MISCELÁNEA MATEMÁTICA 37 (2003) 15–28 SMM

Panorama de la Clasificación Lipschitz y Uniforme de los Espacios de Banach

César Luis García
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo # 1
01000 México, D.F.
México
clgarcia@itam.mx

1 Introducción.

Este artículo es una breve incursión a aspectos no lineales de los espacios de Banach. Este es un campo de investigación que, si bien puede trazar sus orígenes a principios de los años treinta del siglo pasado y ha tenido un desarrollo lento pero constante, no es sino hasta estos últimos seis años que ha recibido un empuje considerable. Nos limitamos a presentar un panorama general y ciertamente incompleto de esta área de las Matemáticas: nada de entrar en detalles técnicos que podrían ponernos rapidamente en aprietos. Los resultados, en general profundos y producto de un arduo trabajo de investigación, se enuncian sin demostrar puesto que las dificultades técnicas van más allá del propósito de estas notas. Así, solamente la Proposición 4 y el Lema 13 podrían considerarse como ejercicios para el lector:) . Asimismo formulamos algunas preguntas básicas en el área que siguen siendo problemas abiertos. Referencia esencial para conocer más detalles, otros aspectos y direcciones de estudio sobre el ramo, es el excelente compendio de Y. Benyamini y J. Lindenstrauss ([BL]).

El autor agradece las valiosas sugerencias del árbitro para mejorar la presentación de este artículo y la amable invitación del Dr. Guillermo Pastor para colaborar con Miscelánea Matemática.

2 Conceptos básicos.

Los espacios de Banach fueron estudiados por primera vez en forma general por Stefan Banach alrededor de 1922 según el mismo refiere en [B, pág. 53]. En [B], Banach dice que un espacio vectorial $\mathfrak{X}$ es de tipo B (sí, B de Banach) si el espacio es normado y la norma es completa, es decir, si existe una función $\|\cdot\| : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (una norma) tal que para todo $x, y \in \mathfrak{X}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

1. $\|0\| = 0$ y $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

y esta norma satisface que para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathfrak{X}$ para la cual $\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$, existe $x \in \mathfrak{X}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Así, en los espacios de Banach ($\mathfrak{X}$) se conjugan dos estructuras:

- La estructura lineal $\to$ $\mathfrak{X}$ es un espacio vectorial.
- La estructura topológica $\to$ $\mathfrak{X}$ es un espacio normado.

La norma ($\|\cdot\|$) da la topología cuyos abiertos básicos son las bolas abiertas: $B_r(x) = \{y \in \mathfrak{X} : \|y - x\| < r\}$ y las estructuras lineal y topológica se ligan vía la continuidad de las operaciones vectoriales de suma y producto por escalar.

3 Los Clásicos.

Ejemplos clásicos de espacios de Banach son:

1. $(\ell_p^n, \|\cdot\|_p), 1 \leq p \leq \infty$, el espacio de dimensión n, con norma

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{y} \quad \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} \{|x_i|\}$$

2. $(\ell_p, \|\cdot\|_p), 1 \leq p \leq \infty$, el espacio de sucesiones p-sumables con norma

$$\|(x_1, x_2, \ldots)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{y} \quad \|(x_1, x_2, \ldots)\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq \infty} \{|x_i|\}$$

3. c, el espacio de sucesiones numéricas que son convergentes con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

4. c_0, el subespacio de c que consiste de las sucesiones que convergen a cero.

5. $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$

6. $L_p([0,1])$, $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de funciones p-integrables (con la convención usual sobre las clases de equivalencia) con norma:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \text{ y } \|f\|_\infty = \inf\{c : |f| \leq c \text{ casi dondequiera}\}$$

Nota: En las siguientes secciones $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ denotarán espacios de Banach reales de dimensión infinita. Tambien recordemos que un espacio normado es *separable* si contiene un conjunto denso numerable.

4 De que se va a tratar esto.

En vista de las dos estructuras básicas que posee un espacio de Banach, las relaciones naturales entre dos espacios de Banach son las funciones lineales y continuas. La continuidad de una función lineal se caracteriza de la siguiente manera: Si $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ son espacios de Banach, una función lineal $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es continua si y solo si existe una constante $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para toda $x \in \mathfrak{X}$. Note que esta caracterización en particular prueba que para funciones lineales la continuidad es equivalente a la continuidad uniforme. Tambien estamos ahora en condiciones de definir un espacio de Banach muy especial: el espacio de todas las transformaciones lineales y continuas $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ con $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$. El caso particular $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ es relevante: se llama el *espacio dual* de $\mathfrak{X}$ y se denota por $\mathfrak{X}^*$.

Las transformaciones lineales permiten una primera clasificación de los espacios de Banach: dos espacios de Banach serán *linealmente equivalentes o isomorfos* si y solo si existe una transformación lineal biyectiva y continua entre ellos (la inversa resulta lineal y continua). Diremos tambien que un espacio de Banach $\mathfrak{X}$ es *linealmente equivalente* a un subespacio del espacio de Banach $\mathcal{Y}$ si existe una transformación lineal, continua e inyectiva $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$.

Buena parte del desarrollo de la teoría de espacios de Banach es motivado por encontrar en un espacio de Banach dado, subespacios que sean linealmente equivalentes a alguno de los espacios de Banach clásicos o bien ver si el espacio de Banach es linealmente equivalente a un subespacio de algún clásico. Por otro lado, y esto es lo que motiva este escrito, como espacios topológicos los espacios de Banach pueden relacionarse vía una función que no sea lineal y una pregunta natural sería:

¿Cuáles son las posibles "consecuencias lineales" que surgen de esta relación?

Por ejemplo, si $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es inyectiva, continua y no-lineal ¿será $\mathfrak{X}$ linealmente equivalente a un subespacio vectorial de $\mathcal{Y}$? La respuesta a esta pregunta es en general que no. Sin embargo, puede ser que la mera continuidad de la función sea una condición muy débil para obtener alguna ganancia lineal. Pero entonces, ¿qué clase de funciones no-lineales entre espacios de Banach podrían ser de interés? (en el sentido que la relación no lineal entre los espacios implique alguna relación lineal entre ellos). Veamos los siguientes resultados para aclarar el panorama:

Mazur y Ulam [MU, '32] demostraron la siguiente

Proposición 1. *Si $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$ son espacios de Banach y $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es una isometría (i.e., $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$) suprayectiva tal que $T0 = 0$ entonces T es lineal.*

El resultado de Mazur y Ulam dice que la estructura lineal de un espacio de Banach, esta completamente determinada por su estructura como espacio métrico. Por otro lado se tiene el resultado de Kadec [K, '67]:

Proposición 2. *Cualesquiera dos espacios de Banach separables de dimensión infinita son homeomorfos (i.e., existe una función biyectiva, continua y con inversa continua entre ellos).*

Este es el otro extremo: el resultado de Kadec dice que la estructura de un espacio de Banach como espacio topológico no da información sobre su estructura lineal ya que hay espacios de Banach separables que no son isomorfos aunque topológicamente sean "el mismo".

Los dos resultados anteriores sugieren considerar funciones no-lineales no tan "rígidas" como las isometrías pero no tan "laxas" como las continuas. Existen varias clases de funciones en este rango cuyo estudio, en el contexto aqui explicado, ha conducido a una teoría rica e interesante donde interaccionan la topología, la teoría geométrica de la medida, la probabilidad, el análisis armónico, el análisis combinatorio y, por supuesto, la geometría de espacios de Banach. Aquí nos limitaremos al caso de funciones Lipschitz y de funciones uniformemente continuas entre espacios de Banach, pero queremos hacer notar que existen otras clases de funciones que han sido y son ampliamente estudiadas en el sentido de este escrito (ver, por ejemplo [BL]).

5 Inmersiones Lipschitz y uniformemente continuas.

Recordemos que una función $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es *Lipschitz* si existe una constante $C > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathfrak{X}$. Ahora supongamos que $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es una inmersión Lipschitz, es decir f es una función Lipschitz e inyectiva.

¿Será $\mathfrak{X}$ linealmente equivalente a algún subespacio de $\mathcal{Y}$?

La pregunta se puede reformular y preguntar si es posible producir a partir de f una transformación lineal e inyectiva de $\mathfrak{X}$ a $\mathcal{Y}$. La primera idea, como en cálculo diferencial, es ... ¡calcular la derivada!. En espacios de dimensión infinita hay varias nociones de diferenciabilidad, tomemos la extensión natural de la derivada en dimensión finita:

Definición 3. *Si $G \subset \mathfrak{X}$ es abierto, una función $f : G \to \mathcal{Y}$ es Gâteaux diferenciable en $x_0 \in G$ si para todo $u \in \mathfrak{X}$ el límite*

$$D_f(x_0)u := \lim_{t \to 0}(f(x_0 + tu) - f(x_0))/t$$

existe y $D_f(x_0) : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es una transformación lineal y continua.

La existencia de la derivada de Gâteaux en algún punto es suficiente para lograr nuestro objetivo:

Proposición 4. *Si $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es una inmersión Lipschitz y $D_f(x_0)$ existe para algún $x_0 \in \mathfrak{X}$ entonces $D_f(x_0) : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es una inmersión lineal (i.e. $\mathfrak{X}$ es isomorfo a un subespacio de $\mathcal{Y}$).*

La pregunta inmediata es: ¿cuándo una función Lipschitz es Gâteaux diferenciable en algún punto?

Una condición general que garantiza la existencia de la derivada de Gâteaux es la propiedad de Radon-Nikodým:

Definición 5. *Un espacio de Banach $\mathcal{Y}$ satisface la propiedad de Radon-Nikodým (PRN) si toda función Lipschitz $f : [0,1] \to \mathcal{Y}$ es diferenciable c.d. (casi dondequiera, con respecto a la medida de Lebesgue).*

La PRN es una concepto que ha sido ampliamente estudiado y hay muchísimas caracterizaciones de ella (ver, por ejemplo [DU]). Es de hecho una propiedad geométrica que gozan muchos de los espacios de Banach que llamamos clásicos. Algunas excepciones son: $C([0,1])$, c_0, $L_1([0,1])$, ℓ_∞, etc. Sin embargo para nuestros fines la PRN nos da el siguiente Teorema que generaliza el bien conocido Teorema de Rademacher sobre diferenciación c.d. (con respecto a la medida de Lebesgue) de funciones Lipschitz con dominio en un abierto de $\mathbb{R}^n$,

Teorema 6. *Sea f una función Lipschitz de un espacio de Banach separable $\mathfrak{X}$ en un espacio de Banach $\mathcal{Y}$ con PRN. Entonces f tiene derivada de Gâteaux c.d.*

El casi dondequiera (c.d.) en el Teorema anterior se refiere al complemento de cierto conjunto nulo. Existen varias nociones de conjuntos nulos en espacios de dimensión infinita (ver, por ejemplo [BL, Cap. 6]) y cualquiera de ellas es útil en este contexto. Para nuestros fines basta con saber que hay abundancia de puntos donde la funciones Lipschitz son Gâteaux diferenciables. El Teorema 8 fué demostrado de manera independiente por varios matemáticos (N. Aronszajn, J. Christensen, P. Mankiewics) cada uno usando una noción diferente de conjunto nulo ([BL, pág. 155]).

Comentario: ¿Que pasa cuando $\mathcal{Y}$ no satisface la PRN?. Por ejemplo se sabe que espacios como ℓ_p o $L_p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$, no son isomorfos a subespacios de c_0, que recordemos no tiene la PRN, luego cualquier inmersión Lipschitz de alguno de esos espacios en c_0 no es Gâteaux diferenciable en algún punto. Por otro lado, en el caso de $L_1([0,1])$, aunque no se sabe, es bastante probable que cualquier espacio de Banach que es Lipschitz inyectable en $L_1([0,1])$ sea isomorfo a un subespacio de $L_1([0,1])$ (se sabe al menos que es cierto para espacios de Banach reflexivos), si esto es cierto se tendría un caso de linearización que no apela a diferenciación.

Para el caso cuando $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es inyectiva y uniformemente continua (note que las funciones Lipschitz son en particular funciones uniformemente continuas) el único resultado significativo de linearización que se conoce es el siguiente Teorema de I. Aharoni, B. Maurey y B. Mityagin ([AMM]) para el espacio $Y = \ell_2$:

Teorema 7. *Existe una función inyectiva, uniformemente continua de un espacio de Banach $\mathfrak{X}$ en ℓ_2 si y solo si $\mathfrak{X}$ es isomorfo a un subespacio de $L_0([0,1])$ (el espacio de funciones medibles en $[0,1]$ con la topología de convergencia en medida, que por cierto no es un espacio de Banach).*

6 Aquí se pone más emocionante.

Comencemos con un par de definiciones: diremos que dos espacios de Banach $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ son *Lipschitz equivalentes* ($\mathfrak{X} \overset{\ell}{=} \mathcal{Y}$) si existe $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ biyectiva y bi-Lipschitz (i.e., tanto f como f^{-1} son Lipschitz). Similarmente, $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ son *uniformemente equivalentes* ($\mathfrak{X} \overset{u}{=} \mathcal{Y}$) si existe $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ biyectiva y bi-uniforme (es decir, tanto f como f^{-1} son uniformemente continuas).

En esta sección incursionamos brevemente sobre lo que se sabe y no se sabe sobre la siguiente pregunta: si $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ son espacios de Banach Lipschitz equivalentes o uniformemente equivalentes, ¿serán $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ isomorfos (linealmente equivalentes)?

De la sección anterior sabemos que si comenzamos con una función Lipschitz biyectiva f y su derivada de Gâteaux existe para algún $x_0 \in \mathfrak{X}$ entonces $D_f(x_0)$ es inyectiva. El pelo en la sopa es que en esta sección nos interesa que tambien $D_f(x_0)$ sea suprayectiva (sobre) para tener un isomorfismo entre los espacios de Banach. Desafortunadamente esto no siempre sucede, como lo muestra el siguiente ejemplo de D. Ives y D. Preiss [IP]:

Proposición 8. *Existe una equivalencia Lipschitz $f : \ell_2 \to \ell_2$ que es Gâteaux diferenciable en todo punto tal que $D_f(0) : \ell_2 \to \ell_2$ no es sobre.*

Uno podría preguntarse si en el ejemplo de Ives y Preiss se podría elegir un punto distinto de cero en el cual calcular la derivada de Gâteaux y esperar que en este nuevo punto la derivada ahora si fuese sobre, sin embargo no se sabe como elegir un "buen punto" en el cual calcular la derivada. La derivada de Gâteaux en principio parece no ser de mucha ayuda aquí. ¿Que tal si exploramos otra noción de diferenciabilidad?

Definición 9. *Si $G \subset \mathfrak{X}$ es abierto, una función $f : G \to \mathcal{Y}$ es Fréchet diferenciable en $x_0 \in G$ si es Gâteaux diferenciable y el límite que define a la derivada de Gâteaux es uniforme en u (la dirección), o equivalentemente si*

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + D_f(x_0)v + o(\|v\|) \text{ cuando } \|v\| \to 0$$

En dimensión finita las nociones de Gâteaux y Fréchet diferenciabilidad coinciden por la compacidad de la bola unitaria, pero en dimensión infinita son distintas; por ejemplo, la función $f : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ dada por $f(g) = \operatorname{sen}(g)$ es Gâteaux diferenciable en todo punto $(D_f(g)(u) = \cos(g) \cdot u)$ pero no es Fréchet diferenciable en algún punto.

Las buena noticia es que si $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es una equivalencia Lipschitz y f es Fréchet diferenciable en algún punto $x_0 \in \mathfrak{X}$ entonces $D_f(x_0) : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es un isomorfismo.

Las malas noticias son: que es común que las funciones Lipschitz no tengan puntos de diferenciabilidad de Fréchet, más aún, no hay un criterio general que garantize la existencia de la derivada de Fréchet. De hecho el único resultado general que se conoce es un teorema bastante profundo y difícil de D. Preiss [P]:

Teorema 10. *Si $\mathfrak{X}$ es un espacio de Banach con dual separable y $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ es Lipschitz entonces f es Fréchet diferenciable en un conjunto denso de $\mathfrak{X}$.*

La desventaja de este resultado es que la existencia de puntos de diferenciabilidad de Fréchet se garantiza en un subconjunto denso de $\mathfrak{X}$ en lugar de algo más deseable como el complemento de un conjunto nulo de $\mathfrak{X}$ ([BL, Cap. 6]). Esto hace, por ejemplo, que del Teorema de Preiss no se pueda deducir si es posible que dos funciones Lipschitz de $\mathfrak{X}$ en $\mathbb{R}$ tengan un punto de Fréchet diferenciabilidad en común (que equivale a cambiar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^2$ en el Teorema de Preiss). Este, por cierto, es un problema abierto cuya solución garantiza la fama (aunque quizá no la fortuna).

Criterios generales para deducir equivalencia lineal de equivalencia Lipschitz entre ciertos espacios de Banach fueron descubiertos por Heinrich y Mankiewics [HM]. Ellos, usando técnicas de ultraproductos de espacios de Banach, demostraron que:

Teorema 11. *Si $\mathfrak{X} \stackrel{\ell}{=} \mathcal{Y}$ vía f, $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ separables, $\mathfrak{X}$ es un espacio dual y $D_f(x_0)$ existe para algún $x_0 \in \mathfrak{X}$ entonces $D_f(x_0)$ es un isomorfismo de $\mathfrak{X}$ con un subespacio complementable de $\mathcal{Y}$, es decir, $\mathcal{Y}$ es isomorfo a $D_f(x_0)(\mathfrak{X}) \oplus W$ para algún subespacio W de $\mathcal{Y}$.*

y que,

Corolario 12. *Si $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$ son espacios duales, separables y $\mathfrak{X} \stackrel{\ell}{=} \mathcal{Y}$ entonces cada uno de ellos es isomorfo a un subespacio complementable* *del otro, es decir $\mathfrak{X}$ es isomorfo a $\mathcal{Y} \oplus V$ y $\mathcal{Y}$ es isomorfo a $\mathfrak{X} \oplus W$ para algunos subespacios $V \subset \mathfrak{X}$ y $W \subset \mathcal{Y}$.*

Con los dos resultados anteriores y un resultado de la teoría de espacios de Banach (el Método de Descomposición de Pełczyński [LT, pág. 54]) fué posible concluir que si $\mathfrak{X}$ es ℓ_p o $L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$, y $\mathcal{Y} \stackrel{\ell}{=} \mathfrak{X}$ entonces $\mathcal{Y}$ es isomorfo a $\mathfrak{X}$. Para el caso de ℓ_1 el resultado tambien es cierto si se asume que $\mathcal{Y}$ es un espacio dual (i.e., $\mathcal{Y}$ es isomorfo a algún $\mathfrak{X}^*$. Por ejemplo ℓ_1 es un espacio dual ya que $c_0^* = \ell_1$). Cuando $\mathcal{Y}$ no es un espacio dual el problema esta abierto, igualmente el caso $\mathfrak{X} = L_1([0,1])$ es un problema abierto.

7 El caso uniforme.

¿Cuál es la situación en el caso $\mathfrak{X} \stackrel{u}{=} \mathcal{Y}$?

Respecto a la clasificación uniforme un lema sencillo ha sido una de las herramientas fundamentales en el análisis del problema:

Lema 13. *Si $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es uniformemente continua entonces f es Lipschitz para distancias grandes, es decir, para toda $\delta > 0$ existe una constante $K = K(\delta)$ tal que si $\|x - y\| > \delta$ entonces $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$.*

El lema sugiere que de alguna manera el análisis de funciones uniformemente continuas entre espacios de Banach se puede cambiar al de funciones Lipschitz. Por ejemplo si $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es uniformemente continua entonces el mapeo $x \mapsto \lim_{n\to\infty} n^{-1} f(nx)$ es Lipschitz siempre que el límite exista. La existencia del límite se puede remediar usando la noción de ultraproducto. La ultrapotencia de un espacio de Banach con respecto a un ultrafiltro no trivial $\mathcal{U}$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$, es el espacio de todas las sucesiones acotadas $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ de elementos de $\mathfrak{X}$ con la seminorma $\|\tilde{x}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{n\in\mathcal{U}} \|x_n\|$. Módulo sucesiones de seminorma cero, $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ es un espacio de Banach.

La primera ventaja en el uso de ultrapotencias es que si $\mathfrak{X} \stackrel{u}{=} \mathcal{Y}$ via f entonces $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}} \stackrel{\ell}{=} \mathcal{Y}_{\mathcal{U}}$ via $\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots) = (f(x_1), f(2x_2)/2, f(3x_3)/3, \ldots)$. Otra ventaja es que aún cuando $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ es bestialmente más grande que $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$ es isométrico a un subespacio de $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ y además los subespacios de dimensión finita de $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ son esencialmente los mismos que los de $\mathfrak{X}$. Que dos espacios de Banach $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ tengan los mismos subespacios de dimensión finita se dice así: existe una constante $C > 0$ tal que para todo

$E \subset \mathfrak{X}$ de dimensión finita existe $F \subset \mathcal{Y}$ tal que $d(E,F) < C$ y viceversa, donde $d(E,F) = \inf\{\|T\|\,\|T^{-1}\| : T : E \to F$ es un isomorfismo$\}$ es la distancia de Banach-Mazur de E a F.

Sin entrar en más detalles de ultraproductos, diremos que con esta técnica fué posible demostrar que cuando $\mathfrak{X} \stackrel{u}{=} \mathcal{Y}$ resulta que los espacios $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{Y}$ tienen esencialmente los mismos espacios de dimensión finita, en otras palabras la estructura uniforme de un espacio de Banach determina la estructura lineal de sus subespacios de dimensión finita [HM]. Este resultado, por cierto, había sido demostrado con anterioridad con técnicas de tipo combinatorio por M. Ribe [R].

Una consecuencia sencilla de la discusión anterior fué el siguiente resultado de P. Enflo ('70, sin publicar) que dice que los espacios de Hilbert separables si están determinados por su estructura uniforme.

Teorema 14. *Si $\mathfrak{X} \stackrel{u}{=} \ell_2$ entonces $\mathfrak{X}$ es isomorfo a ℓ_2.*

Lo natural ahora sería preguntarse si el Teorema de Enflo es válido para ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. La respuesta es que sí siempre que $1 < p < \infty$ (¡el caso $p = 1$ sigue siendo un problema abierto!). La historia de como se llegó a la demostración del caso $1 < p < \infty$ es como sigue:

Sabiendo que los homeomorfimos uniformes preservan la estructura finito dimensional de los espacios de Banach, los matemáticos se preguntaron si espacios como ℓ_p y $L_p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$, que tienen los mismos subespacios de dimensión finita y no son isomorfos $(p \neq 2)$, podrían ser uniformemente homeomorfos. Resultó que no y la demostración se dió en tres abonos:

- Caso $p = 1 \to$ P. Enflo '69, sin publicar.
- Caso $1 < p < 2 \to$ J. Bourgain '87 [B].
- Caso $2 < p < \infty \to$ E. Gorelik '94 [G].

El argumento de Gorelik funciona de hecho para $1 \leq p < \infty$. Esencialmente, Gorelik probó que no puede haber una función de ℓ_p en L_p tal que tanto f como f^{-1} sean ambas Lipschitz para grandes distancias. Lo relevante del asunto es que W. B. Johnson, J. Lindenstrauss y G. Schechtman, en un artículo que se considera piedra angular en la teoría no lineal de los espacios de Banach ([JLS]), leyeron entre líneas el argumento de Gorelik y encontraron el siguiente principio fundamental: un homeomorfismo uniforme entre espacios de Banach no puede mandar una bola de radio grande de un subespacio de codimensión finita en una vecindad pequeña de un subespacio de codimensión infinita; esto cuantitativamente se escribe así:

Principio de Gorelik. *Supongamos que $\mathfrak{X} \stackrel{u}{=} \mathcal{Y}$ vía f y que f manda una bola cerrada con centro en el origen y de radio r de un subespacio de codimensión finita de $\mathfrak{X}$ en una ρ-vecindad de un subespacio de codimensión infinita de $\mathcal{Y}$ (i.e. un subconjunto de $\mathcal{Y}$ de la forma $B_\rho(0)+V$, V de codimensión infinita), entonces $\Omega_{f^{-1}}(2\rho) \geq r/4$ donde*

$$\Omega_{f^{-1}}(t) = \sup_{\substack{x,y\in\mathfrak{X} \\ \|x-y\|\leq t}} \{\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\|\}$$

es el módulo de continuidad de f^{-1}

La formulación de este Principio en [JLS] no es muy díficil de demostrar, el argumento depende de dos lemas sencillos uno de los cuales es consecuencia del Teorema de Punto Fijo de Brouwer. El Principio de Gorelik fué una herramienta fundamental para concluir que si $\mathfrak{X} \stackrel{u}{=} \ell_p$, $1 < p < \infty$, entonces $\mathfrak{X}$ es isomorfo a ℓ_p ([JLS]) y tambien recientemente para demostrar que si $\mathfrak{X}$ es Lipschitz equivalente (sic) a c_0 entonces $\mathfrak{X}$ es isomorfo a c_0 [GKL].

Concluímos esta sección diciendo que si bien la teoría no lineal de los espacios de Banach esta muy desarrollada, aun existen preguntas básicas sin contestar. No se sabe, por ejemplo, si los espacios de Banach $L_p([0,1])$, $1 \leq p \leq \infty$, c_0, ℓ_1, $C([0,1])$, entre otros, están determinados o no por su estructura uniforme.

8 Si ya llegó hasta aquí.

Quisieramos concluir este escrito con un breve esbozo de las consideraciones hechas para la noción dual de inmersión lineal: el mapeo cociente. Un espacio de Banach $\mathcal{Y}$ es un cociente de un espacio de Banach $\mathfrak{X}$ si existe una transformación lineal, sobre y continua $Q : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$. La primera pregunta que se ocurre en nuestro contexto es: si $\mathcal{Y}$ es ahora un cociente Lipschitz o un cociente uniforme de $\mathfrak{X}$, ¿Será $\mathcal{Y}$ un cociente lineal de $\mathfrak{X}$?

El primer impedimento al tratar de responder esta pregunta es que, si queremos definir un cociente Lipschitz (uniforme) de $\mathfrak{X}$ a $\mathcal{Y}$ simplemente como una función Lipschitz (uniformemente continua) y supra-yectiva esto no es suficiente: se sabe que para todo espacio de Banach de dimensión infinita y separable existe un mapeo Lipschitz, Fréchet diferenciable y suprayectivo sobre cualquier otro espacio de Banach separable [Ba]. Sin embargo un minuto de reflexión llevó a la siguiente idea:

Si $Q : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ es una transformación lineal, continua y sobre entonces, por el Teorema del Mapeo Abierto, se tiene que existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in \mathfrak{X}$ y $r > 0$, $Q(B_r(x)) \supset B_{\lambda r}(Qx)$. Esta propiedad de mapeos cocientes lineales es la que se observó era necesario implementar en la definición de cocientes no lineales, así:

Definición 15. *$\mathcal{Y}$ es un cociente Lipschitz de $\mathfrak{X}$ si existe una función Lipschitz, sobre, $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ y $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in \mathfrak{X}$ y $r > 0$, $f(B_r(x)) \supset B_{\lambda r}(f(x))$.*

Similarmente $\mathcal{Y}$ es un cociente uniforme de $\mathfrak{X}$ si existe una función uniformemente continua, sobre, $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$, tal que para todo $x \in \mathfrak{X}$ y $r > 0$ existe $\omega(r) = \omega(r, x) > 0$ tal que $f(B_r(x)) \supset B_{\omega(r)}(f(x))$.

Observación: Para aclarar un poco la noción de dualidad entre funciones no lineales y cocientes no lineales note que la continuidad uniforme de una función $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ se puede caracterizar de la siguiente manera: f es uniformemente continua si y solo si $f(B_r(x)) \subset B_{\Omega_f(r)}(f(x))$ para toda $x \in \mathfrak{X}$ y $r > 0$, donde $\Omega_f(r)$ es el módulo de continuidad de f. Además f es Lipschitz cuando $\Omega_f(r) = \lambda r$ para alguna $\lambda > 0$.

El estudio de cocientes no-lineales entre espacios de Banach ofreció un sinnúmero de dificultades desde el primer momento: ser Gâteaux diferenciable probó no ser útil pues al igual que para el caso de funciones Lipschitz, no hay criterios generales para escoger un "buen punto" donde calcular la derivada. Tambien, el Principio de Gorelik, que fué una herramienta fundamental para el estudio de mapeos Lipschitz y uniformemente continuos, ya no es válido para mapeos cocientes: se encontraron ejemplos de mapeos cocientes uniformes de ℓ_p a ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, que llevan toda la bola unitaria de un hiperplano de ℓ_p al cero [BJLPS].

A pesar de las malas nuevas, se han desarrollado nuevos conceptos para estudiar a los mapeos cocientes no-lineales. Por ejemplo nuevas ideas relacionadas con la aproximación de funciones Lipschitz por transformaciones afines fueron desarrolladas en [BJLPS] y estas permitieron demostrar que cocientes uniformes de $L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$, son cocientes lineales de $L_p([0,1])$. Tambien en [BJLPS] se mostró como codiciones más débiles de diferenciabilidad de Fréchet (la noción de ε-Fréchet diferenciabilidad) serían suficientes para obtener transformaciones lineales de mapeos no lineales entre espacios de Banach.

Muy interesante es el hecho de que el análisis de mapeos cocientes no lineales resultó ser material relevante incluso para el caso cuando los espacios de Banach son de dimensión finita. Por ejemplo en [JLPS] se estudian con detalle mapeos cocientes uniformes de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, con resultados del tipo: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un cociente Lipschitz entonces $f = P \circ h$ con P un polinomio y h un homeomorfismo del plano en si mismo (identificando al plano con $\mathbb{C}$, los números complejos). De hecho la hipótesis de ser un cociente Lipschitz es más fuerte que la del teorema enunciado en [JLPS].

Las técnicas usadas en [JLPS] son particulares al plano lo cual deja un buen número de preguntas abiertas sobre cocientes no lineales para dimensiones mayores a dos.

Como el lector habrá apreciado, esta es una área de investigación con muchas cosas por aprender y preguntas por contestar, amén de que sería muy interesante conocer posibles aplicaciones de esta línea de trabajo. Para profundizar en el tema o conocer más detalles de los resultados aquí expuestos sugerimos al lector consultar [BL] y [L].

Referencias

[AMM] I. Aharoni, B. Maurey, B. Mityagin, *Uniform embedding of metric spaces and of Banach spaces into Hilbert spaces*, Israel J. Math. **52** (1985), 251–265.

[B] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Segunda edición, Chelsea Publishing Co., New York, 1963.

[Ba] S. Bates, *On smooth nonlinear surjections of Banach spaces*, Israel J. Math. **100** (1997), 209–220.

[BJLPS] S. Bates, W. B. Johnson, L. Lindenstrauss, D. Preiss, G. Schechtman, *Affine approximation of Lipschitz functions and nonlinear quotients*, Geom. Funct. Anal. **9** (6), (1999), 1092–1127.

[BL] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis Vol. 1*, Colloquium Publication, Amer. Math. Soc. **48**, 2000.

[DU] J. Diestel, J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys and Monographs, No. 15, Amer. Math. Soc. 1977.

[G] E. Gorelik, *The uniform nonequivalence of L_p and ℓ_p*, Israel J. Math **87** (1994), 1–8.

[GKL] G. Godefroy, N. Kalton, G. Lancien, *Subspaces of $c_0(\mathbb{N})$ and Lipschitz isomorphisms*, Geom. Funct. Anal. **10** (4), (2000), 798–820.

[HM] S. Heinrich, P. Mankiewicz, *Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz clasification of Banach spaces*, Studia Math. **73** (1982), 225–251.

[IP] D. Ives, D. Preiss, *Not too well differentiable Lipschitz isomorphisms*, Israel J. Math. **115** (2000), 343–353.

[JLPS] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, G. Schechtman, *Uniform quotient mappings of the plane*, Michigan Math. J. **47**, (1), (2000), 15–31.

[JLS] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, G. Schechtman, *Banach spaces determined by their uniform structure*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), 430–470.

[K] M. I. Kadec, *A proof of the topological equivalence of all separable infinite dimensional Banach spaces*, Functional Anal. App. **1** (1967), 53–62.

[L] J. Lindenstrauss, *Uniform embeddings, homeomorphisms and quotient maps between Banach spaces*, Topology Appl. **85** (1-3), (1998), 265–279.

[LT] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 92, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[MU] S. Mazur, S. Ulam, *Sur les transformations isométriques déspaces vectoriels normés*, C.R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[P] D. Preiss, *Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces*, J. Funct. Anal. **91** (1990), 312–345.

[R] M. Ribe, *On uniformly homeomorphic Banach spaces*, Ark. Math. **16** (1978), 1–9.