Miscelánea Matemática **20**, *51-55 (1994)*

¿Como comprobar (sin dolor) la regularidad de matrices estocásticas?

Guillermo Grabinsky
Depto. de Matemáticas, ITAM

1 Introducción:

La siguiente nota surgió de la necesidad de verificar la regularidad de matrices de probabilidad finitas sin recurrir al cálculo de sus potencias, que como sabemos es una labor tediosa y poco gratificamente. El método que proponemos se reduce esencialmente a considerar el diagrama de transición de la matriz y a "perseguir" sus flechas.

Notación 1.1

1) $\mathbf{P} = (p_{ij})$ denotará una matriz estocástica (o de probabilidad) de tamaño $r \times r$, esto es:

a) $p_{ij} \geq 0, \quad \forall\, i,j \in \{1,\ldots,r\}$.

b) $\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1 \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,r\}$.

2) Escribiremos $\mathbf{P} > 0$ si $p_{ij} > 0 \ \ \forall\, i,j$ y $\mathbf{P} \gg 0$ si existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $\mathbf{P}^n > 0$. En estos términos tenemos que $\mathbf{P}$ es una matriz regular $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{P} \gg 0$.

A continuación introduciremos terminología estandar y que además es muy sugestiva.

Definición 1.2 Sea $\mathbf{P}$ una matriz estocástica y sean $i,j \in \{1,\ldots,r\}$ dados. Decimos que *el estado i lleva al estado j* si $\exists\, n \in \mathbf{N}$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$ (denotado $i \to j$). Observamos que si $i \to j$ y $j \to k$ entonces $i \to k$, ya que si
$p_{i,j}^{(n)} > 0$ y $p_{j,k}^{(m)} > 0$, entonces:
$p_{i,k}^{(n+m)} = \sum\limits_{i=1}^{r} p_{i\ell}^{(n)} p_{\ell k}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0.$

Definición 1.3 Decimos que $\mathbf{P}$ es *irreducible* si $i \to j \quad \forall\, i,j \in \{1,\ldots,r\}$.

Ejemplo 1.4 *Sea* $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Introducimos una manera esquemática para describir la transición en un paso de un estado a otro (conocido como *diagrama de transición*) de la siguiente manera: . Aquí, una flecha entre dos estados significa que es posible ir en un paso de uno a otro con probabilidad positiva en el sentido que indica la flecha. En nuestro caso siguiendo flechas es fácil convencerse que $1 \to 3$, $2 \to 1$ y $2 \to 2$ en dos pasos y que $\mathbf{P}$ es *irreducible.*

El siguiente resultado caracteriza la regularidad de una matriz $\mathbf{P}$ en términos de la irreducibilidad y de una condición adicional sobre la diagonal de las potencias de $\mathbf{P}$.

Teorema 1.5

$$\mathbf{P} \text{ es regular} \iff \begin{cases} 1) & \mathbf{P} \quad \text{es irreducible.} \\ 2) & \exists\, m \in \mathbf{N} \quad \text{tal que } p_{ii}^{(n)} > 0 \quad \forall\, n \geq m \ y\, \forall\, i. \end{cases}$$

Demostración:
$\Rightarrow$) Si $\mathbf{P}$ es regular existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $\mathbf{P}^m > 0$. Como $\mathbf{P}$ es estocástica $\mathbf{P}^m, \mathbf{P}^{m+1}, \ldots$ son todas, matrices positivas en particular $p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall\, i,j$ y $\forall\, n \geq m$.
$\Leftarrow$) Por la hipótesis (1) $\forall\, i,j$, $\exists\, n = n(i,j)$ tal que $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Sea $N = \max\limits_{i,j} \{n(i,j)\}$, afirmamos que $\mathbf{P}^{N+m} > 0$. Sean k, ℓ estados y escribimos $m + N = m' + n(k,\ell)$, entonces $m' \geq m$ y $p_{k,\ell}^{(m+N)} \geq p_{kk}^{(m')} p_{k\ell}^{n(k,\ell)} > 0$ ∎

En ejemplos concretos la condición (2) del teorema anterior presenta todavía algunas dificultades por lo que es necesario simplificarla lo que hacemos a continuación.

Teorema 1.6 $\exists\, m \in \mathbf{N}$ *tal que* $p_{ii}^{(n)} > 0 \quad \forall\, n \geq m \quad \Longleftrightarrow \quad \exists$ *dos números naturales* a *y* b *primos relativos tales que:* $p_{ii}^{(a)} > 0$ *y* $p_{ii}^{(b)} > 0$.

Demostración: $\Rightarrow$) Basta tomar $a = m$ y $b = m + 1$.
$\Leftarrow$) Como $(a, b) = 1$ existen α y β enteros tales que $\alpha a + \beta b = 1 \qquad \ldots(*)$.

Sea $M = a + b$ y $m = M^2\gamma$ con $\gamma = \max\,\{|\alpha|, |\beta|\}$ entonces, si $n \geq m$ se sigue del algorítmo de la división que: $n = qM + r$ con $q \geq M\gamma$ y $0 \leq r < M$. Asi pues por (*):

$$n = qM + r\alpha a + r\beta b = a(q + r\alpha) + b(q + r\beta),$$

pero $q + r\alpha \geq M\gamma + r\alpha \geq M|\alpha| + r\alpha > 0$. Análogamente $q + r\beta > 0$, asi pues $n = ad_1 + db_2$ con $d_1, d_2 > 0$.

Por lo que :

$$p_{ii}^{(n)} \geq p_{ii}^{(ad_1)} p_{ii}^{(bd_2)} \geq (p_{ii}^{(a)})^{d_1} (p_{ii}^{(b)})^{d_2} > 0$$

■

Nota 1.7 El número $m = M^2\gamma$ es por lo general excesivo, sin embargo es suficiente para probar el teorema.

Volviendo al diagrama de transición del ejemplo 1.4 **P** es irreducible y es claro que

$$\begin{aligned}
&p_{11}^{(3)} > 0, \quad p_{11}^{(5)} > 0 \text{ y } (3,5) = 1,\\
&p_{22}^{(2)} > 0, \quad p_{22}^{(3)} > 0 \text{ y } (2,3) = 1,\\
&p_{33}^{(2)} > 0, \quad p_{33}^{(3)} > 0 \text{ y } (2,3) = 1.
\end{aligned}$$

Por lo ya expuesto **P** resulta regular. El lector puede comprobar que $\mathbf{P}^5 > 0$ y no antes.

Ejemplo 1.8 Consideremos el siguiente laberinto con nueve celdas numeradas. Supongamos que un ratón es colocado en alguna celda y es obligado a cambiar de una celda a otra contigua cada segundo con probabilidad positiva. Es claro que esto da lugar a un diagrama de transición irreducible, sin embargo un examen directo nos revela que:

$p_{ii}^{(n)} > 0$ implica que n es par $\forall\, i = 1, 2, \ldots, 9$. Por lo que el teorema 1.6 no se cumple y $\mathbf{P} = (p_{ij})$ no es regular.

Ejemplo 1.9 *Sea* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces su diagrama de transición esta dado como sigue:

Siguiendo flechas es fácil convencerse que $\mathbf{P}$ es irreducible, además:

$$\begin{array}{lll} p_{11}^{(3)} > 0 & , \; p_{11}^{(4)} > 0 & , \\ p_{22}^{(4)} > 0 & , \; p_{22}^{(7)} > 0 & , \\ p_{33}^{(3)} > 0 & , \; p_{33}^{(4)} > 0 & y \\ p_{44}^{(3)} > 0 & , \; p_{44}^{(4)} > 0. & \end{array}$$

Asi pues $\mathbf{P}$ es regular. El lector paciente puede comprobar que $\mathbf{P}^{(10)} > 0$ y no antes, de hecho $p_{22}^{(9)} = 0$.

Observación 1.10 Un teorema general de matrices estócasticas afirma que si $\mathbf{P}$ es regular de tamaño $r \times r$, entonces $\mathbf{P}^{(m)} > 0 \ \forall \ m \geq r^2 - 2r + 2$. Note que el ejemplo anterior muestra que llegar a dicho natural puede ser necesario.