Miscelánea Matemática **47** (2008) 23–38 SMM

Panorámica de los Teoremas de Valor Medio

Félix Martínez de la Rosa

Departamento de Matemáticas.

Universidad de Cádiz.

España.

felix.martinez@uca.es

Resumen

El objetivo de este artículo es hacer un recorrido a lo largo de algunos de los teoremas de valor medio y de sus interpretaciones geométricas.

Introducción

En 1691 el miembro de la academia francesa Michel Rolle (1652-1719), publicó su famoso teorema de Rolle en un libro sobre álgebra y geometría titulado *"Méthode pour résoudre les égalités"*. Rolle estuvo enzarzado en un acalorado debate sobre los fundamentos del "método infinitesimal", y sostenía que esos métodos conducían a paralogismos. Fue refutado por John Bernouilli, quien mantuvo que Rolle no entendía el Cálculo.

Más adelante, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) obtuvieron sus teoremas de valor medio aplicando el teorema de Rolle a funciones adecuadas. El Teorema del Valor Medio, uno de los tópicos fundamentales de un curso de Cálculo, se atribuye a Lagrange, aunque su primera aparición fue en el artículo [1] de 1806 del físico André-Marie Ampere (1775-1836). En este trabajo, Ampere utiliza las ideas de Lagrange para justificar el resultado. Cabe destacar que el teorema se obtiene suponiendo la continuidad de la derivada. Cincuenta años después, Cauchy probó el teorema usando las mismas hipótesis. Es digno de mención que en el mismo artículo, Ampere alega haber probado un resultado que hoy se sabe falso: una función continua es derivable excepto, posiblemente, en un número de puntos excepcionales.

Sirvan estas pequeñas notas históricas para que apreciemos el esfuerzo de los matemáticos de la época para llevar al Cálculo a la forma que tiene hoy día.

El Teorema del Valor Medio relaciona los valores de la función en los extremos de un intervalo con el valor de la derivada en un punto intermedio del mismo. Su demostración se basa en aplicar el teorema de Rolle a una función *"deus-ex-machina"* adecuada (algunos lo llaman "idea feliz"). Además de una sencilla prueba, este teorema se interpreta geométricamente de una forma fácil, con lo que el contenido analítico y el visual quedan perfectamente hermanados en un vistoso dibujo. Pero este teorema no es el único de este tipo que existe. Hay toda una gama de resultados que relacionan los valores de la función y los de su derivada o integral. Se denominan *teoremas del tipo del valor medio*, y algunos de ellos tienen también una hermosa interpretación geométrica.

En este artículo se hace un recorrido por algunos de los teoremas del tipo del valor medio para funciones reales de una variable real, que reunen las dos características del teorema de Lagrange:

- Sus demostraciones se obtienen aplicando el teorema del valor medio a una función adecuada.
- Tienen una bonita interpretación geométrica.

Al final del trabajo se mencionan otros resultados del tipo del valor medio, y las referencias para encontrarlos.

I- Comenzamos con Teorema del valor medio de Lagrange:

Teorema 1 ***(Teorema del valor medio de Lagrange)*** *Sea* $f(x)$ *una función continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b)*. Existe* $c \in (a,b)$ *tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este teorema tiene una vistosa interpretación geométrica: la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(c, f(c))$ es paralela a la línea que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. En la dirección de internet:

http://demonstrations.wolfram.com/MeanValueTheorem/

se encuentran gráficos interactivos que recrean el teorema del valor medio.

La unicidad del punto intermedio, siempre que f'' no se anule en el intervalo, está asegurada por el teorema de Rolle. Por otro lado, en [10] se comprueba que el punto c se aproxima al punto medio del intervalo a medida que b se aproxima hacia a.

La demostración de este teorema consiste en aplicar el teorema de Rolle en $[a,b]$ a la función auxiliar:

$$h_1(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$

Esta función representa la diferencia entre $f(x)$ y la altura en x de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (figura 1):

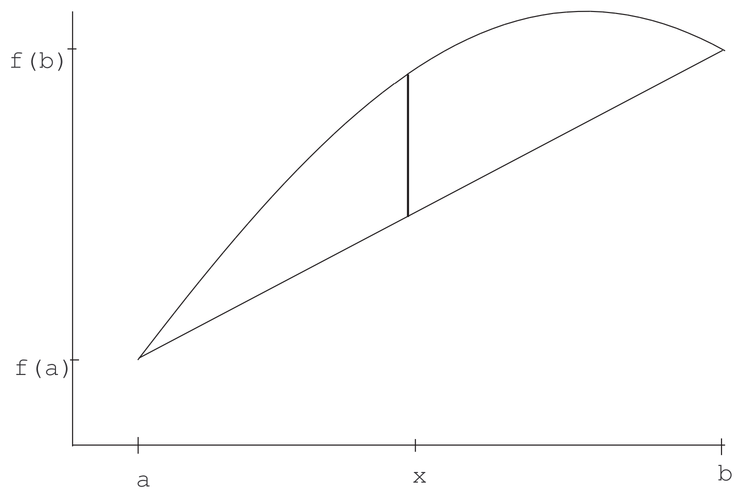


Figura 1

La función $h_1(x)$ no es la única que permite demostrar el teorema del valor medio a partir del teorema de Rolle. En [18] se demuestra, aplicando el teorema de Rolle a la siguiente función:

$$k_1(x) = [f(x) - f(a)]\,(x-b) - [f(x) - f(b)]\,(x-a)$$

La nueva función auxiliar no tiene un valor geométrico en sí misma (como sí la tiene la anterior). Lo que sucede es que una simple manipulación de esta función (transformando la resta en una suma), todavía permite que se le aplique el teorema de Rolle. Al hacerlo se obtiene un nuevo resultado:

Teorema 2 *Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c)\left(c - \frac{a+b}{2}\right) = -\left(f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

Demostración. Tomemos:

$$l_1(x) = [f(x) - f(a)]\,(x-b) + [f(x) - f(b)]\,(x-a)$$

Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y $l_1(a) = l_1(b) = 0$. Además

$$l_1'(x) = f'(x)(2x-a-b) + 2f(x) - f(a) - f(b) = 0$$

Por tanto, aplicando el teorema de Rolle, tenemos el resultado. ∎

Interpretación geométrica

Para el caso en que $c \neq \frac{a+b}{2}$, el enunciado anterior se puede expresar en la forma:

$$f'(c) = -\frac{\left(f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)}{\left(c - \frac{a+b}{2}\right)}$$

Supongamos que esta expresión no es cero. Ya que $\frac{\left(f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)}{\left(c - \frac{a+b}{2}\right)}$ es la pendiente de la recta que pasa por $(c, f(c))$ y por $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$, la igualdad anterior significa que la pendiente de esta recta y la de la tangente a $f(x)$ en $(c, f(c))$ son iguales pero de signo contrario, o dicho de otra forma: la línea $x = c$ divide en dos partes iguales al ángulo que forman ambas rectas (figura 2). Al punto M se le denomina el *medio centro de* $f(x)$ en $[a,b]$. Observemos que la función $f(x) = x^3$ en $[-1,1]$ verifica el teorema pero no cumple la interpretación geométrica.

La posibilidad de encontrar nuevas funciones auxiliares que cumplan el teorema de Rolle da paso a que se puedan obtener nuevos resultados similares a los anteriores. La búsqueda de este tipo de funciones es el objetivo de los trabajos [13] y [19].

Teorema 3 *Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Existe $c \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(c)\left(f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right) = -\left(c - \frac{a+b}{2}\right)$$

Demostración. Tomemos:

$$K_1(x) = [f(x) - f(a)]\,[f(x) - f(b)] + (x-a)(x-b)$$

Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y $K_1(a) = K_2(b) = 0$. Además:

$$K_1'(x) = f'(x)\,(2f(x) - f(a) - f(b)) + (2x - a - b)$$

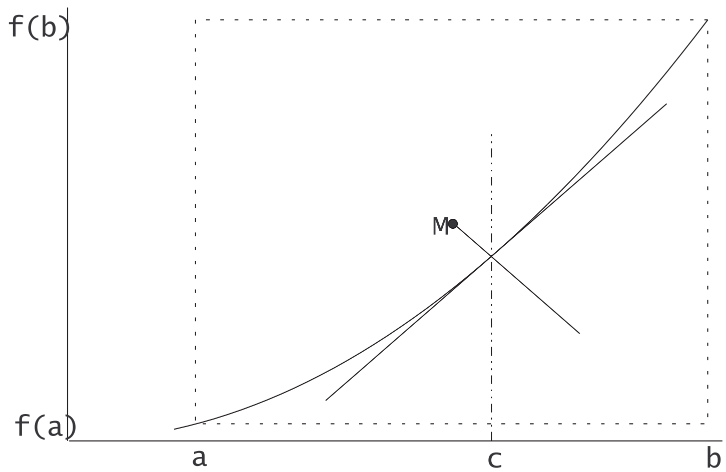


Figura 2: bajo las hipótesis del teorema 2, existe un punto $P(c, f(c))$ tal que la recta $x = c$ es la bisectriz del ángulo que forman la tangente a la curva en Pcon la recta que une P con el medio centro de f

Por tanto, aplicando el teorema de Rolle tenemos el resultado. ■

Interpretación geométrica

Para el caso en que $f(c) \neq \frac{f(a)+f(b)}{2}$, el enunciado anterior se puede expresar en la forma:

$$f'(c) = -\frac{\left(c - \frac{a+b}{2}\right)}{\left(f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)}$$

Supongamos que la expresión anterior no es cero. En este caso, las pendientes de la recta tangente por $(c, f(c))$ y de la recta que pasa por $(c, f(c))$ y por $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$son inversas con signo contrario, por tanto son perpendiculares entre sí (figura 3).

Observaciones al teorema 3

1) Transformando la función auxiliar empleada en el último teorema en una una resta:

$$K_2(x) = [f(x) - f(a)]\,[f(x) - f(b)] - (x - a)(x - b)$$

y aplicando el teorema de Rolle, se obtiene un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c)\left(f(c) - \frac{f(a) + f(b)}{2}\right) = c - \frac{a + b}{2}$$

La interpretación geométrica de este resultado es similar al anterior.

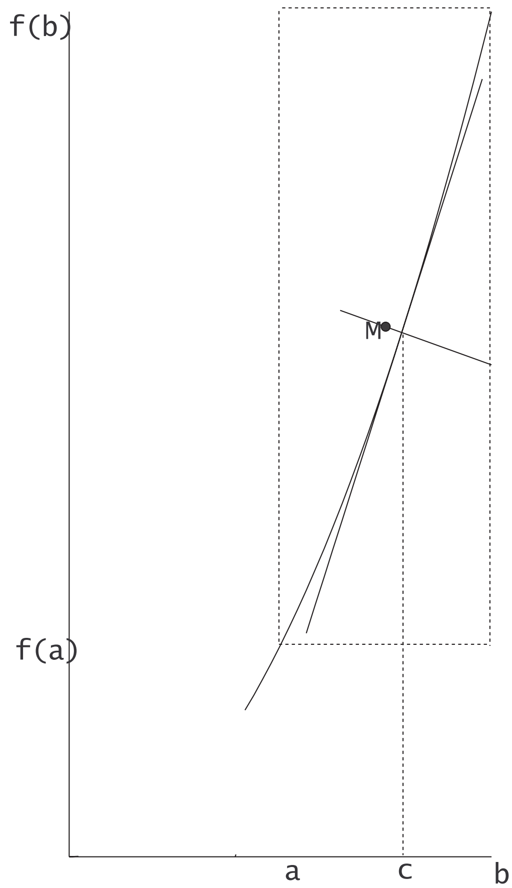


Figura 3: bajo las hipótesis del teorema 3, existe un punto $P(c, f(c))$ tal que la tangente a la curva en P es perpendicular a la recta que une P con el medio centro de f

2) En el artículo [13], el teorema 3 se prueba mediante la siguiente función auxiliar:

$$h(x) = \left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 + \left[f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right]^2$$

Esta función, que cumple las hipótesis del teorema de Rolle, es el cuadrado de la distancia entre el punto $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ y $P(x, f(x))$ (figura 4).

La existencia de funciones auxiliares que cumplan el teorema de Rolle es casi ilimitada. De esto da cuenta el teorema 4 (ver [22]), donde se da una manera de generar este tipo de funciones.

Teorema 4 *Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si α, β*

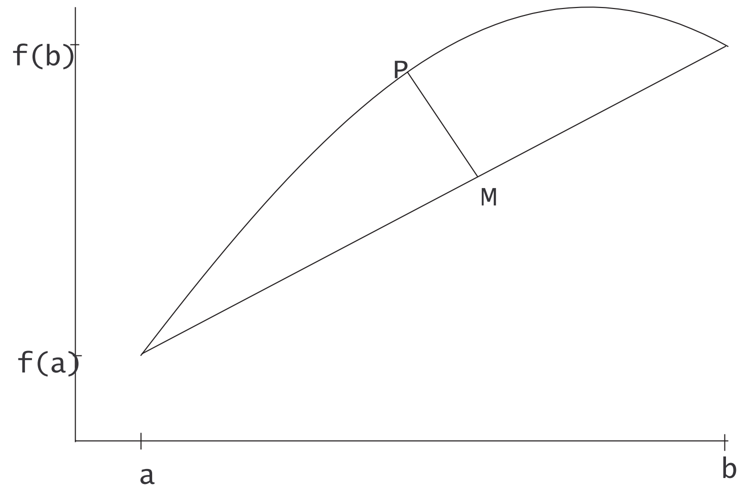


Figura 4

son dos números reales, existe $c \in (a, b)$ *tal que:*

$$f'(c)\left[(\alpha-\beta)\, c+\beta b-\alpha a\right]=\left[-(\alpha-\beta)\, f(c)+\alpha f(b)-\beta f(a)\right]$$

Demostración. Tomemos:

$$H(x)=\alpha(x-a)\left[f(x)-f(b)\right]-\beta(x-b)\left[f(x)-f(a)\right]$$

Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $H(a)=H(b)=0$. Además

$$H'(x)=\left[(\alpha-\beta)\, x+\beta b-\alpha a\right] f'(x)+(\alpha-\beta)\, f(x)-\alpha f(b)+\beta f(a)$$

Aplicando el teorema de Rolle tenemos el resultado. ■

Observaciones al teorema 4

Dando valores a los parámetros podemos obtener una lista enorme de resultados del tipo del valor medio aunque, en la mayoría de los casos, ni la función auxiliar utilizada, ni el propio resultado obtenido, presentan una interpretación geométrica apreciable.

A continuación resaltamos tres casos destacados:

Caso 1: Si $\alpha=\beta$, entonces el resultado se convierte en el teorema del valor medio de Lagrange.

Caso 2: Si $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$, se obtiene el teorema 2.

Caso 3: Si $\alpha=0, \beta=1$, se obtiene la expresion:

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{b-c}$$

Supongamos que la expresión del caso 3 no es cero. Notemos que la pendiente de la recta secante por $(c, f(c))$ y $(b, f(a))$ y la recta tangente por $(c, f(c))$ son iguales y de signos opuestos. Por tanto el eje x y esas dos rectas forman un triágulo isósceles. En la figura 5 se visualiza este hecho para $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$ (se obtiene $c = \frac{4}{3}$).

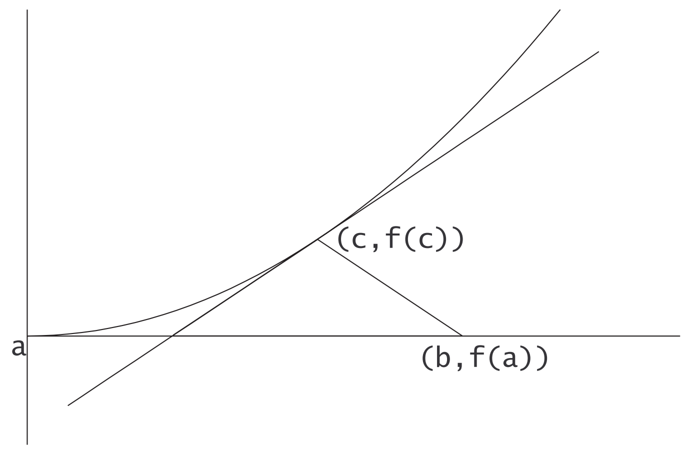


Figura 5: bajo las hipótesis del teorema 4, existe un punto $P(c, f(c))$ tal que la tangente a la curva en P el eje x y la recta que une P con $(b, f(a))$ forman un triángulo isósceles. $(b, f(a))$

II- Un teorema destacado del tipo del valor medio es el Teorema de Flett. Este teorema se publicó en 1958 (ver [8]). Una versión de este resultado puede verse en [26]. Más recientemente, en [8], se obtiene como consecuencia de una versión multidimensional del Teorema de Rolle.

A pesar de que proporciona una hermosa e intuitiva interpretación geométrica, no es demasiado conocido:

Teorema 5 ***(Teorema de Flett)*** *Sea $f(x)$ una función continua y derivable en $[a, b]$. Si $f'(a) = f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Interpretación geométrica

En las hipótesis de este teorema (a diferencia de los anteriores) se incluye que $f(x)$ sea derivable en los extremos del intervalo $[a, b]$ (por la derecha en a y por la izquierda en b), y que las tangentes en esos puntos sean paralelas. En tal caso, se asegura que existe un punto intermedio, c, de manera que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(c, f(c))$ coincide con la línea que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(c, f(c))$ (figura 6).

El teorema que sigue a continuación (ver [21]) llega a la misma conclusión que se obtiene en el teorema de Flett. La diferencia es que el resultado se obtiene exigiendo sólo la derivabilidad de f en (a, b), es

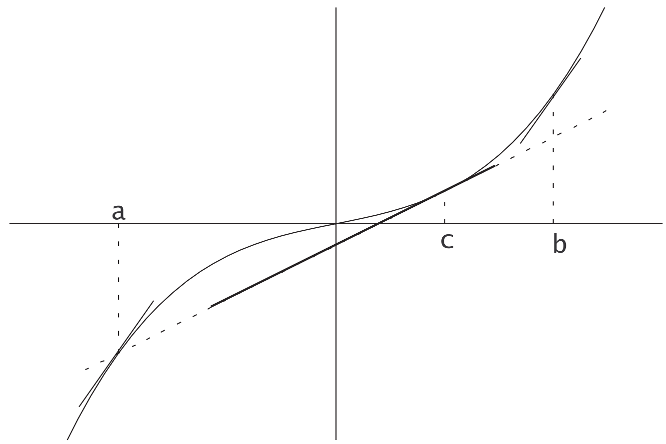


Figura 6

decir, lo mismo que en los anteriores teoremas de valor medio. Naturalmente, al quitar las hipótesis sobre la derivabilidad en a y b, es necesario introducir una nueva condición que involucra a los dos siguientes valores:

Media aritmética de f:

$$M(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Media de la función f :

$$I(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Veremos que la condición $M(f) = I(f)$, es suficiente para obtener la fórmula del teorema de Flett. La técnica de la demostración vuelve a basarse en aplicar el teorema de Rolle a una función adecuada:

Teorema 6 *Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $M(f) = I(f)$, existe $c \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Demostración. Tomemos:

$$h(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2}(x-a) - \int_a^x f(t)dt$$

Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Además $h(a) = 0$, y

$$h(b) = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b-a) - \int_a^b f(t)dt = (b-a)\left[M(f) - I(f)\right] = 0$$

La derivada de $h(x)$, que se obtiene utilizando el teorema fundamental del cálculo, es:

$$h'(x) = \frac{1}{2}f'(x)(x-a) + \frac{1}{2}\left[f(x) + f(a)\right] - f(x)$$

Por tanto, aplicando el teorema de Rolle se tiene el resultado. ■

Observaciones al teorema 6

1) En general, para una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{6\left[M(f) - I(f)\right]}{(b-a)^2}(c - a).$$

No incluimos aquí la demostración también basada en el teorema de Rolle, que puede verse en [21].

2) Las condiciones $M(f) = I(f)$ y $f'(a) = f'(b)$ son independientes entre sí. Por ejemplo la función

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 + 48x^2 - 180x$$

en el intervalo $[2, 5]$ verifica que $f'(2) = f'(5)$, sin embargo $M(f) \neq I(f)$. Por otro lado la función

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{7}{3}$$

en $[0, 2]$ verifica que $M(f) = I(f)$, siendo $f'(0) \neq f'(2)$.

3) La desventaja del teorema 6 es que la condición $M(f) = I(f)$ no tiene un claro significado geométrico (cosa que sí sucede con la condición $f'(a) = f'(b)$). De hecho, el autor de [21] propone la exploración de las funciones que verifiquen $M(f) = I(f)$.

El acierto es que, al emplearse en la demostración la técnica del teorema de Rolle, se abre la posibilidad de elegir distintas funciones auxiliares con las que obtener nuevos resultados del tipo del valor medio. Los teoremas 7 y 8 son ejemplos de ello.

Teorema 7 *Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $M(f) = I(f)$, existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{2(c - a)}$$

Demostración. Tomemos:

$$H_1(x) = \int_a^x f(t)dt - [f(x) - f(b)](x-a) - \frac{x-a}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

La función H_1 es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y $H_1(a) = H_1(b) = 0$. Por tanto entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $H_1'(c) = 0$, es decir:

$$f(c) - f'(c)(c-a) - [f(c) - f(b)] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = 0$$

Aplicando la hipótesis $M(f) = I(f)$, se obtiene que:

$$f'(c)(c-a) = f(b) - \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

con lo que se tiene el teorema. ■

Interpretación geométrica

La expresión del último teorema expresa que es posible hallar un punto c de forma que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(c, f(c))$ sea paralela a la línea que pasa por $(2a, f(a))$ y $(2c, f(b))$.

Por ejemplo, la función

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{7}{3}$$

en $[0,2]$ verifica que $M(f) = I(f) = \frac{4}{3}$. De la igualdad $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{2(c-a)}$ se obtienen los valores $c = 1$ y $c = \frac{1}{2}$. En la figura 7 se representa el caso $c = 1$, y en la figura 8 el caso $c = \frac{1}{2}$.

La interpretación geométrica del siguiente teorema es similar al anterior:

Teorema 8 *Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $M(f) = I(f)$, existe $c \in (a,b)$ tal que:*

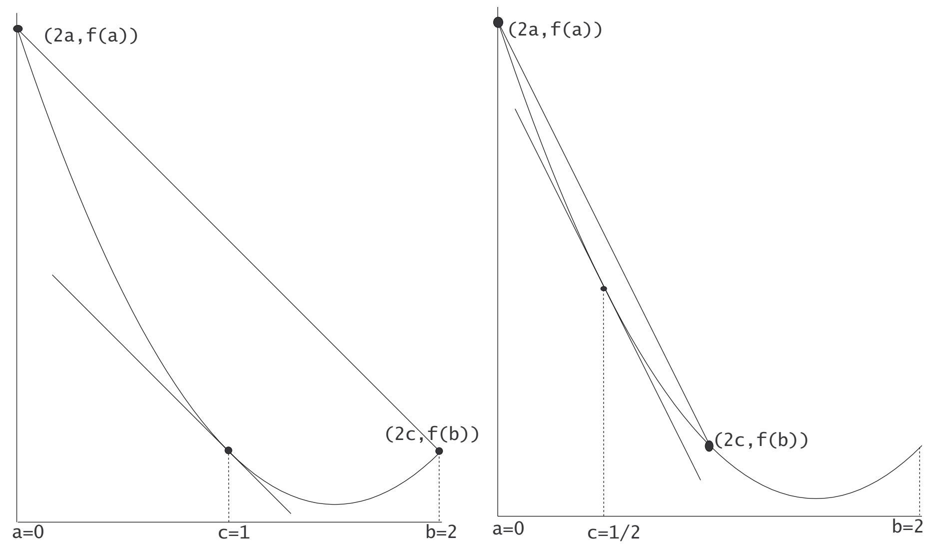
$$f'(c) = 2\frac{f(c)-f(a)}{b-a}$$

Demostración. Tomemos:

$$H_2(x) = \frac{1}{2}(b-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt + f(a)(x-b)$$

Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Además

$$H_2(a) = -\frac{1}{2}(b-a)f(a) \text{ y } H_2(b) = \frac{1}{2}(b-a)f(b) - \int_a^b f(t)dt$$



Figuras 7 y 8: bajo las hipótesis del teorema 7, existe un punto $P(c, f(c))$ tal que la tangente a la curva en P es paralela a la cuerda que une $(2a, f(a))$ y $(2c, f(b))$.

Aplicando la hipótesis $M(f) = I(f)$ se obtiene:

$$H_2(b) = \frac{1}{2}(b-a)f(b) - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{1}{2}(b-a)f(a)$$

Además, $H_2'(x) = \frac{1}{2}(b-a)f'(x) - f(x) + f(a)$. Aplicando el teorema de Rolle se tiene el resultado. ■

III- El teorema del valor medio integral es otro de los teoremas del tipo del valor medio, que se destacan en los primeros cursos de Cálculo:

Teorema 9 *Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Para el caso en que $f(x)$ sea positiva en $[a, b]$, el teorema expresa que existe un punto c, de forma que el área bajo f entre a y b, es la misma que la del rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$. En la dirección de internet:

http://demonstrations.wolfram.com/IntegralMeanValueTheorem/

se encuentran gráficos interactivos que recrean el teorema del valor medio integral.

Por otro lado, en [6] se comprueba que el punto c se aproxima al punto medio del intervalo a medida que b se aproxima hacia a (una generalización de esto último, basada en el desarrollo de Taylor, puede verse en [2]).

El último teorema que se ha seleccionado (ver [20]) ofrece una generalización del teorema del valor medio integral, y se demuestra con la misma técnica que se ha usado en todo este artículo.

Teorema 10 *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$. Existe $c \in (a,b)$ tal que:*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx = f(c)(b-c) + g(c)(c-a)$$

Demostración. Tomemos

$$h(x) = (x-b)\int_a^x f(t)dt + (x-a)\int_x^b g(t)dt$$

Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $h(a) = h(b) = 0$, Además

$$h'(x) = (x-b)f(x) + \int_a^x f(t)dt - (x-a)g(x) + \int_x^b g(t)dt$$

El resultado se tiene aplicando el teorema de Rolle. ∎

Interpretación geométrica

Si las funciones f y g son positivas en $[a,b]$, la suma del área bajo f entre a y c y la del área bajo g entre c y b (figura 9a) es la misma que la suma del área del rectángulo de base $b-c$ y altura $f(c)$ y la del rectángulo de base $c-a$ y altura $g(c)$ (figura 9b).

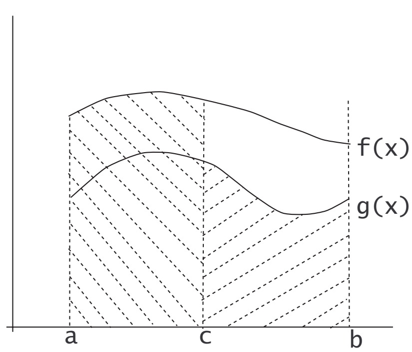


Figura 9a

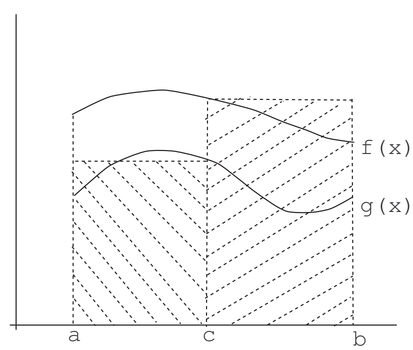


Figura 9b

Dentro de las posibilidades para elegir las funciones f y g, destacamos los dos casos siguientes:

Caso 1: Tomando $f(x) = g(x)$ se obtiene el teorema del valor medio para integrales.

Caso 2: Tomando $g(x) = 0$, obtenemos la expresión $\int_a^c f(x)dx = f(c)(b-c)$. Si f es positiva en $[a,b]$ entonces, el área bajo f entre a y c, es la misma que la del rectángulo de base $b-c$ y altura $f(c)$ (figura 10).

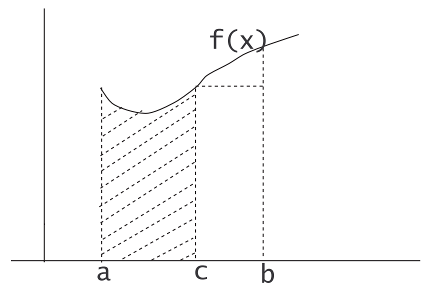


Figura 11

Notas finales

En este artículo sólo se han analizado algunos de los teoremas de valor medio que existen para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Pero hay muchas más generalizaciones, de todo tipo, de las que vamos a hacer referencia pero que, con la idea de centrar el artículo, no se han desarrollado.

- En [18], [19] y [24] se dan distintas versiones del teorema del valor medio de Cauchy, obtenidas aplicando el teorema del valor medio a una función auxiliar adecuada.

- En [23] y [17] se dan nuevas versiones del teorema del valor medio y del teorema del valor medio integral.

- Para generalizaciones al caso de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ se puede consultar [4].

- En [25], se expone una interesante recíproco del teorema del valor medio.

- Para el caso complejo, Dieudonné en 1930 (ver [4]) publicó una condición necesaria y suficiente para la existencia de un cero de $f'(z)$ en el interior de un círculo de diámetro ab, cuando f es holomorfa y $f(a) = f(b) = 0$. En [5] y [15] se presentan nuevas generalizaciones del teorema de Rolle y del valor medio en el campo complejo.

- En [3] se da una versión del teorema de Flett que no depende de la hipótesis $f'(a) = f'(b)$. También en [3] se generaliza al caso complejo el teorema de Flett. Otras generalizaciones de este último pueden verse en [7] y en [17]. En este último se introducen teoremas del valor medio integral de Flett.

- Por último, el análisis de los puntos intermedios que se obtienen en los teoremas de valor medio también ha sido objeto de numerosos estudios, como puede verse en las referencias [2], [6], [11], [12], [14] y [16].

Esta gran cantidad de referencias puede dar una idea del interés que siguen suscitando estos teoremas a los matemáticos.

Referencias

[1] Ampere, A. M., 1806, *Recherche sur quelques points de la theorie de functions* . J. Ecole Polyt., Cah.13, 6, 148-181.

[2] Bao-Lin, Zhang, 1997, *A note on the mean value theorem for integrals.* Am. Math. Monthly, vol. 104, 561-562.

[3] Davitt, R.; Powers R.C.; Riedel, T.; Sahoo, P. K.,1999, *Flett's mean value theorem for holomorphic functions.* Math. Mag., vol. 72, n^o 4, 304-307.

[4] Dieudonné, J., 1930, *Sur une generalisation du theoreme de Rolle aux fonctions d'une variable complexe.* Ann. of Math., 32, 79-116.

[5] Evard, J.; Jafari F., 1992, *A complex Rolle's theorem.* Am. Math. Monthly, vol. 99, n^o 9, 858-861.

[6] Jacobson, B., 1982, *On the mean value theorem for integrals.* Am. Math. Monthly, vol. 89, n^o 5, 300-301.

[7] Jędrzejewska I.; Szkopińska, B., 2004, *On generalizations of Flett's Theorem.* Real Anal. Exchange Vol. 30, n ^{o} 1, 75-86.

[8] Flett, T. M., 1958, *A mean value theorem.* Math. Gazette, vol.42, 38-39

[9] Furi M. ; Martelli M., 1995, *A multidimensional version of Rolle's theorem.* Am. Math. Monthly, vol. 102, n^o 3, 243-248.

[10] Mera, R., 1992, *On the determination of the intermediate point in Taylor's theorem.* Am. Math. Monthly, vol. 99, n^o 1, 56-58.

[11] Mercer, P. R., 1999, *The notion of type, as regards certain geometric limits.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol 30, n^o 1, 146-148.

[12] Mercer, P. R., 2001, *Type, fixed point iteration, and mean value theorem.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol 32, n^o 2, 308-312.

[13] Mercer, P. R., 2002, *On a mean value theorem.* The College Math. J., vol. 33, n^o 1, 46-47.

[14] Mercer, P. R., 2004, *The number c in Cauchy's average value theorem.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol 35, n^o 1, 118-122.

[15] Qazi, M.A., 2006, *The mean value theorem and analytic functions of a complex variable. J*ournal of Mathematical Analysis and Applications 324, 30-38.

[16] Polezzi, M.,2006, *On the weighted mean value theorem for integrals.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol. 37,n^o 7, p868-870.

[17] Sahoo, P.K., 2007, *Some results related to the integral mean value theorem.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol 38, n^o 6, 818-822.

[18] Tong, J., 1999, *The mean value theorems of Lagrange and Cauchy.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol. 30, n^o 3, 456-458.

[19] Tong, J., 2000, *The mean value theorems of Lagrange and Cauchy (II).* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol. 31, n^{o}3, 447-449.

[20] Tong, J., 2002, *A generalization of the mean value theorem for integrals.* The College Math. J., vol. 33, n^o 5, 408-409.

[21] Tong, J., 2004, *On Flett's mean value theorem.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol. 35, n^o 6, 936-941.

[22] Tong, J., 2004, *The mean value theorem generalised to involve two parameters.* Math. Gazette, vol. 88, n^o 513, 538-540.

[23] Tong, J., 2000, *The mean value theorem of Lagrange generalised to involve two functions.* Math. Gazette, vol. 84, n^o 501, 515-516.

[24] Tong, J., 2000, *Cauchy's mean value theorem involving n functions.* The College Math. J., vol. 35, n^o 1, 50-51.

[25] Tong, J.; Braza P., 1997, *Aconverse of the mean value theorem.* Am. Math. Monthly, vol. 104, n^o 10, 939-942.

[26] Trahan, D. H., 1966, *A new type of mean value theorem.* Math. Mag., vol. 39, 264-268