MISCELANEA MATEMÁTICA **24** (1996) 23–37 SMM

El Conjunto de Cantor

José Galavíz Casas

Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Este trabajo es una recopilación de casi todos aquellos teoremas, lemas y proposiciones referentes al conjunto de Cantor que generalmente se analizan, o por lo menos se mencionan, en los cursos de matemáticas a nivel licenciatura. Algunos de ellos se demuestran en los mismos cursos o en los textos utilizados, pero muchos otros no. Por otra parte, los resultados acerca de este conjunto se encuentran dispersos en la literatura, no es posible encontrar una fuente donde se encuentren todos juntos, en parte porque los conocimientos necesarios para comprenderlos son disímiles. Estas son las razones fundamentales que motivaron este trabajo. Las demostraciones que aparecen en él son *originales* en el sentido de que no fueron extraídas de ningún texto, fueron inventadas por el autor. Se asume que el lector recuerda algunos resultados acerca de series y posee un conocimiento elemental de topología.

1 Introducción

El conjunto de Cantor de tercio medio es, probablemente, el más usual ejemplo y contraejemplo de cuantos se utilizan en el estudio de ciertas áreas de las matemáticas. Fue construido por primera vez a fines del siglo XIX por Georg Cantor para resolver un problema que se había planteado en el marco de la naciente topología, a saber, si existía o no un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$ que fuera totalmente disconexo y denso en sí mismo. Cantor probó que sí existe, más tarde ya en el siglo XX se demostró que todos los conjuntos con estas características son topológicamente equivalentes (homeomorfos). El presente trabajo reune una buena cantidad de los resultados más interesantes respecto a este famoso objeto.

Antes que nada se recordará cual es el proceso de construcción del conjunto de Cantor. Supóngase que al intervalo cerrado [0,1] se le divide en tres subintervalos de igual longitud: [0,1/3], (1/3, 2/3) y [2/3, 1] y que se le quita el tercio medio, a saber el intervalo (1/3, 2/3). El conjunto que queda está constituido por los intervalos [0,1/3] y [2/3, 1]. Supóngase ahora que cada uno de estos intervalos es dividido a su vez en tres partes iguales y que se quitan los tercios medios de cada intervalo. Si repetimos este proceso una infinidad de veces obtendremos el conjunto de Cantor. Es decir, si denotamos por $\mathcal{C}_n$ a la unión de todos los intervalos cerrados que permanecen hasta el paso n (o n-ésima iteración), el conjunto de Cantor es $\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n$.

Denotemos por $J_{n,i}$ al i-ésimo intervalo presente en la n-ésima iteración y por $I_{n,j}$ al j-ésimo ausente en la misma iteración. Como se puede observar en la tabla siguiente

$$\mathcal{C}_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}.$$

Además

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

Iteración n	$\mathcal{C}_n$
0	$J_{0,1} = [0,1]$
1	$J_{1,1} = [0,\frac{1}{3}], J_{1,2} = [\frac{2}{3},1]$
2	$J_{2,1} = [0,\frac{1}{9}], J_{2,2} = [\frac{2}{9},\frac{1}{3}], J_{2,3} = [\frac{2}{3},\frac{7}{9}], J_{2,4} = [\frac{8}{9},1]$
3	$J_{3,1} = [0,\frac{1}{27}], J_{3,2} = [\frac{2}{27},\frac{3}{27}], J_{3,3} = [\frac{6}{27},\frac{7}{27}], J_{3,4} = [\frac{8}{27},\frac{9}{27}]$
3 (cont.)	$J_{3,5} = [\frac{18}{27},\frac{19}{27}], J_{3,6} = [\frac{20}{27},\frac{21}{27}], J_{3,7} = [\frac{24}{27},\frac{25}{27}], J_{3,8} = [\frac{26}{27},\frac{27}{27}]$

2 Medida y cardinalidad

Sea μ la función de medida (longitud) en $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor de tercio medio y $\mathcal{C}^c$ el complemento del mismo ($\mathcal{C}^c = [0,1] \setminus \mathcal{C}$)

Teorema 1 $\mu(\mathcal{C}) = 0$

Demostración:

$$\mu(\mathcal{C}^c) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{3^i}.$$

Sea $A = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i$, entonces:

$$A + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

Esto es una serie geométrica con razón $\frac{2}{3} < 1$ y por lo tanto converge

$$A + 1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3,$$

de donde: $A = 2$ y entonces

$$\mu(\mathcal{C}^c) = \frac{1}{2}A = 1.$$

Además

$$\mu([0,1]) = 1.$$

Por lo tanto

$$\mu(\mathcal{C}) = 1 - \mu(\mathcal{C}^c) = 1 - 1 = 0.$$

∎

Proposición 1 *Si $[a,b]$ es un intervalo del tipo $J_{n,k}$ entonces b es múltiplo impar de $(1/3)^n$.*

Demostración: (Por inducción sobre n).

$[n = 1]$

$$J_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] = \left[0, 1\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$J_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \left[\frac{2}{3}, 3\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

Ahora suponemos que la proposición es válida para $n = s - 1$, es decir,

$$J_{(s-1),k} = \left[\frac{R}{3^{s-1}}, \frac{R+1}{3^{s-1}}\right]$$

donde R es par.

$[n = s.]$

Al construir los conjuntos J_s dentro de $J_{(s-1),k}$ para el siguiente nivel de iteración tenemos:

$$\left[\frac{3R}{3^s}, \frac{3R+1}{3^s}\right] \quad y \quad \left[\frac{3R+2}{3^s}, \frac{3(R+1)}{3^s}\right].$$

Dado que R es par $R = 2q$ para alguna $q \in \mathbb{N}$ y $3R = 3(2q) = 2(3q)$ es par. Por lo tanto

$$3R + 1 \quad \text{es impar}.$$

Además

$$\frac{3(R+1)}{3^s} = \frac{R+1}{3^{s-1}} \text{ el cual era impar por hipótesis}.$$

■

Ahora se utilizarán las expresiones ternarias de los números en el intervalo unitario, recuérdese que en dichas expresiones solo son posibles los dígitos 0, 1 y 2 y cada posición en el número corresponde a una potencia de 1/3.

Proposición 2 *Si x es un múltiplo impar de una potencia de 1/3 entonces existe una expresión ternaria finita para x.*

Demostración:

$$x = (2s-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{i=1}^{2s-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

y esta sumatoria, evidentemente se expresa en, a lo más, n dígitos ternarios. ■

Proposición 3 *Si x es un múltiplo impar de una potencia de 1/3 con representación ternaria finita $0.t_1t_2...t_n$ entonces existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $t_i = 1$.*

Demostración: (por reducción al absurdo)

x es múltiplo impar de una potencia de 1/3, por lo tanto

$$x = (2s-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Supóngase que tiene una representación ternaria finita $(0.t_1, t_2, ...t_n)$ donde para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene que $t_i \in \{0, 2\}$.

Sea $d_1, d_2, ..., d_r$ la sucesión creciente de índices tales que

$$t_{d_j} = 2 \quad para \quad toda \quad j \in \{1, 2, ..., r\}$$

entonces

$$\begin{aligned} x &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{d_1} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{d_2} + ... + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{d_r} \\ &= 2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{d_1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{d_2} + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{d_r}\right] \\ &= 2\left[\frac{3^{d_r-d_1} + 3^{d_r-d_2} + ... + 1}{3^{d_r}}\right]. \end{aligned}$$

Sea $s = 3^{d_r-d_1} + 3^{d_r-d_2} + ... + 1$ entonces

$$x = 2s\left(\frac{1}{3}\right)^{d_r}$$

lo que contradice la hipótesis de que x es múltiplo impar de una potencia de $1/3$. ∎

Teorema 2 *Para todo $n \in \mathbf{N}$ la expresión ternaria de los elementos de $I_{n,k}$ para toda $k \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$ tiene, al menos, un 1 involucrado.*

Demostración: De las proposiciones 2 y 4 se deduce que para toda $n \in \mathbf{N}$ los extremos derechos de los intervalos $J_{n,k}$ que son los extremos izquierdos de los $I_{n,k}$ tienen una representación ternaria con, al menos un 1 involucrado. Además, dado que todos los elementos de $I_{n,k}$ distan de su extremo izquierdo en menos que $(1/3)^n$ entonces la expresión ternaria de dicho extremo es un subconjunto de la expresión correspondiente a cualquier elemento de $I_{n,k}$. Es decir, si la expresión ternaria del extremo izquierdo de un $I_{n,k}$ es $0.a_1a_2...a_n$ entonces la expresión ternaria de cualquier punto de $I_{n,k}$ es $0.a_1a_2...a_nb_1b_2...$ donde, al menos uno de los dígitos a_i es 1. ∎

Proposición 4 *El conjunto de Cantor tiene una cardinalidad mayor o igual a la del intervalo $[0, 1)$.*

Demostración: Denotaremos por $\#A$ la cardinalidad del conjunto A.

Considérese la expresión binaria de todos los elementos del intervalo $[0,1) \in \mathbb{R}$.

Para todo $x \in [0,1)$ tenemos que

$$x = 0.b_1 b_2 \ldots$$

donde $b_i \in \{0,1\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Defínase la función f como sigue

$$f(x) = 0.2b_1 2b_2 \ldots$$

es decir sustituimos todos los 1's por 2's en la expresión binaria de x.

Llámesele $\mathcal{F}$ a la imagen bajo f de $[0,1)$. Claramente f es una función biyectiva (es invertible). $\mathcal{F}$ está constituida exclusivamente por elementos de la forma $0.t_1t_2\ldots$ donde $t_i \in \{0,2\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $\mathcal{F} \subset [0,1]$, además $\#\mathcal{F} = \#[0,1]$.

Si se considera a los elementos de $\mathcal{F}$ como expansiones ternarias de los elementos de $[0,1]$ vemos que para todo $x \in \mathcal{F}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $k \in \{1,2,\ldots,2^n-1\}$, $x \notin I_{n,k}$ porque su expresión ternaria tendría al menos un 1 involucrado, por lo tanto $x \in \mathcal{C}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En conclusión: $x \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \#\mathcal{F} \leq \#\mathcal{C}$. ∎

Teorema 3 *El conjunto de Cantor tiene la cardinalidad del continuo.*

Demostración: Por la proposición anterior $\#\mathcal{C} \geq \#[0,1]$.

Por construcción $\mathcal{C} \subset [0,1] \Rightarrow \#\mathcal{C} \leq \#[0,1]$.

Entonces

$$\#\mathcal{C} = \#[0,1] = 2^{\aleph_0}$$

∎

3 Propiedades topológicas

Recuérdese que por $\mathcal{C}_n$ denotamos la n-ésima generación del proceso de Cantor y por $\mathcal{C}$ al límite de $\mathcal{C}_n$ cuando $n \to \infty$.

Proposición 5 *Si $x \in \mathcal{C}_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ entonces existe $y \in \mathcal{C}$ tal que $|x-y| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ y $x \neq y$.*

Demostración: $x \in C_n \Rightarrow x \in J_{n,k}$ para alguna $k \in \{1, 2, ..., 2^{n-1}\}$. Sean y_1 y y_2 los extremos de dicho $J_{n,k}$.

Tenemos que:

$$y_1 \leq x \leq y_2$$

Sea y el extremo más distante de x, es decir

$$y = \begin{cases} y_1 & si \quad |x - y_1| \geq |x - y_2| \\ y_2 & si \quad |x - y_2| > |x - y_1| \end{cases}$$

entonces

$$|x - y| \leq |y_1 - y_2| = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

■

Con C^a se denota el conjunto derivado de C (es decir, el conjunto de puntos de acumulación de C).

Teorema 4 $C \subset C^a$. *Es decir, el conjunto de Cantor es denso en sí mismo; todos sus puntos son de acumulación.*

Demostración: Sea $x \in C \Rightarrow x \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y(n) \in C$ tal que:

$$|x - y| \leq \frac{1}{3^n}$$

y $x \neq y$ (por la proposición anterior).

Sea $\varepsilon > 0$ y N tal que

$$\frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(3)} < N$$

$$\Leftrightarrow -\log_3(\varepsilon) < N \Leftrightarrow -\log_3(\varepsilon) < N \ \log_3(3) \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 3^N \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^N < \varepsilon$$

entonces existe $y(N)$ tal que $y \neq x$ y $|x - y| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^N < \varepsilon$ por lo tanto:

$$x \in C^a \Rightarrow C \subset C^a$$

■

Proposición 6 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, C_n *es cerrado.*

Demostración: Por definición:

$$\mathcal{C}_n = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_{n,k}$$

y cada $J_{n,k}$ es un intervalo cerrado. La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n$ es cerrado. ■

Teorema 5 *$\mathcal{C}$ es cerrado.*

Demostración: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n$ es cerrado, por la proposición anterior.

Por definición:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i$$

$\mathcal{C}$ es la intersección numerable de conjuntos cerrados, luego $\mathcal{C}$ es cerrado. ■

Teorema 6 *$\mathcal{C}$ es perfecto (cerrado y denso en sí mismo).*

Demostración: Del teorema 4 y el teorema 5 se deduce inmediatamente lo deseado. ■

Por $B_r(x)$ se denotará la bola abierta de radio r y centro en x.

Proposición 7 *Si $x \in \mathcal{C}_n$, $(n > 0)$ entonces $B_r(x) \cap \mathcal{C}_n^c \neq \emptyset$ con:*

$$r = \frac{1}{2^n}$$

(por $\mathcal{C}_n^c$ denotamos $[0,1] \setminus \mathcal{C}_n$).

Demostración: Si $x \in \mathcal{C}_n \Rightarrow x \in J_{n,k}$ para alguna $k \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$.

Sean y_1 y y_2 los extremos de dicho intervalo. Es decir, $J_{n,k} = [y_1, y_2]$.

Por construcción del conjunto de Cantor:

$$|y_1 - y_2| = \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n}$$

Dado que $x \in [y_1, y_2]$ ocurre: $y_1 \leq x \leq y_2$ así que

$$|y_1 - x| \leq \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n}$$

Es decir la distancia de x a cualquier extremo del intervalo es menor que $\frac{1}{2^n}$.

Por lo que, necesariamente

$$r = \frac{1}{2^n} \Rightarrow B_r(x) \cap C_n^c \neq \emptyset,$$

dado que el radio de la bola es mayor que la longitud total de $J_{n,k}$. ■

Recuérdese que un punto es interior de un conjunto si existe una bola abierta centrada en él que esté completamente contenida en el conjunto. Denominaremos interior de un conjunto A al conjunto de puntos interiores de A y lo denotaremos con A^o.

Teorema 7 *$C^o = \emptyset$ (el interior del conjunto de Cantor es vacío).*

Demostración: Hay que probar que, para todo $x \in C$ y todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ no está contenida en C, es decir: $B_\varepsilon(x) \cap C^c \neq \emptyset$.

Sean x un punto cualquiera de C y $\varepsilon > 0$ entonces $x \in C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ dado que $C \subset C_n$.

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $r = \frac{1}{2^n}$, ocurre:

$$B_r(x) \cap C_n^c \neq \emptyset \Rightarrow B_r(x) \cap C^c \neq \emptyset$$

dado que: $C_n^c \subset C^c$.

Sea N tal que:

$$\frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} < N$$

de donde

$$-\log_2(\varepsilon) < N \ \log_2(2) \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^N \Leftrightarrow \frac{1}{2^N} < \varepsilon$$

por lo tanto

$$B_{\frac{1}{2^N}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$$

y

$$B_{\frac{1}{2^N}}(x) \cap C^c \neq \emptyset \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap C^c \neq \emptyset$$

■

Definición 1 Una cubierta cerrada de un conjunto A es una colección de conjuntos cerrados $\{E_i\}$ tal que $A \subset \bigcup_i (E_i)$

Definición 2 La cerradura de un conjunto A es la intersección de todas las cubiertas cerradas de A. Es decir, es el mínimo conjunto cerrado que contiene a A. La cerradura de A se denotará con A^-.

Definición 3 Un conjunto A es denso en ninguna parte sí y sólo sí el interior de la cerradura de A es vacío.

Teorema 8 *$\mathcal{C}$ es denso en ninguna parte..*

Demostración: $\mathcal{C}^- = \mathcal{C}$ y el interior de $\mathcal{C}$ es vacío, por lo tanto el interior de $\mathcal{C}^-$ es vacío. ∎

4 Algo más

Proposición 8 *Se tiene que* $1/4 \in \mathcal{C}$.

Demostración: Observación

	K
$1/3 - 1/9 < 1/4 < 1/3$	1
$1/3 - 1/9 < 1/4 < 1/3 - 1/9 + 1/27$	2
$1/3 - 1/9 + 1/27 - 1/81 < 1/4 < 1/3 - 1/9 + 1/27$	3
$1/3 - 1/9 + 1/27 - 1/81 < 1/4 < 1/3 - 1/9 + 1/27 - 1/81 + 1/243$	4

En general

$$\text{con } k \text{ impar: } a_{k+1} < \frac{1}{4} < a_k$$

$$\text{con } k \text{ par: } a_k < \frac{1}{4} < a_{k+1}$$

Donde

$$a_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n (-1)^{n-1}$$

Por construcción $a_k \in \mathcal{C}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ dado que a_k es un extremo de los intervalos cerrados que van quedando en $\mathcal{C}$, a los que hemos llamado J_n's.

Definimos

$$S_n = \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión S_n es decreciente y de términos mayores que cero para todo $n \in \mathbb{N}$. Además

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Entonces, por la prueba de las series alternantes de Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(-1)^{n-1}$$

converge.

Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(-1)^{n-1}=a$$

ahora bien, dado que todos los puntos de acumulación de $\mathcal{C}$ están en $\mathcal{C}$ y dado que, para cada $k\in\mathbb{N}$ la suma parcial

$$a_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(-1)^{n-1}$$

es elemento de $\mathcal{C}$, se tiene que a es elemento de $\mathcal{C}$ dado que es punto de acumulación de la sucesión de sumas parciales y cada suma parcial está en $\mathcal{C}$.

Ahora se mostrará que $a=1/4$. Para ello se separará la serie original en dos series

1. La suma de términos negativos

$$C=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}\Rightarrow C+1=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}$$

   Esta es una serie geométrica con razón $(1/3)^2<1$ y por lo tanto converge a

$$C+1=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}$$

   de donde

$$C=\frac{1}{8}$$

2. La suma de los términos positivos

$$B=\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2r-1}$$

$$B=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(1/3)^{2r}}{(1/3)}=\sum_{r=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{3}\right)^{2r}=3\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2r}=\frac{3}{8}$$

Así que finalmente:

$$a=B-C\Rightarrow a=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

■

5 Generalizaciones

Es posible generalizar el proceso de construcción del conjunto de Cantor, ya sea dividiendo el intervalo original en más partes y quitando distintas porciones de éste o bien haciendo algo similar en un objeto de más de una dimensión.

Un ejemplo de lo que puede obtenerse con objetos bidimensionales es el llamado *triángulo de Sierpinski.* Su proceso de construcción es como sigue: inicialmente se tiene un triángulo equilátero relleno (es decir, con sus puntos interiores) de lado 1, utilizando como vértices los puntos medios de cada lado del triángulo original, se traza otro que divide al original en cuatro regiones triangulares de la misma área, se extrae el triángulo central y se repite el proceso con cada uno de los tres triángulos que permanecen en el conjunto hasta el momento. Si el proceso se itera indefinidamente al final se obtiene el triángulo de Sierpinski.

Es fácil observar que el área cubierta por la generación número n del triángulo de Sierpinski es $A_n = (3/4)^n A_0$ donde A_0 es el área del triángulo inicial. En el límite, cuando n tiende a infinito, del área cubierta es cero. Es decir, al igual que el conjunto de Cantor, tiene medida cero y sin embargo posee la potencia del continuo. Ambos son objetos que tienen tantos puntos como el espacio donde viven pero ninguno de ellos contiene un trozo (disco o intervalo) de ese espacio.

A decir de Benoit Mandelbrot el triángulo de Sierpinski y el conjunto de Cantor son más *deshilados* que un plano y una recta respectivamente pero más *gordos* que una línea o un conjunto de puntos aislados. Para caracterizar objetos tan extraños el mismo Mandelbrot inventó el concepto de *dimensión fractal* en la década de los 80 de este siglo.

La dimensión fractal es una generalización del concepto de dimensión topológica que estamos acostumbrados a usar cuando decimos que un plano tiene dos dimensiones y un cubo tres. A diferencia de la dimensión topológica, que siempre es un número entero, la dimensión fractal puede ser un número real cualquiera.

Si el lector dibuja algunas de las distintas etapas sucesivas de construcción del conjunto de Cantor o del triángulo de Sierpinski notará que en la etapa n del proceso se ve lo mismo que se vió en la etapa $n-1$ pero a una escala menor. El aspecto general del todo se reproduce en cada una de sus partes. Esta propiedad es característica de los objetos fractales y se denomina *autosimilitud.*

En el caso particular de objetos autosimilares tan sencillos como el conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpinski, la dimensión fractal es el cociente:

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

donde N es el número de veces que se reproduce el objeto inicial en la primera generación y ε es la escala a la que se encuentran las dimensiones de las reproducciones. En caso del conjunto de Cantor en la primera generación quedan dos ($N = 2$) intervalos iguales al $[0, 1]$ pero a escala $1/3$ ($\varepsilon = 1/3$) del original; así que la dimensión fractal del conjunto de Cantor es:

$$D_c = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.63$$

lo que corresponde con la idea intuitiva de que el conjunto de Cantor es más *gordo* que los puntos pero mas *deshilado* que un segmento de recta. En el caso del triángulo de Sierpinski donde quedan 3 triángulos equiláteros con lado igual a la mitad del original:

$$D_s = \frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{1}{1/2}\right)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1.58$$

que análogamente coincide con la idea de que el objeto en cuestión es algo que está entre una línea y un plano.

Así como el triángulo de Sierpinski existen muchos otros objetos extraños y fascinantes, hablar de ellos rebasaría con mucho los objetivos de un artículo sobre el conjunto de Cantor. Sin embargo el lector interesado podrá consultar las obras sobre fractales mencionadas al final de este documento. Especialmente recomendables son los primeros capítulos del libro de Mandelbrot y el apéndice sobre *curvas patológicas* del libro de Kasner y Newman.

6 Conclusiones

Como se ha visto, el conjunto de Cantor reune las características más aparentemente contradictorias e interesantes. Tiene una infinidad no numerable de puntos pero ningún intervalo cabe en él, es denso en sí mismo pero también denso en ninguna parte y contiene muchos más puntos que los extremos de los intervalos que se forman durante el proceso de construcción. Por si esto fuera poco nos abre las puertas de la geometría fractal, una rama muy joven y sin embargo muy extensa de las matemáticas.

A pesar de que este artículo se ha dedicado casi exclusivamente al conjunto de Cantor no agota la exploración de este objeto. Hay aún cosas interesantes que hacer. Por ejemplo: hacer un programa de computadora que reciba como dato n y que mediante recurrencia dibuje en la pantalla las primeras n generaciones del proceso de construcción del conjunto; o bien considerar el intervalo $[0,1]$ como una barra de material con masa unitaria y sin volumen (objetos de uso común en la física) y pensar que siempre que se retira un intervalo la masa de éste se redistribuye uniformemente entre los que quedan, de tal forma que la masa total del conjunto se conserva y luego dibujar la gráfica de cada una de las funciones:

$$g_n(x) = \int_0^x \rho_n dx$$

donde ρ_n es la densidad lineal de los segmentos de barra de la generación n; $g_n(x)$ es la cantidad de masa contenida desde 0 hasta x en el conjunto de Cantor de generación n, así que siempre $g_n(1) = 1$ para toda n. El lector curioso sin duda pronto averiguará por qué a la función $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ se le denomina *la escalera del diablo.*

También con ayuda de una computadora es posible explorar otros objetos igualmente fascinantes, como el ya mencionado triángulo de Sierpinski y algunos otros que se encuentran en la literatura mencionada a continuación.

Referencias

[1] Barnsley, M. *Fractals Everywhere.* Academic Press Inc. 1988.

[2] Bartle, R. *Introducción al Análisis Matemático.* Limusa, 1982.

[3] Falconer, K. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications.* John Wiley & Sons. 1990.

[4] García-Maynez, A. y Tamariz Mascarúa, A. *Topología General.* Ed. Porrúa. 1988.

[5] Kasner, E. y Newman, J. *Matemáticas e Imaginación.* Salvat. 1987.

[6] Mandelbrot, B. *Los Objetos Fractales, Forma, Azar y Dimensión.* Tusquets Editores,1984.