AREA Y EQUIDESCOMPONIBILIDAD

Ricardo Quintero Zazueta *

> En primer lugar, resulta evidente para todo el mundo que el fuego, la tierra, el agua y el aire son cuerpos. Ahora bien: la esencia del cuerpo posee también el espesor. Pero todo espesor envuelve necesariamente la naturaleza de la superficie. Y toda superficie de formación rectilínea está compuesta por triángulos.
>
> - PLATON

En el diálogo "Timeo, o de la naturaleza", al tratarse de la cuestión del origen de los elementos, Platón desarrolla una curiosa teoría que identifica los cuatro elementos tradicionales con los poliedros regulares convexos. El tetraedro es la figura elemental subyacente a la estructura del fuego, en tanto que el hexaedro, el octaedro y el icosaedro son identificados con la tierra, el aire y el agua, respectivamente; finalmente, Platón identifica el dodecaedro con la totalidad del universo. Puesto que las figuras geometricas perfectas son de orden ideal y no de orden sensible, esta identificación resulta adecuada dentro

* Alumno del 7o. semestre de la carrera de Matemático en la Facultad de Ciencias de la U. N. A. M.

del marco de la filosofía platónica. Así, el fuego que percibimos y las cosas que se componen de fuego son combinaciones cambiantes y perecederas, más allá de las cuales se encuentra la idea del fuego, que existía antes de que estas cosas fuesen creadas y que seguirá existiendo cuando estas cosas desaparezcan.

Por otra parte, dado que los elementos son cuerpos compuestos por poliedros, limitados por superficies que podemos descomponer en triángulos, Platón pretende deducir leyes fundamentales de la naturaleza a partir de las propiedades de las triangulaciones de los polígonos.

En este artículo no nos ocuparemos de refutar o demostrar esta teoría platónica, sino de algunas cuestiones matemáticas relacionadas con la descomposición de polígonos, a saber: la construcción de una teoría elemental del área y la relación de las nociones de área y equidescomponibilidad. Es conveniente que empecemos con algunas definiciones.

D 1. Una descomposición de un polígono π es una familia finita $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ de polígonos cuya unión es π y tal que los interiores de dos polígonos cualesquiera de la familia, son ajenos. A los polígonos $\pi_1, \ldots, \pi_n$ los llamaremos las piezas de π asociadas a dicha descomposición.

D 2. Si $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ y $\{\pi'_1, \ldots, \pi'_n\}$ son descomposiciones de los polígonos π y π', respectivamente, y además $\pi_i \cong \pi'_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, decimos que π y π'' son polígonos equidescomponibles.

En la figura 1 la familia $\{\pi_1, \ldots, \pi_7\}$ es una descomposición tanto de ABCD como de EFGHIJ, que son, utilizando el término introducido en 2, equidescomponibles.

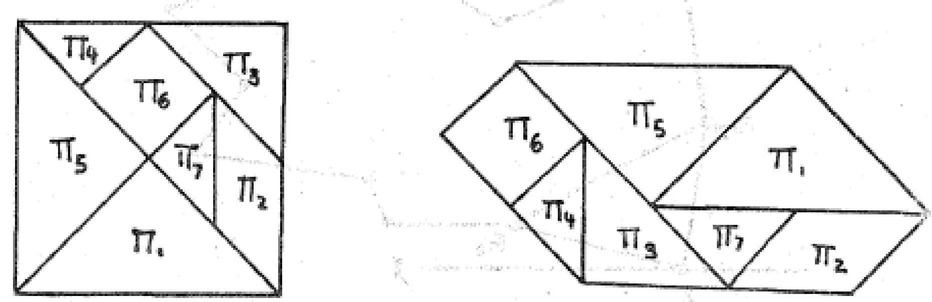

Fig. 1

A una descomposición de un polígo en piezas triangulares la llamamos una triangulación del polígono. A continuación vamos a demostrar el teorema enunciado al final de la cita que encabeza este artículo, que utilizando la terminología moderna dice:

TEOREMA.- Todo polígono es triangulable.

Demostraremos este teorema por inducción sobre el número k de vértices del polígono. Si $k = 3$ ó 4 es trivial. Supongamos que el teorema es válido para toda $k \leq n$ y consideremos un polígono $\pi = A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ con $n+1$ vértices. Por al menos uno de sus vértices pasa una recta ℓ soporte del polígono, podemos suponer que A_1 es uno de tales vértices *

---

* Una recta soporte de un polígono es una recta ℓ que intersecta la frontera del polígono de manera que éste quede contenido en uno de los semiplanos asociados a

Debemos considerar dos casos:

CASO 1. (Fig. 2) El triángulo $\Delta = A_1 A_2 A_{n+1}$ no contiene en su interior vértices de π.

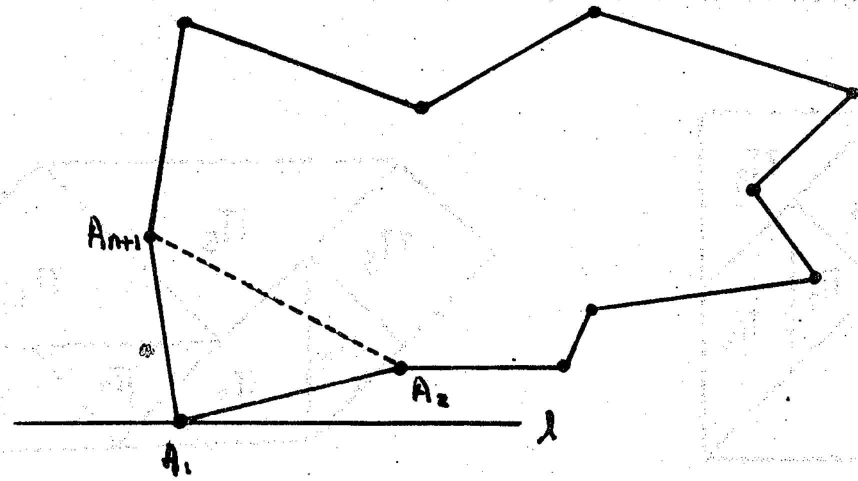

Fig. 2

Como $\pi = \Delta \cup A_2 A_3 \ldots A_{n+1}$, dado que $A_2 A_3 \ldots A_{n+1}$ tiene n vértices, posee una descomposición $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ (por la hipótesis de inducción) entonces $\{\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ es una descomposición de π.

CASO 2. (Fig. 3) $\Delta = A_1 A_2 A_{n+1}$ contiene uno o más vértices de π. Escojamos aquel vértice A_j tal que el ángulo que forman el lado $A_{n+1} A_1$ y la línea que pasa por A_{n+1} y A_j sea mínimo. Sea A la intersección de esta última línea con el lado $A_1 A_2$. Como

$\pi = A_1 A A_{n+1} \cup A A_2 \ldots A_j \cup A_j A_{j+1} \ldots A_{n+1}$ y dado que $AA_2 \ldots A_j$ y $A_j A_{j+1} \ldots A_{n+1}$ tienen menos de n vértices, poseen descomposiciones en piezas triangulares, digamos que éstas son $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ y $\{\Delta'_1, \ldots, \Delta'_r\}$ respectivamente. Claramente $\{A_1 A A_{n+1}, \Delta_1, \ldots, \Delta_s, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_r\}$ es una triangulación de π.

Esto completa la inducción y la demostración del teorema.

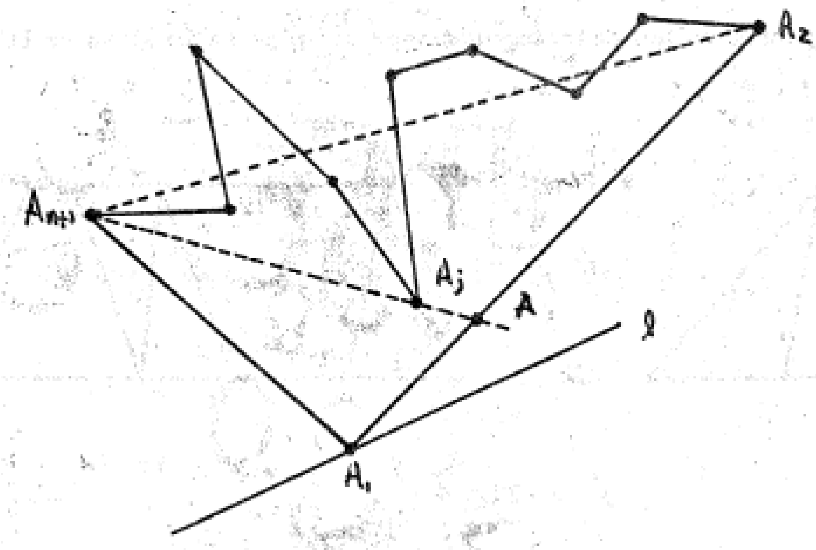

Fig. 3

El lector no tendrá dificultad para demostrar que en un triángulo cualquiera, el producto de las longitudes de su base y altura depende únicamente del triángulo y no de los lados individualmente, i.e. : es el mismo cualquiera que sea el lado que se elija como base. Entonces podemos hacer la siguiente definición:

D 3. El área de un triángulo cuya base tiene longitud b y cuya altura tiene longitud h es bh.

Nótese que deliberadamente hemos omitido el factor $\frac{1}{2}$, pues el hecho de que habitualmente utilicemos para medir el área un cuadrado unitario como unidad, se debe a vicisitudes históricas, pero bien podríamos utilizar, por ejmplo, un triángulo isósceles rectángulo de lado unitario.

D 4. Un triángulo está simplemente triangulado cuando los vértices de sus piezas están contenidos en la base del triángulo o en su vértice opuesto.

D 4'. Un trapecio está simplemente descompuesto cuando los vértices de sus piezas están contenidos en los lados paralelos del trapecio.

Los aspectos de las descomposiciones simples se ilustran en la fig. 4.

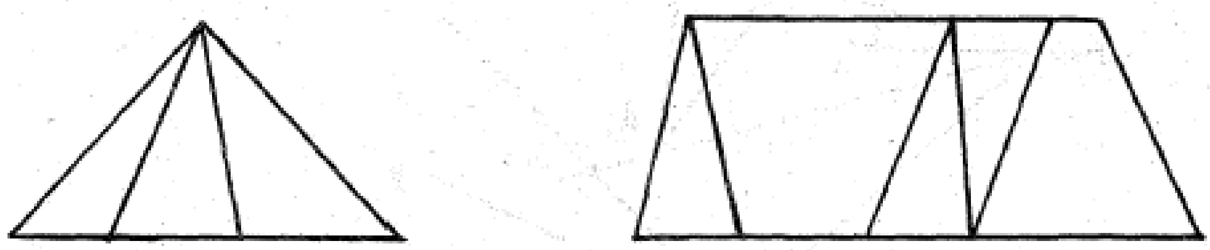

Fig. 4

Nótese que las piezas de un trapecio simplemente descompuesto son triángulos o trapecios. Además siempre es posible encontrar una descomposición simple de un trapecio que consista sólo de triángulos. Nos referiremos a los trapecios y triángulos como figuras elementales.

D 5. El contenido de una figura elemental es la suma de las áreas de las piezas de una de sus triangulaciones simples.

TEOREMA: El contenido de una figura elemental no depende de la triangulación elegida.

Demostraremos el caso del trapecio. Sean B y b las longitudes de los lados paralelos del trapecio y h su altura. Si $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ es una triangulación simple, podemos (renumerando las piezas de ser necesario) afirmar que las bases de las piezas $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ yacen sobre el lado del trapecio de longitud B y las bases de las piezas $\Delta_{r+1}, \ldots, \Delta_s$ yacen sobre el lado del trapecio de longitud b. Como las sumas de las longitudes de las bases de $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ y $\Delta_{r+1}, \ldots, \Delta_s$ totalizan, respectivamente B y b, el contenido del trapecio es $(B + b)h$ independientemente de la triangulación elegida y esto precisamente queríamos demostrar.

Es conveniente, además, tomar nota del hecho de que la descomposición de un triángulo en un trapecio y otro triángulo trazando una línea paralela a uno de sus lados, posee la propiedad de que la suma de los contenidos de sus dos piezas es igual al área de dicho triángulo y que dicho procedimiento de división lo podemos repetir con una línea paralela a la base de su pieza triangular (Fig. 5).

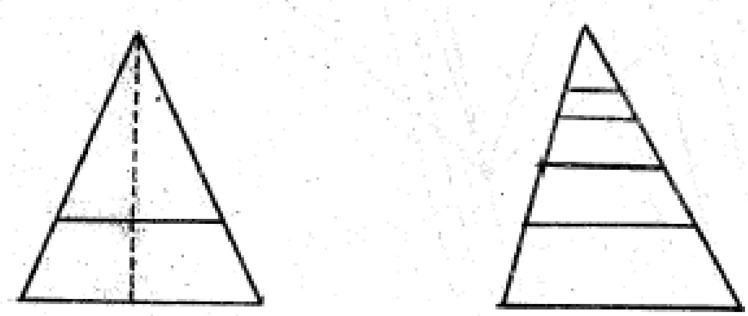

Fig. 5D Δ.

El contenido qe un poligono es la suma de las areas de las piezas da una triangulacion del poligono.

TEOREMA: El contenido de un polígono es independiente de la triangulación elegida, i.e.: todas las triangulaciones de un polígono le asignan el mismo contenido.

Supongamos que tenemos dos triangulaciones distintas de un polígono π. Si superponemos las dos triangulaciones y por cada vértice de las piezas de cada una de ellas, así como por los puntos en que los lados de las piezas de ambas triangulaciones se intersectan, hacemos pasar rectas paralelas a una recta soporte por algún vértice del polígono, éste va a quedar dividido en trapecios y triángulos, i.e.: figuras elementales que además constituyen una equidescomposición de las dos triangulaciones que estamos considerando.

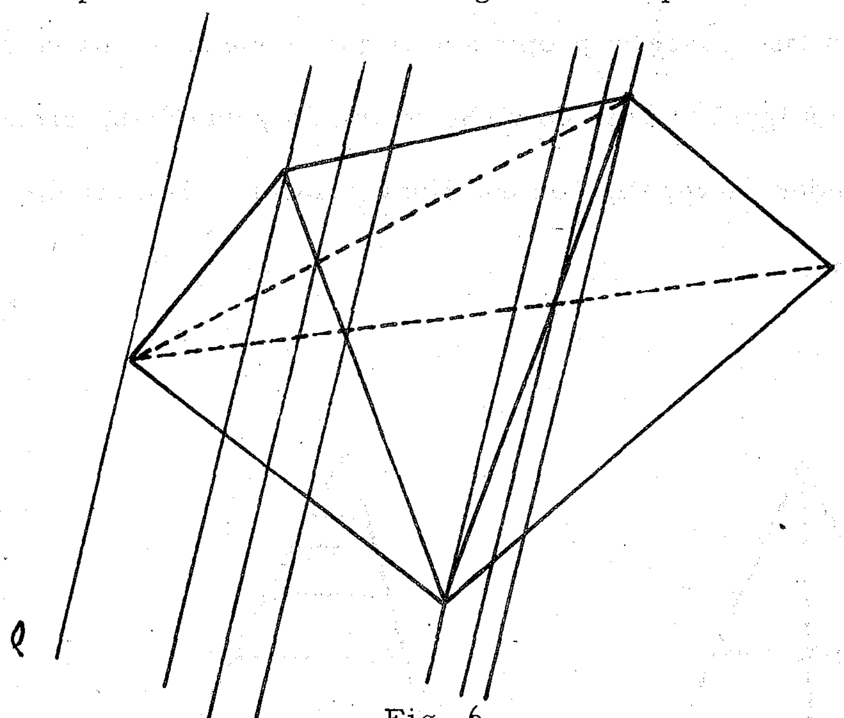

Fig. 6

Pero la suma de las áreas de los triángulos de una de las descomposiciones, es igual a la suma de los contenidos de las figuras elementales en que queda descompuesta y por lo tanto, igual a la suma de las áreas de las piezas triangulares de la otra descomposición, que es lo que queríamos demostrar. Si definimos el área de un polígono como su contenido, el área está bien definida.

TEOREMA: Si dos polígonos tienen la misma área, entonces son equidescomponibles.

Pana la demostnacion de este teonema nequenimos de tnes lemas. cuyas demostraciones proponemos como ejercicios.

LEMA 1. Sean π, π' y π'' polígonos. Entonces si π y π' son equidescomponibles y π' y π'' son equidescomponibles, π y π'' también son equidescomponibles.

LEMA 2. Un triangulo y un rectangulo que coinciden en el lado mayor y tales que la altura del triángulo es el doble de la altura del rectángulo, son equidescomponibles.

LEMA 3. Dos rectángulos que tienen áreas iguales son equidescomponibles. Para demostrar el Lema 3 sugerimos al lector demostrar que un rectángulo y un paralelogramo con la misma base y altura son equidescomponibles.

Ahora la demostración del Teorema. Sean π y π' dos polígonos con la misma área, consideremos una triangulación $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\}$ de π y una triangulación $\{\Delta'_1, \ldots, \Delta'_s\}$ de π'. (Denotemos por $|K|$ el área de un polígono K). Por la definición de área:

$$\sum \Delta_{.} = |\pi| = |\pi'| = \sum_{i=1} |\Delta'_j| .$$

Por el Lema 2, para cada Δi podemos encontrar un rectángulo equidescomponible con Δ_i y por el lema 3 otro rectángulo con base dada, también equidescomponible con Δ_i (Lema 1). Coloquémoslos a estos últimos como en la figura 7. Hagamos lo mismo con los $\Delta j'$ y dado que obtenemos un rectángulo con la misma área que el anterior, si aplicamos el Lema 3 y luego el Lema 1, terminamos.

Fig. 7