UNA RELACION ENTRE POLINOMIOS Y MATRICES

Roberto Cruz López *

El polinomio de primer grado $a_1 x + a_0$ puede escribirse como el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_0 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

El polinomio de 2o. grado se $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} -a_2 & -a_1 & a_0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Esto sugiere el siguiente resultado:

TEOREMA. Cualquier polinomio de grado n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

se puede escribir en la siguiente forma

* Alumno del 5o. semestre de la carrera de Actuaría en la Facultad de Ciencias de la U. N. A. M.

$$p(x)=\begin{vmatrix} a_n & -a_{n-1} & \cdots & (-1)^{n-i}a_i & \cdots & (-1)^n a_0 \\ 1 & x & & & & \\ & 1 & x & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & x \end{vmatrix}$$

donde todos los elementos de la diagonal principal, excepto el primero, valen x, y los elementos de la diagonal inmediata inferior a la diagonal principal valen 1, y los elementos no indicados son cero.

<u>Demostración.</u> Ya vimos que el teorema es cierto cuando $n = 1$. Supongámoslo válido para $n = k$.

Consideremos ahora el determinante

$$(\quad)\qquad \begin{vmatrix} a_{k+1} & a_k & \cdots & (-1)^{k+1} a_0 \\ 1 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & x \end{vmatrix}$$

Desarrollando con respecto a la primera columna obtenemos

$$a_{k+1} \begin{vmatrix} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -a_k & & (-1)^{k+1} a_0 \\ 1 & x & \\ & \cdot \ \cdot & \\ & & \cdot \ \cdot \\ & & 1 \quad x \end{vmatrix}$$

El primer sumando vale $a_{k+1} x^{k+1}$. Si metemos el menos en el segundo término obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_k \cdot \cdot \cdot & & (-1)^k a_0 \\ 1 \quad x & & \\ \cdot \quad \cdot & & \\ & \cdot \quad \cdot & \\ & & 1 \quad x \end{vmatrix}$$

que por hipótesis es igual a $a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$. Por lo tanto (1) es igual a

$$p(x) = a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Consideremos ahora la matriz

$$A(x) = \begin{pmatrix} a & -a_{n-1} & \cdots & (-1)^n & 0 \\ 1 & x & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & x \end{pmatrix}$$

Sabemos que una condicion necesaria y suficiente para que A(x) sea invertible es que $|A(x)| = 0$. En otras palabras, A(x) es singular si y solo si $|A(x)| = 0$. Pero por el teorema anterior, A(x) es singular para aquellas x que son raíces de p(x). Entonces encontrar las raíces de p(x) es equivalente a determinar para que x, A(X) es singular.

Se plantea al lector el siguiente problema: Encontrar un criterio práctico para determinar cuando A(x) es singular (o no singular).