.

Esta última idea, la de invertir la primera hilera, es fundamental: nos asegura que los términos de la segunda hilera decrecen en la misma cuantía en que crecen los de la primera. Por ello es que las sumas verticales permanecen constantes. Tenemos por tanto un argumento radicado en nuestra intuición espacial, pues la «manipulación de los números» la hemos llevado a cabo en el espacio, ya sea el del papel, el pizarrón o el de nuestra imaginación (intuición pura). Digamos que ésta es una de las fuentes de nuestro convencimiento, de nuestra certeza.

2. Queremos insistir en el hecho de que en el argumento los números no se consideran en forma aislada, o sin ninguna organización. Se presentan formando una hilera en orden creciente. Sin este orden el argumento no tendría sentido o se complicaría demasiado, y el niño Gauss no habría podido razonar como lo hizo.



En resumen: La prueba se halla ligada a diversas nociones geométricas como las de linealidad, simetría e inversión. Dos ideas que tienen una enorme importancia son la siguientes: que los números siguen un orden lineal discreto (separado, con elementos aislados), y que dicho orden constituye un buen orden (todo fragmento no vacío de la sucesión tiene un primer elemento).

En realidad no debería sorprendernos que el conocimiento relativo a los números enteros esté ligado a nuestra intuición geométrica: Cada vez que intentamos aislar algo en el universo matemático, lo encontramos asociado a todo lo demás. Obviamente, dicho conocimiento también está ligado a la actividad de contar y ordenar pequeñas cantidades, la cual aprendemos a iterar a través del lenguaje. Primero contamos con los dedos y con objetos físicos (cálculos), después con palabras y finalmente con símbolos. Esta actividad no tiene límite, es potencialmente infinita, y está vinculada al «montaje» de la progresión numérica que en su forma más simple podemos representar, a la Hilbert, como una sucesión de numerales situados en el terreno de lo visual:| || ||| |||| ||||| ||||||. . . A diferencia del continuo geométrico, esta sucesión forma un orden lineal discreto y bien ordenado.

Tiene razón Giuseppe Longo cuando dice que el principio del buen orden que utilizan cotidianamente los matemáticos es una consecuencia de esta construcción espacial, un invariante geométrico que resulta de nuestro modo de ordenar los números en nuestro espacio mental. También tiene razón al decir que la inducción matemática se sigue de esta peculiar construcción geométrica y de nuestra habilidad para comprender y percibir de manera clara e inmediata las relaciones que prevalecen entre los objetos así dispuestos. El recíproco no es cierto: La inducción matemática no da fundamento a esta actividad constructiva de la que estamos hablando.

3. Ciertamente, el principio de inducción matemática es el resultado, mediado por el lenguaje y la lógica, de esta práctica ancestral consistente en contar y ordenar. Desde finales del siglo diecinueve se le utiliza para organizar nuestro conocimiento de los números y probar las cosas en el sentido de la axiomática. No obstante, su fundamento epistemológico se halla en ese buen orden discreto donde los números individuales sólo tienen sentido como parte de una totalidad, no por sí mismos.

Poincaré sostiene algo semejante: En el punto de partida de la aritmética se halla una clara comprensión intuitiva del sistema de los números naturales, de la cual emana el principio de inducción completa. Ve en la argumentación por recurrencia (basada en el principio de inducción) el verdadero razonamiento matemático, aquello que evita que la matemática sea una inmensa tautología y la causa de que ésta sea irreducible a la lógica. Dice al respecto:

> El carácter esencial del razonamiento por recurrencia es que contiene, por decirlo de algún modo, una infinidad de silogismos condensados en una única fórmula. Para que nos podamos dar cuenta de ello, voy a enunciar uno tras otro estos silogismos que están, si se me permite la expresión, dispuestos en cascada. Bien entendidos se trata de silogismos hipotéticos. [...] El teorema es cierto para el número 1. Y si es cierto para el 1, es cierto para el 2; luego es cierto para el 2. Pero si es cierto para el 2, es cierto para el 3; luego es cierto para el 3; y así sucesivamente [7, pp. 379-380].

Pese a estas finas observaciones, Poincaré se equivoca al decir que se trata del «verdadero razonamiento matemático», como si algunos otros no lo fueran. También se equivoca al atribuir a esta forma de razonamiento un carácter creativo, argumentando que gracias a él se han probado muchas proposiciones universales, sintéticas y *a priori*, irreductibles a tautologías. No estamos de acuerdo. Ciertamente, el principio de inducción, que rebasa a la lógica, es una poderosa herramienta de demostración en la teoría de los números. Sin embargo, no crea nada: para poderlo aplicar ya se debe conocer lo que se quiere probar (una fórmula o una proposición relativa a números naturales.)

Esto marca una enorme diferencia con la prueba que nos ocupa: El niño Gauss no conoce la fórmula que va a probar; más bien, ésta resulta de la construcción que realiza. En otras palabras, se trata de una prueba creativa, una prueba que nos proporciona una fórmula que en principio desconocemos. Una vez descubierta, ésta se puede integrar a la teoría axiomática con base en el principio de inducción, pero no antes.

Volvamos al punto de inicio: No todas las pruebas matemáticas tienen el mismo valor. Algunas son creativas; otras no; en algunas surge algo nuevo, en otras no.

Por otra parte, hemos podido notar cómo nuestra intuición geométrica participa en el «argumento de Gauss» (i. e., cómo forma parte de su fundamento epistémico). Históricamente, la eliminación de esta facultad cognitiva de los fundamentos lógicos de la aritmética requirió de enormes esfuerzos que, para los fines que aquí perseguimos, son innecesarios. En otras palabras, si de comprender las cosas se trata, el conocimiento matemático va muy bien con todos los recursos con que cuenta, sin la necesidad de escuchar el canto de las sirenas del rigor lógico, la pureza del método y temas afines. Todo esto nos lleva a comentar algo con relación al método axiomático.

4. Axiomatizar una teoría supone una tarea formidable: la de investigar su contenido conceptual, de modo que cada prueba, sin importar cuáles fueron los medios utilizados en ella (v. gr., símbolos, figuras, construcciones, captación intuitiva de propiedades y relaciones entre los objetos considerados en un principio), se pueda reemplazar con argumentos lógicos que sólo se apoyan en los axiomas y dichos conceptos. Con relación a la geometría, Hilbert se refiere a la tarea como el «análisis lógico de nuestra intuición espacial». En general, esto equivale a asentar las pruebas exclusivamente en una sola de nuestras facultades cognitivas, el razonamiento lógico, que por sí mismo es infértil.[9] Así se supone que debemos proceder, por ejemplo, en la teoría axiomática de Hilbert para la geometría. Pero las cosas no son así de ordinario: ¿Acaso el conocimiento de los axiomas de Hilbert nos libera en la práctica de la figura del triángulo, del círculo con su centro, o del cruce de tres ejes perpendiculares, es decir, nos libra de nuestra intuición geométrica? No, no en la práctica. Como el lector lo podrá comprobar en [16], la axiomatización cumple, al menos para él, con otros propósitos. Y lo antes dicho sigue siendo válido: No es ahí donde se descubren los teoremas, ni es ahí donde se idean las pruebas. Esto no sólo lo sabe Hilbert, sino que lo lleva a la práctica en el mismo libro donde axiomatiza la geometría.
5. La «prueba de Gauss» tiene un rasgo distintivo que la hace pertenecer a una clase especial, la de las pruebas catalogadas por Herbrand como *prototípicas*.[10] Una prueba de este tipo es aquella que se realiza razonando sobre un caso «particular», es decir, sobre un parámetro (una variable cuyo valor se considera fijo en el curso del argumento), o un caso específico (como el de sumar del 1 al 100), para después hacer ver que el argumento no depende de ningún rasgo particular del caso elegido, así que vale para todos los casos similares. Ejemplo de ello son las pruebas ofrecidas por Euclides en los *Elementos*.

   En el caso de la aritmética, las pruebas de este tipo no son por inducción. Más bien, en ellas se propone un argumento aplicable a cualquier individuo; por ejemplo, para cada entero positivo, cómo hallar la suma requerida. De ahí el calificativo de «prototípicas»:

[9] Si a un grupo de individuos, sin preparación matemática, se les dieran, digamos, los axiomas de Zermelo-Fraenkel y las definiciones de número real, función, etc., y se les recluyera en una torre de marfil para que ahí jugaran, alejados del mundanal ruido, con estos conceptos y principios, ¿en algún momento llegarían al teorema fundamental del cálculo razonando sobre la sola base de la lógica?, Para empezar, ¿por qué habrían de introducir los conceptos de derivada, integral, etc.?, ¿por puro regocijo?, ¿y cómo argumentarían la prueba?, ¿alguien habrá intentado alguna vez una prueba enteramente lógica de este teorema?, ¿hay alguna estimación del número de pasos que esto llevaría? Si así fuera la matemática, a lo más estaríamos en las tablas de multiplicar.

[10] Herbrand, 1930, p. 289.

en ellas se suministra un *prototipo* o esquema aplicable a cualquier valor del parámetro n.

Obviamente, una vez en posesión de la fórmula, ésta se puede probar por inducción. Pero, repetimos, para hacer esto último ya debemos conocer la fórmula.

Extrañamente, muchos sostienen la idea, inducida por el formalismo ramplón, de que probar un teorema es probar una fórmula dada. El niño Gauss no prueba una fórmula, la produce, la construye. Una idea solidaria es la siguiente: La matemática es el uso de axiomas para probar fórmulas. Un torpe fundamento, una visión limitada, una parodia de la verdadera actividad de probar teoremas.

6. El procedimiento utilizado en la «prueba de Gauss» tiene además un aspecto creativo: Lo podemos extender a otros casos y componer otras fórmulas. Por ejemplo, imitándolo podemos llegar a la siguiente fórmula, válida para cualquier progresión aritmética con término general $a_n = b + nd$. La fórmula es

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{(n+1)(2b+nd)}{2},$$

donde b es el término inicial y d es la diferencia.[11]

Si bien estas ideas se pueden extender, con algunos ajustes, al tema de las progresiones geométricas, no habremos de abundar en este punto.

Para concluir diremos lo siguiente. La noción de prueba en matemáticas es el resultado de un proceso histórico, al igual que los recursos epistémicos que ponemos en juego al «hacer» matemáticas. No son pocos los que pretenden menospreciar tales recursos al contemplar la matemática desde un punto de vista supuestamente superior, el del rigor lógico, creyendo que con ello es posible dar cuenta de esta disciplina haciendo a un lado todo aquello que, *grosso modo*, podemos asociar a lo mental o psicológico (como lo hicieran Frege, Peano y Dedekind). Esto, pese a sus limitaciones, tuvo una enorme importancia en la matemática del siglo veinte y la sigue teniendo hoy en día. En los párrafos precedentes hemos querido reivindicar muchos elementos que desde finales del siglo diecinueve han sido satanizados. Al respecto, no nos aflige advertir que tras el ordenamiento de los números se halla nuestra intuición espacial, ni hacer referencia a construcciones mentales cuando se trata de probar las cosas, como en realidad sucede en la práctica matemática. Aferrarse al enfoque axiomático sólo por un prejuicio,

[11] Esto se logra haciendo lo mismo que Gauss con la serie $b, b+d, b+2d, \ldots, b+nd\ldots$

el de que sólo así procedemos con el rigor que exige una disciplina tan respetable como la matemática, es un error.

7. Con relación a la enseñanza de las matemáticas, nuestra experiencia nos indica que el interés de los alumnos no gira en torno al rigor o a la «verdad» en el sentido lógico del término; más bien, su postura es la de entender qué es lo que está en juego, qué encierra la situación ante la que se les coloca. Buscan, como dijera Gian-Carlo Rota, clarificar e iluminar el fenómeno matemático con una *razón* (no una prueba) que lo explique y justifique, donde por «razón» debemos entender el motivo o la causa de algo, lo cual no es lo mismo que una demostración que conduzca a su verdad. En breve: podemos saber que algo es cierto, pero desconocer la *razón* de por qué lo es.

   En un ensayo publicado en 2001, Paolo Mancosu sostiene algo parecido a lo anterior al advertir que muchos matemáticos distinguen dos tipos de pruebas: las que explican y las que convencen pero no explican. Cita entonces a Georges Bouligand, quien afirma que la demostración que ofrece Euclides del teorema de Pitágoras en los *Elementos* (proposición I.47) es un ejemplo de esto último. Como ejemplo de lo contrario, Mancosu expone una prueba de ese mismo teorema que, según él, explica plenamente el resultado. [8, pp. 98-99] Esto se relaciona con el siguiente inciso.

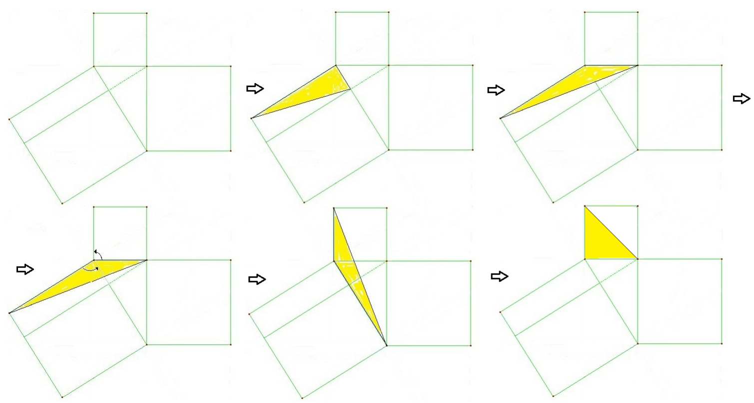
8. Volviendo al tema de la axiomatización, podemos decir que, entre otras cosas, ésta tiene la finalidad de reconstruir y vincular entre sí una multitud de hechos ya aceptados con anterioridad. Cuando Euclides organizó axiomáticamente la geometría, el teorema de Pitágoras era un resultado bien conocido. Otro ejemplo lo tenemos en la teoría de funciones reales de una variable real. Entre otras cosas, ésta tiene el cometido de ofrecer pruebas rigurosas de diversos hechos matemáticos que desde el punto de vista gráfico son evidentes como, por ejemplo, el *teorema de Bolzano*. Históricamente, la necesidad de dar una prueba rigurosa de este y otros resultados similares llevó, entre otras cosas, a la definición de número real propuesta por Cantor y Dedekind, y al axioma de continuidad.[12]

   Este ejemplo nos recuerda que las figuras no sólo son una herramienta para la comprensión de las matemáticas, sino una fuente de nociones y teoremas ¿Por qué definimos los números reales de tal manera y no de tal otra? Respuesta: porque una definición correcta es aquélla que nos permite probar cosas tales como el teorema de Bolzano. Volvemos a lo mismo: No es que la validez del teorema de Bolzano descanse en su prueba formal. Más bien, las cosas son

[12] Véase (Dedekind, 1988, p. 12) y [15, pp. 17-18]

a la inversa: la teoría es aceptable porque prueba teoremas como éste.

Por ejemplo, mucho se ha especulado en torno a la manera en que Euclides ideó la prueba del teorema de Pitágoras en los *Elementos* (Proposición I.47). Hay muchas razones para pensar que se trata de la «formalización» (es decir, la «conversión» a las normas de prueba por él aceptadas) de la siguiente prueba 'visual':



La figura que tomamos como punto de partida es la misma que utiliza Euclides en los *Elementos*. Nuestra prueba, al igual que la suya, se apoya en el hecho de que si los vértices C y C' de dos triángulos ABC y ABC' están sobre una misma paralela a la base AB, entonces las áreas de los dos triángulos son iguales. Una diferencia en el modo de llevar a cabo la prueba es que Euclides no realiza desplazamientos ni rotaciones con las partes de la figura, es decir, no recurre a la noción de *movimiento*. En vez de ello, usa la noción de *congruencia* de figuras. Esto supone una previa selección de conceptos básicos y un estilo de demostración, centrados en este caso en la construcción de figuras (no en su desplazamiento), que le permiten reconstruir la teoría sin dejar nada fuera.

Una observación: En la matemática moderna la cuestión anterior se maneja de manera distinta, pues al centro de la geometría euclidiana se ha puesto la noción de *transformación rígida*, es decir, una noción centrada en la idea de movimiento: rotar, trasladar, reflejar los objetos.

Volviendo a la prueba visual, ésta la podemos acompañar con el siguiente mini-argumento: Como se ve, la mitad de uno de los cuadrados sobre uno de los catetos, equivale a la mitad de uno de los rectángulos en que se divide el cuadrado sobre la hipotenusa, de modo que todo el cuadrado equivale a todo el rectángulo. Lo mismo sucede para el cuadrado sobre el otro cateto y el otro rectángulo en que se divide el cuadrado sobre la hipotenusa, de modo que las áreas conjuntas de los cuadrados sobre los catetos equivalen a las áreas conjuntas de dichos rectángulos y, por ende, a la del cuadrado sobre la hipotenusa (estas son las mil palabras que valen menos que la imagen).

De estar nosotros en lo cierto, la labor de Euclides consistió entonces en «traducir» esta prueba a los cánones de su teoría axiomática, es decir, cambiar el argumento anterior por uno basado en las nociones de *congruencia, construcción con regla* y *compás y superposición por construcción*, pues esos son los recursos disponibles en ella.

En cuanto a la relación entre la actividad ordinaria de probar resultados en la matemática, la cual se sirve de muchos recursos ajenos a la axiomática, y la labor demostrativa al interior de una teoría axiomática, el lector puede consultar el texto «What's special about Mathematical Proofs?» de Solomon Feferman, que en la bibliografía aparece en [3], donde se refiere al problema que representa formalizar las pruebas matemáticas. Esto nos recuerda la importancia de hablar no sólo de la comprensión en matemáticas, sino de lo que sucede en la otra cara de la moneda, en el terreno de lo formal, pues intuición y formalismo son complementarios. Lo que no toleramos es esa tonta identificación de la matemática con una de sus facetas.

5. Conclusiones

Después de lo que hemos dicho debe quedar claro que la comprensión en matemáticas suele exigir algo más que sólo pruebas individuales. En muchos casos esto requiere de otros contextos, como en el caso ya señalado del teorema de Desargues, donde la comprensión sólo se logra tras observar cómo contribuye este resultado al desarrollo de la matemática en general, o como cuando miramos el teorema de Pappus como un caso particular del teorema de Pascal. Estas ideas conducen a un cuadro más general (u holístico) de la comprensión que el centrado en el enfoque de pruebas individuales. En la práctica, esta búsqueda de contextos para la comprensión matemática se traduce en la consideración de casos de estudio, pareciendo imposible elaborar una teoría general dada la naturaleza del problema. En la actualidad, este renovado interés se orienta a los aspectos heurísticos de la matemática, a la manera en que ésta crece, a la distinción entre los distintos tipos de razonamiento matemático, a diversas cuestiones relativas a la dinámica del descubrimiento y al desarrollo histórico de esta disciplina (casos de estudio). Todos estos elementos tienen un factor común: el reconocimiento de que la actividad matemática está impulsada por otros factores que el de establecer nuevos teoremas. Esto explica la proliferación de pruebas alternativas para muchos resultados, o la reconstrucción de muchas áreas de las matemáticas sobre una nueva base en busca de explicaciones más satisfactorias.

Por otra parte, no debemos olvidar que la cuestión de la *comprensión* en matemáticas posee un alto grado de imprecisión que hace imposible caracterizar esta noción de manera exhaustiva. A fin de cuentas este fenómeno depende también de un gesto interno de quien comprende, i. e., descansa en elementos subjetivos que no podemos ignorar. Por otra parte, tal como lo señala Mancosu, el problema se relaciona con una multitud de nociones un tanto imprecisas como las de generalidad, «visibilidad», pureza del método, fecundidad, analogía, semejanza, etc., que no podemos caracterizar de manera exacta. Aun así, el análisis de estas ideas y sus mutuas relaciones nos ha permitido contemplar la práctica matemática desde una nueva perspectiva, alejándonos de la trivial idea de que en la matemática lo único importante es demostrar nuevos resultados. Es más, estas preocupaciones no sólo atañen a quienes se interesan en la epistemología y la filosofía de las matemáticas, sino también a los matemáticos, a los historiadores y, sobre todo, a quienes se ocupan de la educación matemática, tal como lo testifica la creciente literatura sobre el tema. Al respecto, el lector podrá consultar [1, 2, 6, 5, 10, 9].

Bibliografía

[1] A. Bishop, M. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer International Handbooks of Education, vol. 4, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[2] M. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F. Leung, *Third International Handbook of Mathematics Education*, Springer International Handbooks of Education, Springer New York, 2013.

[3] S. Feferman, «What's Special about Mathematical Proofs?», 2012, Texto de una conferencia pronunciada en el Williams Symposium on Proof, University of Pennsylvania, Nov. 9, 2012. Disponible en línea en `https://math.stanford.edu/~feferman/papers/Proof-UPenn.pdf`.

[4] N. D. Goodman, «Modernizing the Philosophy of Mathematics», *Synthese*, vol. 88, núm. 2, 1991, 119–126.

[5] G. Hanna y M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*, New ICMI Study Series, Springer Netherlands, 2012.

[6] G. Hanna, H. N. Jahnke y H. Pulte, *Explanation and Proof in Mathematics*, Springer, 2010.

[7] P. Henry, «Sur la nature du raisonnement mathématique», 1894, disponible en PDF en la base de datos de la Universidad de Lorraine, en `http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/`.

[8] P. Mancosu, «Mathematical Explanation: Problems and Prospects», *Topoi*, vol. 20, 2001, 97–117.
[9] ———, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, 2008.
[10] P. Mancosu, K. F. Jørgensen y S. A. Pedersen, *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, vol. 327, Synthese Library, 2005.
[11] G. Polya, «On Learning, Teaching, and Learning Teaching», *The American Mathematical Monthly*, vol. 70, núm. 6, 1963, 605–619.
[12] ———, *Matemáticas y razonamiento plausible*, Editorial Tecnos, Madrid, 1966.
[13] H. Reichenbach, *The Rise of Scientific Philosophy*, University of California Press, Berkeley, 1968.
[14] B. Russell, *The Principles of Mathematical Philosophy*, 2.ª ed., W. W. Norton & Company Inc. New York, 1937.
[15] C. Torres, «Lo visual y lo deductivo en las matemáticas», *Miscelánea Matemática, Revista de la Sociedad Matemática Mexicana*, núm. 40, 2004, 1–27.
[16] ———, «¿Qué significa comprender el teorema de desargues?», *Miscelánea Matemática, Revista de la Sociedad Matemática Mexicana*, núm. 54, 2012, 3–23.