Miscelánea Matemática **45** (2007) 25–31 SMM

Euler y el cálculo de variaciones

Luz de Teresa
Instituto de Matemáticas, UNAM
Circuito Exterior
Cd. Universitaria
04510 México, D.F.
México
deteresa@matem.unam.mx

En agosto de 1755 Euler recibió una carta de un joven de 19 años mostrándole como recuperar con un método analítico, y de una manera casi automática, su propia condición necesaria. Euler acogió con entusiasmo el método de Lagrange dando así nacimiento a una nueva área en la matemáticas: El cálculo de variaciones.

Desde la Grecia clásica circulaban en el medio científico problemas isoperimétricos, donde sin duda uno de los más famosos es el de la reina Dido (semi histórica princesa Fenicia y Reina de Cartago), pero no es sino en el siglo XVII en Europa que se plantean importantes problemas de lo que más tarde será el cálculo de variaciones. Entre ellos fueron fundamentales los trabajos de Fermat en óptica geométrica (1662), el estudio de cuerpos moviéndose en fluidos formulado por Newton y el que sin duda será un problema fundacional en esta área: el problema de la braquistócrona. En efecto, en 1638 Galileo formuló el siguiente problema: Determinar la curva de descenso más rápido de una partícula que se desliza de un punto A dado a otro punto B (que no esté en la recta vertical que pasa por A). Se considera que la fricción y la resistencia del aire son despreciables.

En términos modernos, se pretende minimizar el valor de la integral I que representa el tiempo de descenso,

$$I = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+|y'(x)|^2}{2gy(x)}}dx$$

donde g es la fuerza de gravedad, $(0, y(0)) = A, (x_1, y(x_1)) = B$. Debido a que la respuesta de Galileo fue incorrecta, en su *Acta Editorum* de 1696 Johannes Bernoulli desafió a los matemáticos de la época retomando el problema y formulándolo en los siguientes términos:

> Datis in plano verticali punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descends, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.

Newton, Leibniz, L'Hôpital, Johannes y Jacobi[1] Bernoulli encontraron una solución correcta por métodos distintos.

Así, a principios del siglo XVIII, se buscaba resolver problemas, muchos de ellos prácticos, donde era necesario caracterizar curvas que minimizaban o maximizaban alguna cantidad.

Aunque no todos los historiadores (e.g. [4]) consideran que Euler se interesó en los problemas de esta naturaleza durante su estancia en Basel con Johannes Bernoulli, es claro que su obra *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime Proprietate Gaudendis* de 1744 representó el nacimiento de un método general para abordar problemas de una misma naturaleza. Hasta ese momento, muchos problemas se habían resuelto con éxito pero no existían métodos generales para tratarlos. Euler en su *Methodus*, a través de consideraciones geométricas, diferencias sucesivas y series, y cambiando derivadas por cocientes de diferencias e integrales por sumas finitas, obtuvo fórmulas que se podían aplicar a una gran variedad de problemas. Aunque en ese momento el método era poco preciso, Euler lo ejemplifica con un gran número de problemas concretos. El método de "máximos y mínimos aplicado a (líneas) curvas" busca las curvas para las cuales cierta magnitud alcanza su valor máximo o mínimo. Euler introduce las siguientes condiciones:

1. El problema se plantea y se resuelve en un único segmento de las abcisas.

2. Se introducen dos tipos de extremos absolutos y relativos.

3. Se define la forma funcional "como una magnitud integral indefinida"
$$W = \int_a^b Z(x, y, y', y'', \cdots)dx$$
donde Z está dada.

[1] He encontrado varia versiones de sus nombres, Johann, John, Juan, Jakob, Jacob, James etc. Tomo aquí los nombres como aparecen en sus publicaciones.

El método introducido es el siguiente: Supongamos que en $[a,b]$ es necesario elegir $f(x,y)=0$ de manera que $\int_a^b Zdx$ alcanza un valor crítico.

Euler sustituye cada curva $y=y(x)$ definida en $[a,b]$ por una curva poligonal dividiendo al intervalo en n partes iguales. Además aproxima la derivada por las diferencias finitas. De esta manera sustituye la integral

$$W=\int_a^b Z(x,y,y',y'',\cdots)dx$$

por una suma de la forma

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} Z(x,y,y',y'',\cdots)dx$$

donde

$$dx=\frac{b-a}{n},\quad x_0=a, x_i=x_{i-1}+dx$$

$$y_i'=p_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{dx},\quad y_i''=g_i=\frac{y_{i+1}'-y_i'}{dx}=\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{dx^2}.$$

Para ejemplificar este proceso, supongamos que Z sólo depende de (x,y,y'), es decir,

$$W=\int_a^b Z(x,y,y')dx. \tag{1}$$

Se sustituye (1) por

$$I=\sum_{i=0}^{n-1} Z(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{dx})dx.. \tag{2}$$

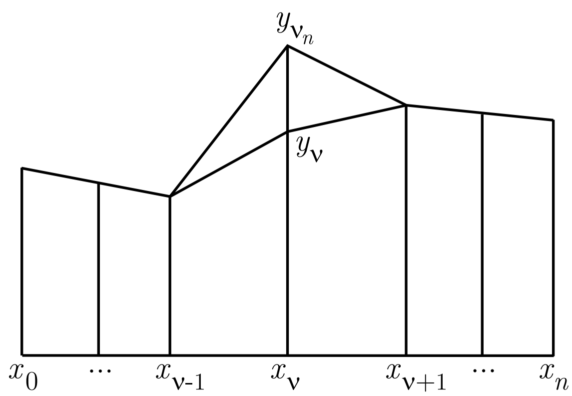
Para resolver el problema de búsqueda de puntos críticos de (2) Euler varía cierta ordenada arbitraria y_ν. La diferencia de los valores de I correspondientes a la curva original y la curva modificada los iguala a cero. Obtiene así una ecuación diferencial de las curvas críticas.

Si y_ν se obtiene por un incremento y_{ν_n} entonces (2) sólo cambia en los términos que contienen a y_ν, es decir,

$$Z(x_{\nu-1},y_{\nu-1},\frac{y_\nu-y_{\nu-1}}{dx}),\quad Z(x_\nu,y_\nu,\frac{y_{\nu+1}-y_\nu}{dx}).$$

Considerando Z una función de tres variables (x,y,p), para calcular su incremento Euler derivaba Z respecto a x,y,p y sustituía las diferenciales

$$dx_i, dy_i, dp_i$$



por los incrementos de las magnitudes correspondientes

$$x_i, y_i, p_i$$

Así,

$$dZ(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, p_{\nu-1}) = M dx_{\nu-1} + N dy_{\nu-1} + P dp_{\nu-1},$$
$$dZ(x_\nu, y_\nu, p_\nu) = M' dx_\nu + N' dy_\nu + P' dp_\nu.$$

Como el incremento es sólo en y_ν,

$$dx_{\nu-1} = dx_\nu = dy_{\nu-1} = 0, \quad dy_\nu = \nu_n,$$

$$dp_{\nu-1} = \frac{\nu_n}{dx}, \quad dp_\nu = \frac{-\nu_n}{dx}.$$

Por consiguiente:

$$Z(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{dx})dx + Z(x_\nu, y_\nu, \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{dx})dx =$$

$$= (P\frac{\nu_n}{dx} + N'\nu_n - P'\frac{\nu_n}{dx})dx\,.$$

Pero $P' - P = dP$ y en lugar de N' se puede escribir N, se obtiene

$$(P\frac{\nu_n}{dx} + N'\nu_n - P'\frac{\nu_n}{dx})dx = -dP + Ndx = 0.$$

Con el simbolismo actual esto significa

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{d}{dx}(\frac{dZ}{dy'}) = 0. \tag{3}$$

Esta notación se debe entender en el siguiente sentido. El integrando $Z(x, y, y')$ es función de las variables independientes x, y, y' por lo que respecta a $\frac{dZ}{dy}$ y a $\frac{dZ}{dy'}$. Sin embargo para calcular $\frac{d}{dx}(\frac{dZ}{dy'})$ es necesario utlizar que y' y y dependen de x. Así (3) queda transformada en:

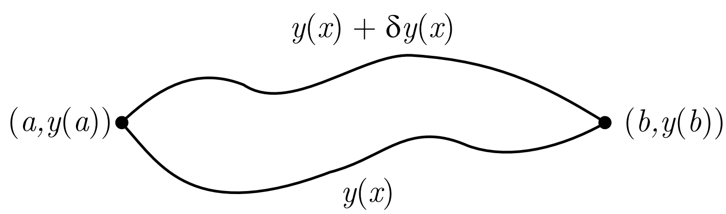
$$\frac{dZ}{dy} - \frac{d^2Z}{dy'dx} - \frac{d^2Z}{dy'dy}y' - \frac{d^2Z}{dy'dy'}y'' = 0. \tag{4}$$

Esta famosa ecuación que Euler publicó en 1736 sigue siendo la base del cálculo de variaciones. La ecuación (4) no es la adecuada cuando los integrandos son más complicados. Euler siguió desarrollando su método y aplicándolo a un gran número de ejemplos siendo esto lo que publicó en 1744.

Lagrange se interesó por el trabajo de Euler y cuando le escribió en 1755 describía lo que el llamaría variaciones. Una de las innovaciones de Lagrange fue no variar ordenadas individuales de la curva minimizadora o maximizadora $y(x)$ sino introducir nuevas curvas entre los puntos $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$. Lagrange representó estas curvas como

$$y(x) + \delta y(x)$$

donde δ era una notación especial que indicaba una "variación completa" de la curva y.



La introducción de una nueva curva en el integrando de W cambiaba desde luego los valores de ésta. El incremento en W que denotaremos por ΔW es entonces

$$\Delta W = \int_a^b [Z(x, y + \delta y, y' + \delta y') - Z(x, y, y')]\, dx. \tag{5}$$

Lagrange vió a Z como función de tres variables pero donde x no cambiaba y escribe el desarrollo de Taylor para una función de dos variables. Así obtiene

$$\Delta W = \delta W + \frac{1}{2}\delta^2 W + \frac{1}{3!}\delta^3 W + \cdots \tag{6}$$

donde

$$\delta W = \int_a^b (Z_y \delta y + Z_{y'} \delta y')dx.$$

Según varios autores (ver e.g. [4], [8]) el argumento de Lagrange para justificar que $\delta W = 0$ no era correcto. Reproduzco aquí el argumento que aparece en [6] donde Lagrange argumenta que dado que δW contiene los términos de primer orden para pequeñas variaciones δy y $\delta y'$ debe dominar el lado derecho de (6) por lo que ΔW tendrá el mismo signo que δW. Sin embargo, en un máximo o en un mínimo W y ΔW deben tener el mismo signo (esto no es muy claro). Por la expresión (5) si y maximiza W entonces W y ΔW tendrán signos contrarios. Esto nos indica que δW debe ser cero. Lagrange afirma que

$$\delta y' = \frac{d(\delta y)}{dx}$$

intercambiando d y δ. Esto es correcto pero para sus contemporáneos no era claro y Euler lo aclaró posteriormente. La primera variación δW es entonces

$$\delta W = \int_a^b \left[Z_y \delta y + Z_{y'} \frac{d(\delta y)}{dx} \right] dx.$$

Se concluye

$$Z_y - \frac{d}{dx}(Z_{y'}) = 0$$

obteniendo la misma ecuación que Euler.

El enfoque utilizado por Lagrange permitió aplicar algoritmos semejantes a los del cálculo diferencial y este enfoque fue el que sin duda entusiasmó a Euler. De acuerdo a algunos autores (ver e.g.[7]) Euler detuvo sus publicaciones en el tema para permitir a Lagrange publicar sus resultados, lo que ocurrió en 1762. Después de esta fecha, retomando el término introducido por Lagrange de "variaciones", Euler dió en una serie de trabajos una exposición detallada, perfeccionada y con muchos ejemplos de la recientemente nacida área del las matemáticas: "El cálculo de variaciones". El trabajo iniciado por Euler y Lagrange ha sido extendido de muchas maneras por Bliss, Bolza, Carathéodory, Clebsch, Hahn, Hamilton, Hilbert, Kneser, Jacobi, Legendre, Mayer, Weierstrass por citar a algunos. Es indudable que en la matemática moderna y en muchas de sus aplicaciones el cálculo de variaciones y los llamados métodos variacionales son fundamentales. En la bibliografía incluimos algunos textos introductorios [5, 2, 3] así como algunos más avanzados [1, 8, 10].

La apropiación del término "variaciones" para una nueva disciplina muestra la genialidad de Euler no sólo desde el punto de vista matemático sino en su calidad humana al reconocer el trabajo de un joven alentándolo y haciéndolo propio.

Referencias

[1] Buttazzo, G; Giaquinta, M; Hidebrandt, S. *One-dimensional Variational Problems.* Oxford Science Publications. (1998)

[2] Van Brunt, B. *The Calculus of Variations.* Springer-Verlag (2004)

[3] Dacorogna, B. *Introduction to the Calculus of variations.* Imperial College Press, (2004).

[4] Goldstine, H. *A History of the Calculus of Variations from the 17th Through the 19th Century.* Springer. (1980)

[5] Ize, J. *Cálculo de variaciones.* Serie FENOMEC, UNAM. (2002)

[6] Kline, M. *Mathematical thought from ancient to modern times.* **Vol. 2.** Oxford University Press. (1990)

[7] Ríbnikov, K. *Historia de las Matemáticas* Editorial Mir, Moscú. (1991)

[8] Struwe, M. *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* Springer. (1996)

[9] Taton, R. Les relations d' Euler et Lagrange, en *Leonhard Euler, 1707-1738, Beijträge zu Leben und Werk* Birkhäuser Verlag, Basel, (1983).

[10] Troutman, J.L. *Variational Calculus and Optimal Control. Optimization with elementary convexity.* Springer, (1996).