Miscelánea Matemática **47** (2008) 39–53

SMM

Espacios localmente convexos y algunos resultados de George Mackey (1916 - 2006)

Thomas E. Gilsdorf

Department of Mathematics, University of North Dakota

Grand Forks, ND, 58202-8376, USA.

thomas_gilsdorf@und.nodak.edu

1. Introducción a espacios normados

George Mackey (1916 - 2006) demostró muchos resultados importantes en el área de espacios localmente convexos. Para estudiar algunos de sus resultados, primero veremos algunos conceptos del cálculo en el contexto de dos variables. Después veremos que estos conceptos se generalizan a espacios normados. Un concepto básico es el de continuidad:

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es **continua** en $a = (a_1, a_2)$ si $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ tal que $d\left(f\left(x\right), f\left(a\right)\right) = d\left(f\left(x_1, x_2\right), f\left(a_1, a_2\right)\right) \leq \varepsilon$ si $d\left(x, a\right) \leq \delta$, donde

$$d\left(x, a\right) = \sqrt{\left(x_1 - a_1\right)^2 + \left(x_2 - a_2\right)^2}$$

es la fórmula usual de distancia en $\mathbb{R}^2$. Una observación es que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$. Durante este artículo, estaremos suponiendo que los conceptos se definen en un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Ahora, regresando al concepto de $d\left(x, a\right)$, cambiamos la notación y ponemos: $\left\|x - a\right\|_2 = \sqrt{\left(x_1 - a_1\right)^2 + \left(x_2 - a_2\right)^2}$. La notación, $\|.\|_2$ es similar a la notación del valor absoluto que se usa para definir conceptos del cálculo en $\mathbb{R}$. En realidad, $\|.\|_2$ define lo que se llama una norma y la idea es conservar las mismas propiedades que tiene el valor absoluto pero en un espacio vectorial más general que $\mathbb{R}$. En general, una **norma** en un espacio vectorial E es una función $\|.\| : E \to [0, \infty)$ tal que para todos los vectores $x, y \in E$, y para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos:

(i) $\|x\| \geq 0$, y, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad del triángulo).

Entonces, podemos ver que una norma tiene las mismas propiedades que el valor absoluto; en otras palabras, que en realidad el valor absoluto en $\mathbb{R}$ es una norma. Además, podemos decir que un espacio vectorial en donde se define una norma, se llama un **espacio normado**, y se denota $(E, \|.\|)$. Se puede mostrar (vea: [9; 1-3, 19, pág. 24]) que $\|.\|_2$ satisface las tres propiedades de una norma en $\mathbb{R}^2$. Concluimos que $(\mathbb{R}, |.|)$ y $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ son espacios normados. Esta idea se extiende a espacios de dimensión más grande. Por ejemplo, podemos definir una norma en $\mathbb{R}^n$ por $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Más adelante veremos que los espacios vectorales de dimensión infinita tienen muchas propiedades interesantes. Ahora veamos algunos ejemplos de espacios normados de dimensión infinita:

Ejemplo 1 *El espacio de sucesiones reales convergentes a cero.*

Denotamos por c_0 el conjunto de sucesiones $x = (x_n)$, $x_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$
Por propiedades de sumas y múltiples escalares de sucesiones convergentes, c_0 es un espacio vectorial. En c_0 consideramos
$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_n \{|x_n|\}.$$
Escribimos $(c_0, \|.\|_\infty)$. Un elemento particular de c_0 es $x = \left(\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right)$. En este caso, $\|x\|_\infty = \sup\left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right\} = 2$.

Podemos verificar que $\| \, . \, \|_\infty$ satisface las tres condiciones para ser una norma: La primera propiedad es clara. Luego, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in c_0$, entonces,
$$\|(\alpha x_n)\|_\infty = \sup_n \{|\alpha x_n|\} = |\alpha| \sup_n \{|x_n|\}.$$
Para verificar la desigualdad del triángulo, sean $x = (x_n) \in c_0$, $y = (y_n) \in c_0$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ aplicamos la desigualdad del triángulo de $\mathbb{R}$ y obtenemos:
$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \sup_n \{|x_n|\} + \sup_n \{|y_n|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$
Ahora, tomamos el supremo del lado izquierdo para obtener
$$\|x + y\|_\infty = \sup_n \{|x_n| + |y_n|\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Falta mostrar que $\dim(c_0) = \infty$. Consideremos el conjunto

$$C = \{(1, 0, \cdots), (0, 1, 0, \cdots), (0, 0, 1, 0, \cdots), \cdots\}.$$

Sean $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)} \in C$ donde $x^{(i)}$ tiene el valor 1 en el i- ésimo lugar y ceros en los otros lugares. Supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Formamos la combinación lineal:

$$\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \cdots + \alpha_k x^{(k)} = 0 = (0, 0, \ldots).$$

Entonces, tenemos

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, 0, 0, \cdots) = (0, 0, \ldots),$$

lo que implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$; en otras palabras, C es un conjunto linealmente independiente en c_0. Concluimos que $\dim(c_0) = \infty$.

Ejemplo 2 *El espacio de sucesiones reales absolutamente sumables.*

Con la notación del ejemplo anterior, se denota por l_1 el conjunto de sucesiones reales (x_n) tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty.$$

Usando ideas del cálculo, es fácil ver que l_1 es un espacio vectorial. En l_1 consideramos

$$\|(x_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Es fácil ver que $\| \, . \, \|_1$ satisface las tres condiciones para ser una norma. Se denota por $(l_1, \|.\|_1)$ al correspondiente espacio vectorial normado. El subconjunto C de c_0 antes mencionado también está contenido en l_1, lo que nos muestra que $\dim(l_1) = \infty$.

En $\mathbb{R}$ el valor absoluto es el mecanismo que mide distancias y que además sirve para definir todos los conceptos de cálculo, tales como límites, continuidad, derivadas, integrales, y convergencia de sucesiones y series. Veamos esto con más detalle: para decir que una función f tiene un límite L en el valor a, trabajamos con expresiones como $|x-a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$. Traduciendo éstas a la notación de intervalos, tenemos: $x \in (a-\delta, a+\delta)$ y $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Por lo tanto, son los intervalos abiertos lo que usamos para describir los límites, y por supuesto, todo lo que depende de límites. La colección de conjuntos abiertos forma una estructura en $\mathbb{R}$ que se llama una **topología**. Las reglas básicas de una topología en un conjunto X son:

(i) El conjunto X y el conjunto vacío ($\emptyset$) pertenecen a la topología,

(ii) Uniones arbitrarias de miembros de la topología pertenecen a la topología,

(iii) Intersecciones finitas de miembros de la topología pertenecen a la topología.

El lector puede checar estas propiedades en el caso de la colección de in- tervalos abiertos en $\mathbb{R}$, suponiendo que $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ pertenecen a la colección. Un buen libro sobre topología es [15]. En ese texto se muestra que las propiedades no cambian si usamos "$\leq$" en lugar de "$<$ " en las expresiones anteriores de ε y δ. Aquí, nos enfocamos en los conceptos de funciones continuas y sucesiones convergentes: *las topologías determinan cuáles funciones (entre dos espacios vectoriales con topologías) son continuas y cuáles no, además determinan cúales sucesiones convergen y cuáles no.*

En espacios normados, determinamos continuidad y convergencia al examinar si cantidades como $\|x-a\|$ (o $\|f(x)-f(a)\|$) son pequeñas o no.
Geométricamente, estamos examinando la colección de vectores x en la bola centrada en a y radio $\delta > 0$ (denotada $B_\delta(a)$), para ciertos valores de δ. Entonces, $x \in B_\delta(a)$ quiere decir que $\|x-a\| \leq \delta$. La unidad básica de un espacio normado X es la **bola unitaria**:

$$B_1(0) = \left\{x \in X^2 \,|\, \|x\| \leq 1\right\}.$$

No es difícil ver que en lugar de tener bolas de radio $\delta > 0$, podemos usar números de la forma $\frac{1}{k}$, donde $k \in \mathbb{N}$. En otras palabras: *la bola unitaria de una norma, determina una base local (en 0)* $\{\frac{1}{k}B_1(0) : k \in \mathbb{N}\}$ *para la topología* τ *generada por la norma* (es fácil ver que tal topología es invariante bajo tras- laciones). Por ejemplo, para definir convergencia a cero de una sucesión (x_n) en un espacio normado con bola unitaria $B_1(0)$, podemos decir que $x_n \to 0$ si $(\forall k \in \mathbb{N})\, (\exists N_k \in \mathbb{N})$ tal que

$$x_n \in \frac{1}{k} B_1(0)$$

para todo $n \geq N_k$.

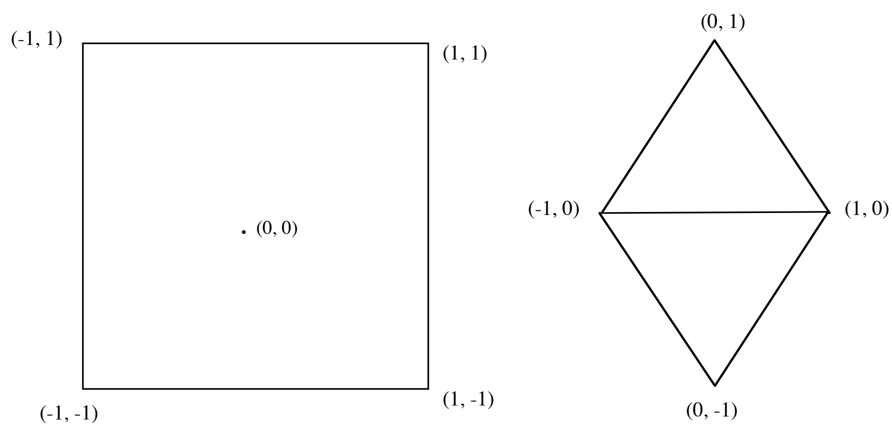
Podemos definir otras normas en $\mathbb{R}^n$ que producen otras formas geométricas de la bola unitaria. Por ejemplo, el lector puede verificar que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

y

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \cdots, |x_n|\},$$

son normas en $\mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Sus bolas unitarias se ven en la Figura 1.

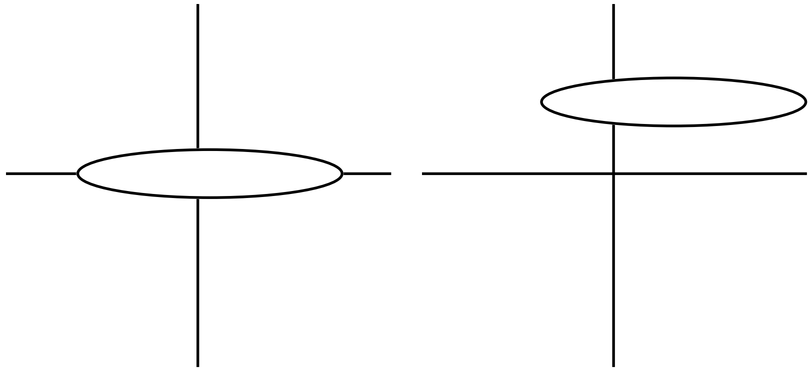


(a) $B_1(0), \|.\|_\infty$ *(b)* $B_1(0), \|.\|_1$

Figura 1: Ejemplos de bolas unitarias.

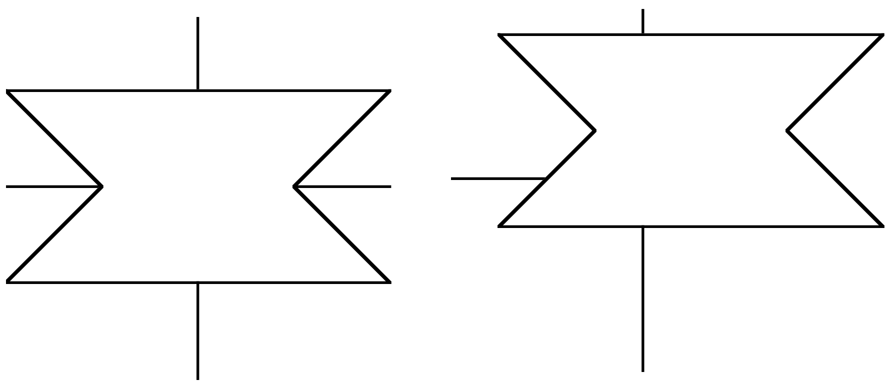
Con estos ejemplos podemos ver aspectos de la geometría de $B_1(0)$: primero, $B_1(0)$ es convexo, es decir, un conjunto que contiene todos los posibles seg- mentos de recta determinados por sus elementos. Específicamente, un conjunto A es **convexo** si $(\forall x, y \in A)\,(\forall t \in [0,1])\, tx + (1-t)\, y \in A$. Con la desigualdad del triángulo, podemos verificar que, en todos los casos $B_1(0)$ es convexo: $(\forall x, y \in B_1(0))\,(\forall t \in [0,1])$ $\|tx + (1-t)\, y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)\, y\| \leq t + (1-t) \leq 1$. También es fácil ver que $B_1(0)$ es **balanceado**, es decir, $(\forall x \in B_1(0))\,(\forall \alpha \in \mathbb{K})$ con $|\alpha| \leq 1$, tenemos que $\alpha x \in B_1(0)$. Un conjunto que es convexo y balanceado se llama **absolutamente convexo**. Hemos establecido que $B_1(0)$ es absolutamente convexo. Hay unos ejemplos en la Figura 2 y la Figura 3.

Muchos de los primeros resultados profundos de espacios normados fueron demostrados por el matemático polaco, Stefan Banach (1892 - 1945). Hay biografías de él en [8] y [18]. Banach probó la mayoría de sus resultados en su libro [1], que se considera como uno de los libros más importantes del análisis funcional del siglo XX. Vale la pena mencionar que un **espacio de Banach** es un espacio normado tal que cada sucesión de Cauchy converge a un punto del espacio. Un libro reciente sobre la teoría de espacios de Banach es [14].



(a) convexo y balanceado *(b) convexo, no balanceado*

Figura 2: Ejemplos de conjuntos convexos.



(a) balanceado, no convexo *(b) ni balanceado, ni convexo*

Figura 3: Más ejemplos.

2. Espacios localmente convexos

Estamos listos para definir un espacio localmente convexo. Primero, una definición general:

Definición 3 *Un* ***espacio vectorial topológico (e.v.t.)*** *es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con una topología (Hausdorff) tal que la suma vectorial y la multiplicación por escalares son funciones continuas.*

Definición 4 *Un* ***espacio localmente convexo (e.l.c.)*** *es un e.v.t. con una base local (en 0) de conjuntos convexos.*

Escribimos (E, τ), donde E es el espacio vectorial y τ es su topología. Resulta (vea [5]) que podemos suponer incluso que los conjuntos de la topología son absolutamente convexos. Textos en donde el lector puede aprender la teoría de *e.l.c.* son [2], [5], [16] y [17].

Resulta que la continuidad de la suma implica que siempre podemos considerar vecindades de 0. En otras palabras, sin pérdida de generalidad, podemos investigar los conjuntos centrados en 0. Otra observación es que se puede verificar que la suma y la multiplicación por escalar en un espacio normado son funciones continuas, y ya sabemos que los conjuntos de la base local (en 0) $\left\{\frac{1}{k}B_1(0)\,|k \in \mathbf{N}\right\}$ de su topología τ son absolutamente convexos. Entonces, *cualquier espacio normado es un e.l.c.*

Ejemplo 5 *Productos.*

Sabemos que como espacio vectorial $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (n veces); es decir, $\mathbb{R}^n$ es un producto cartesiano. En general, podemos considerar el espacio vectorial de las sucesiones reales $E = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y poner en E una topología que se llama la topología producto τ (vease [15; Sec. 2 - 8] para más detalles). La conclusión más importante de este ejemplo es que (E,τ) es un *e.l.c.* que es metrizable (su topología se puede definir con una métrica), pero no es un espacio normado (los detalles se encuentran en [16; 5.7.1, pág. 84, y 7.4.5, pág. 137]).

Ejemplo 6 *Un e.l.c. no metrizable.*

Recordemos que $C^{\infty}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que cada una de sus derivadas, $f^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$, existe. Ahora, definimos espacios vectoriales E_n, $n\in\mathbb{N}$, como sigue:

$$E_n = \{f\in C^{\infty}(\mathbb{R})\,|f(x)=0\ \ (\forall x\notin[-n,n])\}\,.$$

Equipemos a cada E_n con la norma $\|.\|_n$ dada por:

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)|\,|x\in[-n,n]\}\,,(\forall f\in E_n)\,.$$

Se puede probar que $(E_n,\|\cdot\|_n)$ es un espacio normado; de hecho es un espacio de Banach. El lector puede verificar que: $E_1\subset E_2\subset\cdots$, y que para cada $n\in\mathbb{N}$, tenemos $\|f\|_{n+1} = \ \|f\|_n\,,(\forall f\in E_n)$. En otras palabras, la función identidad, $id: E_n\to E_{n+1}$ es continua, $(\forall n\in\mathbb{N})$. Sea

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Es fácil ver que E es un espacio vectorial. Ponemos en E la topología (localmente convexa) τ más fuerte tal que $id : E_n \rightarrow E$ es continua, $(\forall n \in \mathbb{N})$. En [5; Prop. 2.12, pág. 165 - 171, y 6(a), pág. 175] se muestra que (E, τ) es un espacio localmente convexo y que (E, τ) no es metrizable.

Entonces, tenemos el diagrama de la Figura 4:

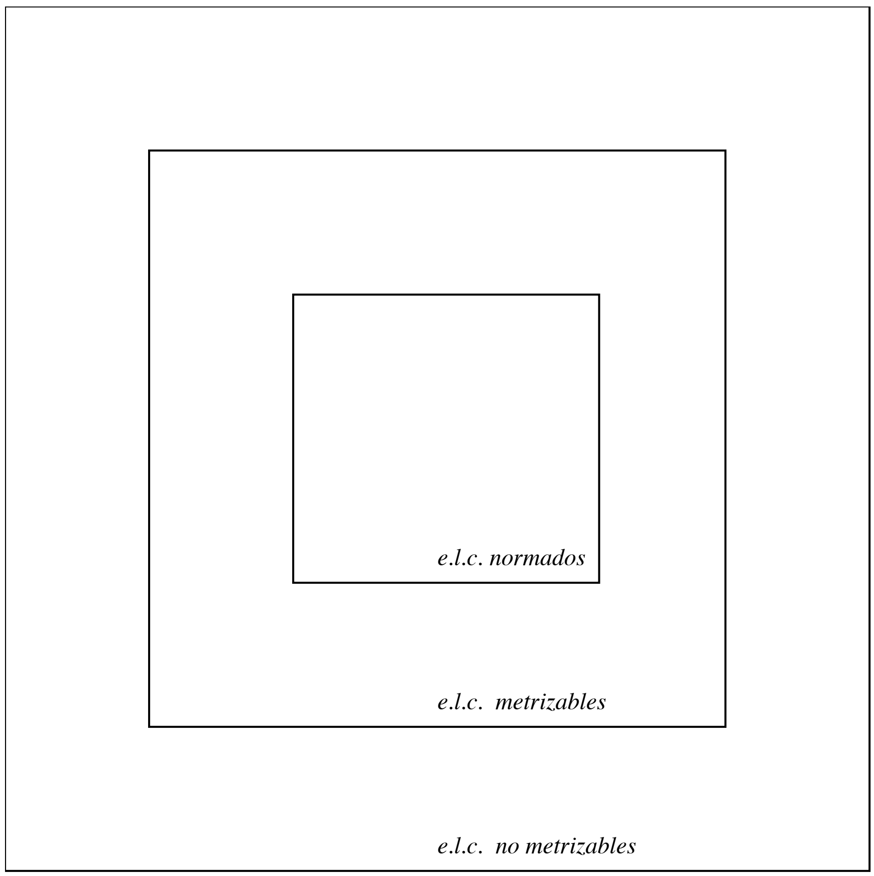


Figura 4: Espacios normados, metrizables, y no metrizables.

Hay muchas maneras de construir más espacios localmente convexos, pero la manera que veremos ahora es una de las más interesantes.

3. El espacio dual

La definición del espacio dual es algo básico. Por otro lado, veremos que esa definición nos abre muchos resultados interesantes.

Definición 7 *Sea* (E,τ) *un e.l.c. Su* ***espacio dual****, denotado por* $(E,\tau)'$*, es:*

$$(E,\tau)' = \{T : E \to \mathbb{K} | T \textit{ es lineal y } \tau - \textit{continua}\}.$$

Por las propiedades de funciones continuas, deducimos que $(E,\tau)'$ es un espacio vectorial. La importancia del espacio dual es que, frecuentemente, conociendo propiedades de $(E,\tau)'$ podemos deducir propiedades de (E,τ) y viseversa. Una observación importante es que: *en general, un cambio de topología produce cambios de funciones continuas, sucesiones convergentes, etc.* Esto nos dice que en general, si τ y η son topologías y $\tau \neq \eta$, entonces $(E,\tau)' \neq (E,\eta)'$. Sin embargo, veremos que hay ciertas topologías que no cambian el dual. Primero vamos a ver un par de ejemplos.

Ejemplo 8 $(\mathbb{R}^n, \|.\|)' = \mathbb{R}^n$*, donde* $\|.\|$ *es cualquier norma en* $\mathbb{R}^n$*.*

Entonces, cada función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal y continua se puede identificar con un elemento del mismo $\mathbb{R}^n$. Deducimos que el dual de $\mathbb{R}^n$ no nos da "nueva" información sobre el espacio. Por eso, como habíamos mencionado anteriormente, nos interesa considerar espacios de dimensión infinita.

Ejemplo 9 $(c_0, \|.\|_\infty)' = l_1$.

La demostración de este hecho se puede encontrar en [5; 1.7.2, pág. 55].

Resulta que para un *e.l.c.* de dimensión infinita hay topologías, $\omega \neq \tau$, tales que $(E,\tau)' = (E,\omega)'$. La topología ω puede ser "más débil" que τ, es decir, $\omega \subset \tau$, o ω puede ser "más fuerte" que τ, es decir, $\tau \subset \omega$. Por otro lado, en otros aspectos, el cambio de topología no nos da la misma propiedad. Por ejemplo, si $\omega \neq \tau$ y $(E,\tau)' = (E,\omega)'$, todavía puede pasar que una sucesión que converge en (E,τ) no es convergente en (E,ω) (si ω es estrictamente más fuerte que τ, es decir, $\tau \subsetneq \omega$). Una topología (localmente convexa) ω tal que $(E,\tau)' = (E,\omega)'$ se llama una **topología compatible con** τ. La topología más débil posible compatible con τ se llama la **topología débil** y se denota por σ. En su tesis doctoral de 1942, Mackey demostró que existe una topología única μ, que es la más fuerte posible tal que $(E,\tau)' = (E,\mu)'$. En su honor, a μ se le llama la **topología de Mackey**. Por lo tanto, se tienen las siguientes relaciones generales:

$$(E,\sigma)' = (E,\tau)' = (E,\mu)', \sigma \subsetneq \tau \subsetneq \mu.$$

Respecto a notación, si no hay confusión con la topología de E, podemos denotar al espacio dual como E'.

Antes de continuar, podemos hablar un poco sobre la historia de los espacios localmente convexos. Más bien, podemos preguntarnos, respecto al Ejemplo 6, ¿para qué sirven los *e.l.c.* que no son metrizables? Nos gustaría que el espacio tuviera una norma o por lo menos una métrica para medir concretamente las distancias. En 1933 el físico Paul Dirac (1902 - 1984) ganó el Premio Nobel por sus trabajos sobre problemas físico matemáticos. Una parte importante de su trabajo es que desarrolló el concepto de un tipo de solución de ciertas ecuaciones diferenciales parciales, que hoy en día se llama **la delta de Dirac**, δ. Para los matemáticos, este concepto era misterioso porque su definición es $\delta(0) = \infty$, $\delta(x) = 0$ si $|x| > 0$, lo que implica que δ no es una función en el sentido del cálculo. Años después, en 1950, el matemático francés Laurent Schwartz (1915 - 2002), estudió esta situación y ganó la medalla Fields (el equivalente del Premio Nobel para el área de las matemáticas). Schwartz desarrolló lo que hoy en día son las propiedades básicas de los espacios localmente convexos, en particular, mostró que la delta de Dirac sí tiene sentido matemático, como elemento de un espacio *dual*. Aunque el concepto del espacio dual ya existía, el trabajo de Schwartz motivó un interés intenso en espacios duales. Vale la pena mencionar que muchos espacios duales, incluyendo el que contiene la δ de Dirac, no son metrizables. Hay más información sobre Schwartz y Dirac en las páginas web [19] y [20], respectivamente.

4. Conjuntos acotados

George Mackey produjo un impacto muy grande en el tema de espacios localmente convexos. La la mayoría de sus resultados los demostró en su tesis de doctorado. Mackey obtuvo su doctorado en matemáticas en la Universidad de Harvard en 1942. Se pueden ver esos resultados en [12] y [13]. Hoy en día, los libros sobre temas de espacios vectoriales topológicos y de espacios localmente convexos, tienen muchos términos que contienen el nombre de Mackey. Algunos ejemplos son: "El teorema de Mackey Arens", "el teorema de Banach- Mackey", "la topología de Mackey"que hemos discutido, "convergencia de Mackey", etc. Hay una biografía de Mackey y sus matemáticas en [4]. Un concepto que estudió mucho fue el de conjunto acotado.

Definición 10 *Sea (E, τ) un e.l.c. Un conjunto $A \subset E$ es **acotado** si para cada $\tau-$ vecindad U de 0, existe $a > 0$ tal que $A \subset aU$.*

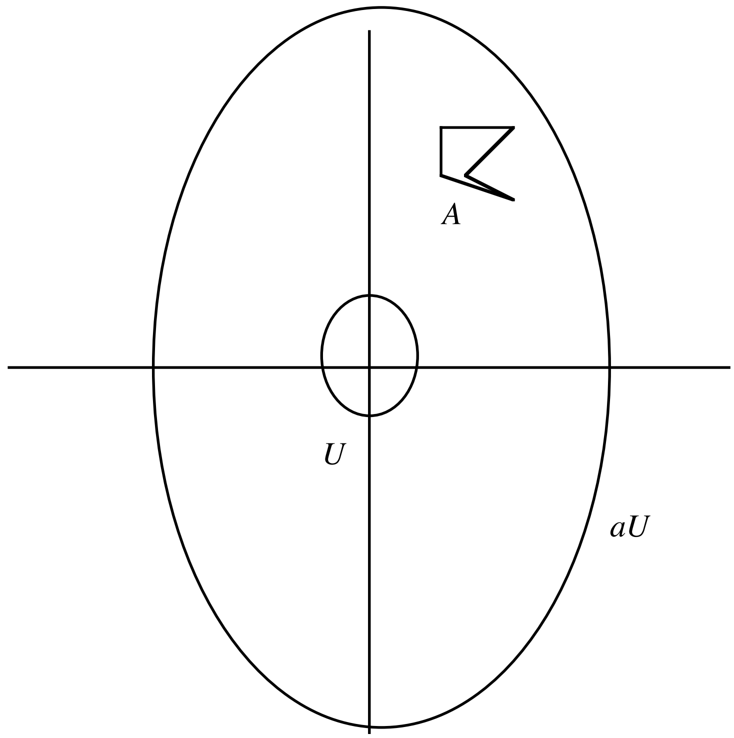


Figura 5: Dibujo de un conjunto acotado A.

Si queremos saber si un conjunto es acotado, tenemos que checarlo respecto a la topología τ. Por lo tanto, *si cambiamos la topología, cambiamos la colección de conjuntos acotados*. Sin embargo, el teorema siguiente dice que las topologías compatibles, aunque pueden ser distintas, no cambian la colección de conjuntos acotados.

Teorema 11 *(**Mackey- Arens**). Las topologías compatibles tienen los mismos conjuntos acotados.*

Por ejemplo, A es $\sigma-$ acotado $\Longleftrightarrow$ A es μ - acotado, aúnque en general $\sigma \neq \mu$.

5. Convergencia de Mackey

Sea (E, τ) un *e.l.c.* Un **disco** es un conjunto absolutamente convexo, acotado, y cerrado. Si B es un disco, entonces $E_B = span\,(B)$ denota el espacio vectorial más pequeño que contiene a B. En E_B usamos la topología τ_B generada por $\left\{\frac{1}{k}B | k \in \mathbf{N}\right\}$. No es difícil mostrar que cuando B es un disco, τ_B genera una norma. Esto no es sorprendente pues, si comparamos τ_B con la topología generada por la bola unitaria de un espacio normado, vemos que B actua como la bola unitaria de E_B. Denotamos a la topología τ_B por $\|.\|_B$. Ahora, podemos definir el concepto de convergencia de Mackey:

Definición 12 *Una sucesión* (x_n) *en* E ***converge a 0 en el sentido de Mackey*** *(denotado* $x_n \overset{M}{\to} 0$ *) si existe un disco* B *tal que* $x_n \to 0$ *en* $(E_B, \|.\|_B)$.

Es fácil mostrar que la topología generada por $\|.\|_B$ es más fuerte que la topología τ de E en el espacio vectorial E_B (vea [16; pág. 299). En otras palabras, $id : (E_B, \|.\|_B) \to (E, \tau)$ es continua. Concluimos que en general: $x_n \overset{M}{\to} 0 \Longrightarrow x_n \to 0$ en (E, τ), pero $x_n \to 0$ en (E, τ) no implica que $x_n \overset{M}{\to} 0$. Sin embargo, hay espacios en los cuales los dos tipos de convergencia coinciden.

Definición 13 *Si* $x_n \to 0$ *en* (E, τ) *siempre implica que* $x_n \overset{M}{\to} 0$, *entonces decimos que* (E, τ) *satisface* ***la condición de convergencia de Mackey****, escrito (CCM).*

Observemos que cualquier espacio normado satisface la *(CCM)*. Por cierto, para cada sucesión que converge a 0 en tal espacio escogemos a B como la bola unitaria. En [5; 3.7, 7 (d), pág. 225], se puede ver que aún un espacio metrizable satisface la *(CCM)*. Veamos otro ejemplo como una aplicación del Teorema 11.

Ejemplo 14 (c_0, σ) *no satisface la (CCM).*

Demostración: Para no confundir notaciones, denotamos por E al espacio vectorial c_0. Necesitamos una sucesión $\left(x^{(n)}\right)$ (de sucesiones de números reales) en E que converja con respecto a la topología σ pero tal que que no existe ningún disco B, acotado respecto a σ, tal que $\left(x^{(n)}\right)$ converja respecto a $(E_B, \|.\|_B)$. Definimos $\left(x^{(n)}\right)$ como

$$x^{(n)} = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots), n \in \mathbb{N},$$

donde el valor 1 aparece en el n- ésimo lugar. Se puede mostrar (siguiendo las ideas de [14; pág. 116]) que $x^{(n)} \to 0$ en (E, σ). Ahora, consideremos cualquier disco B tal que B es acotado respecto a σ. Apliquemos el *Teorema de Mackey- Arens*: B tiene que ser acotado respecto a la topología de la norma $\|.\|_\infty$ de E. Supongamos que $\left(x^{(n)}\right)$

converge a 0 en algún espacio $(E_B, \|.\|_B)$. Como B es acotado respecto a la norma $\|.\|_\infty$ de c_0, entonces $x^{(n)} \to 0$ respecto a $\|.\|_\infty$. Esto no puede pasar, porque claramente para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left\|x^{(n)}\right\|_\infty = 1$. Por lo tanto, $\left(x^{(n)}\right)$ no converge en el sentido de Mackey. ■

6. La (CAM) y espacios dóciles

En esta sección veremos otra propiedad sobre conjuntos acotados que estudió Mackey. Veremos que la propiedad tiene conecciones con investigaciones actuales del análisis funcional.

Definición 15 *Un espacio* (E, τ) *satisface la* ***condición de acotados de Mackey*** *(CAM), si para cada sucesión de conjuntos acotados* (A_n) *en* E*, existe una sucesión de escalares* (a_n) *tal que* $a_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$*, y*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n A_n$$

todavía es acotada.

La *(CAM)* ha estado ignorada por casi 50 años. Curiosamente, en los últimos años ha aparecido en varias investigaciones. Por ejemplo, se usa en varios teoremas de la teoría de distribuciones no-lineales, como en [10; 22.17, pág. 236]. Además, veremos que la *(CAM)* tiene una conección con espacios que se llaman dóciles. Primero, nos preguntamos, ¿Qué espacios satisfacen la *(CAM)*? En [5; Prop. 2.6.3, pág. 116], vemos que cada espacio metrizable satisface la *(CAM)*. Ahora, veamos el concepto de espacios dóciles:

Definición 16 *Un e.l.c. es* ***dócil*** *si cada uno de sus subespacios vectoriales de dimensión infinita contiene un conjunto acotado* B *tal que* $\dim(B) = \infty$*.*

Este concepto es reciente, de S. Saxon y J. Kąkol [6] en 2002 (hay más detalles en [7]). Aunque no parece tener relación alguna con la *(CAM)*, en 2005, C. Kummet mostró en su tesis de maestría (ver [11]), que sí hay una conección:

Teorema 17 *La (CAM)* $\Longrightarrow$ *dócil.*

Demostración: Supongamos que E satisface la *(CAM)*. Sea F cualquier subespacio de E de dimensión infinita.

Existe un conjunto infinito $\{x_1, x_2, \cdots\}$ en F que es linealmente independiente. Ahora, sea $A_n = \{x_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Cada A_n es acotado. Por la *(CAM)*, $(\exists\,(a_n))$ tal que $a_n > 0\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$ y

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n A_n$$

es acotado. Ahora, mostramos que $\dim(B) = \infty$. Si

$$\alpha_1\,(a_{n_1} x_{n_1}) + \cdots + \alpha_k\,(a_{n_k} x_{n_k}) = 0$$

en F, entonces, $(\alpha_1 a_{n_1})\,x_{n_1} + \cdots + (\alpha_k a_{n_k})\,x_{n_k} = 0$. Por la independencia lineal de $\{x_1, x_2, \cdots\}$, tiene que ser que $\alpha_1 a_{n_1} = \cdots = \alpha_k a_{n_k} = 0$. Como $a_n > 0\,(\forall n \in \mathbb{N})$, es claro que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. ■

Por supuesto, la pregunta natural es si dócil $\Longrightarrow$ *(CAM)*. Resulta que los espacios metrizables satisfacen la *(CAM)* y también son dóciles. Además, Kummet mostró en su tesis que el espacio del Ejemplo 6 no es ni dócil ni satisface la *(CAM)*. Actualmente, en [3] se está investigando esta situación, y propiedades generales de la *(CAM)*, por ejemplo que *(CCM)* $\not\Rightarrow$ *(CAM)* y *(CAM)* $\not\Rightarrow$ *(CCM)*.

Agradecimiento.
Me gustaría reconocer el apoyo para este trabajo como parte de una beca de Fulbright- García Robles durante 2006 - 2007 cuando fuí profesor visitante en el ITAM, México, D. F. También quiero agradecer el apoyo de sabático que me ortogó la Universidad de Dakota del Norte en ese mismo lapso. Me gustaría agradecerles también al Dr. Carlos Bosch Giral y al árbitro por sus correcciones y comentarios sobre este artíulo.

Referencias

[1] Banach, Stefan, *Théorie Des Opérations Linéaires* (Monografje Matematyczne). Publicado por Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, Polonia (1932).

[2] C. Bosch Giral, E. Fernández Bermejo, *Análisis Funcional I*, Monografías del Instituto de Matemáticas, **21**, UNAM, (1989).

[3] C. Bosch Giral, T. Gilsdorf, C. Gómez Wulschner, *Mackey first countability and docile locally convex spaces*, en preparación, (2007).

[4] R. Doran, A. Ramsay, *George Mackey, 1916 - 1996*, Notices AMS, **54**, (2007), no. 7, 824 - 831,

[5] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. 1*, Academic Press, (1966).

[6] J. Kąkol, S. A. Saxon, *Montel (DF)- spaces, sequential (LM)- spaces and the strongest locally convex topology*, J. London Math Soc., **66**, (2002), 388 - 406.

[7] J. Kąkol, S. A. Saxon, A. R. Todd, *Docile locally convex spaces*, Contemp. Math., **341**, AMS, (2004), 73 - 77.

[8] R. Kaluza, *Through a Reporter's Eyes: The Life of Stefan Banach*, traducido por A. Kostant y W. Woyczynski, Birkhäuser, (1996).

[9] J. Kirkwood, *An Introduction to Analysis, Second Edition*, PWS, (1995).

[10] A. Kriegl, P. Michor, *The Convenient Setting of Global Analysis*, Math. Surveys, AMS, **53**, (1997).

[11] C. Kummet, *Bounded sets in locally convex spaces*, Master's Thesis, University of North Dakota, (2005).

[12] G. Mackey, *On infinite- dimensional linear spaces*, Trans. AMS, **57**, no. 2, (1945), 155- 207.

[13] G. Mackey, *On convex topological linear spaces*, Trans. AMS, **60**, no. 3, (1946), 519- 537.

[14] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory* , Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics, (2005).

[15] J. Munkres, *Topology. A First Course*, Prentice Hall, (1975).

[16] L. Narici, E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces*, Dekker, (1985).

[17] A. P. Robertson y W. Robertson, *Topological Vector Spaces, Second Edition*, Cambridge Univ. Press, (1973).

[18] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Banach.html.

[19] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schwartz.html.

[20] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Dirac.html.