Miscelánea Matemática **60** (2015) 47-58 SMM

Modelos elementales para el problema de la ruina

María Emilia Caballero
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
mariaemica@gmail.com

1. Introducción

Se presenta al lector el problema básico de la ruina, que es relevante en muchas aplicaciones, especialmente en lo relativo al estudio de situaciones que involucran riesgo. Se trata de un modelo aleatorio que evoluciona en el tiempo, (también llamado proceso estócastico) y que toma valores en el conjunto de números reales. Interesa conocer cómo podemos calcular la probabilidad de que se llegue, por primera vez, a valores negativos (llegar a la ruina) o bien se logre rebasar un nivel positivo prefijado. Se presentan los casos más sencillos, y los métodos de solución son elementales. Sólo supondremos que el lector cuenta con conocimientos básicos de probabilidad, tales como variable aleatoria, distribución, independencia y condicionamiento.

2. Caso discreto

Una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro $p \in (0,1)$ toma el valor 1 con probabilidad p y el valor -1 con probabilidad $(1-p)$. Es, entre otras cosas, un modelo adecuado para describir un volado (águila es 1 y sol es 0). Estas variables aleatorias se llaman así en honor al famoso matemático Jakob Bernoulli, quién en su célebre libro Ars Conjectandi probó el primer teorema de los grandes números precisamente para estas variables llamadas binarias porque sólo pueden tomar dos valores. Este teorema ha tenido una trascendencia enorme en todo el desarrollo posterior de la teoría de la probabilidad.

Las **caminatas aleatorias simples** pueden verse como un modelo para una sucesión de juegos de volados, que se suponen independientes entre sí: hay dos jugadores que llamaremos A y B; cada jugador apuesta en un volado un peso. Gana ese peso el jugador A con probabilidad $p \in (0,1)$ (sale águila) y lo pierde con probabilidad $q = 1 - p$ (sale sol). La independencia significa que lo que sucede en un volado no influye en los demás volados. El modelo matemático se construye con una sucesión de variables aleatorias independientes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que describen a los resultados de los volados sucesivos), y cada una de ellas es una variable Bernoulli de parámetro $p \in (0,1)$. Si el capital inicial de A es $a \in \mathbb{N}$ pesos y el de B es de $b \in \mathbb{N}$ pesos, el capital de A después de n volados es

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

y el capital de B será

$$R_n = b - \sum_{i=1}^{n} X_i = (c-a) - \sum_{i=1}^{n} X_i = c - S_n.$$

A la sucesión $\{S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i, \;\; n = 1, 2, \cdots\}$ se le llama **caminata aleatoria simple** que empieza en a. Si $p = q$ se le llama **caminata aleatoria simple simétrica** y es el caso de una moneda equilibrada o juego justo.

Esto se puede visualizar como una gráfica dirigida, que describe todas las posibilidades para el juego. A continuación damos un esquema hasta el cuarto juego (figura 1).

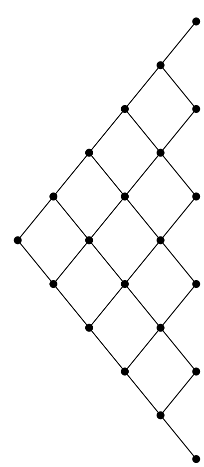

Figura 1. Gráfica.

En la figura 2 se tienen dos trayectorias destacadas: la discontínua describe el hecho de que A ganó dos veces seguidas, luego perdió una vez, gano una vez y volvió a perder; la punteada describe el hecho de que A perdió los dos primeros volados luego ganó dos veces y finalmente volvió a perder.

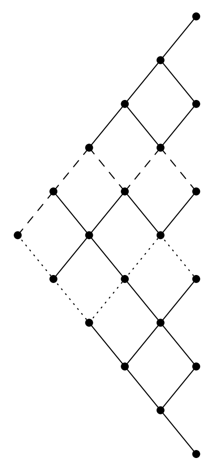

Figura 2. Gráfica con dos trayectorias destacadas.

El problema que nos interesa es saber cuando alguno de los dos jugadores se arruina, es decir, cuando alguno de los dos pierde todo su dinero y entonces el juego termina y el jugador que ganó todo el capital $c = (a + b)$ es quien gana el juego. En este caso el modelo es el de una **caminata aleatoria simple con barreras absorbentes**. ¿Cuál es la probabilidad de que gane todo el capital el jugador A? ¿Cuál la de que gane B? Claramente esto va depender del valor de p y del monto del capital inicial de cada uno. Una forma de resolver el problema es usando probabilidad condicional. Para ello, se observa que pasa en el primer juego y se define la probabilidad buscada en términos del capital inicial del jugador A y se mantiene constante el capital total c.

En la figura 3 se describen dos trayectorias una (la negra continua) en la que A gana el juego y otra (la negra punteada) en donde A pierde el juego.

Sea J el evento (A pierde), es decir, S_n alcanza primero el nivel 0 antes que el nivel c. Llamemos $h(u)$ a la probabilidad de que A pierda habiendo empezado con $u \in \{1, 2, \ldots, (c-1)\}$ pesos.

$$h(u) := \mathbb{P}(J|S_0 = u) := \mathbb{P}_u(J).$$

Al utilizar la infomación de lo que puede pasar en el primer volado (A gana o pierde un peso) se tiene lo siguiente

$$h(u) = \mathbb{P}\left(J|S_0 = u\right) = \mathbb{P}\left((J \cap (S_1 = 1+u)) \cup (J \cap (S_1 = u-1))|S_0 = u\right)$$

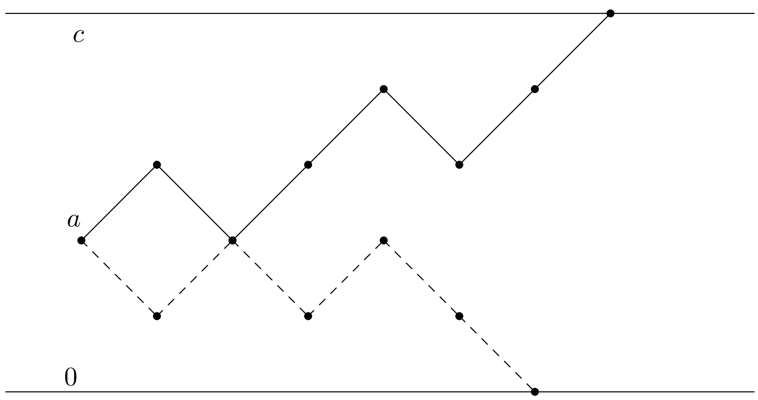

Figura 3. Dos trayectorias que llegan a las barreras.

lo que por aditividad y por la definición de probabilidad condicional es igual a

$$\frac{\mathbb{P}(J \cap (S_1 = 1+u) \cap (S_0 = u)) + \mathbb{P}(J \cap (S_1 = u-1) \cap S_0 = u)}{\mathbb{P}(S_0 = u)} =$$
$$= \mathbb{P}[J|(S_1 = u+1))\,\mathbb{P}(S_1 = u+1)]$$
$$+ \mathbb{P}[J|(S_1 = u-1))\,\mathbb{P}(S_1 = u-1)] =$$
$$= ph(u+1) + qh(u-1).$$

en las últimas igualdades se usa la independencia de las variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Como además se sabe que $h(0) = 1$ y $h(c) = 0$, el problema consiste ahora en resolver la ecuación en diferencias finitas:

$$h(u) = ph(u+1) + qh(u-1), \;\; h(0) = 1, h(c) = 0.$$

- En el caso de que $p = 1/2 = q$ se tiene

$$h(u) = \frac{c-u}{c} \tag{1}$$

  es decir, la función h es lineal y se conocen sus valores en la frontera por lo que se obtiene directamente la solución (única)

$$h(u) = \frac{c-u}{c}$$

  y para el caso $u = a$ esta probabilidad es

$$h(a) = \frac{b}{a+b}.$$

- Para resolver el sistema en el caso que $p \neq q$ se procede así:

$$(p+q)h(u) = ph(u+1) + qh(u-1),$$

lo que es equivalente a

$$p\big(h(u) - h(u+1)\big) = q\big(h(u-1) - h(u)\big), \;\; u = 1, 2, \ldots, (c-1). \quad (2)$$

- Sean $d_k = h(k) - h(k+1)$, $k = 1, 2, \ldots, (c-1)$ y $r = q/p$.
- La igualdad (2) escrita con esta notación es

$$d_u = r d_{u-1},$$

y por iteración se llega a

$$d_u = r^u d_0$$

en consecuencia

$$1 = h(0) - h(c) = \sum_{j=0}^{c-1} d_j = d_0 \sum_{j=0}^{c-1} r^j = d_0 \frac{1 - r^c}{1 - r},$$

$$h(u) = h(u) - h(c) = \sum_{i=u}^{c-1} d_i = d_0 \sum_{i=u}^{c-1} r^i = d_0 \frac{r^u - r^c}{1 - r}.$$

De la primera ecuación se obtiene el valor de d_0 que se sustituye en la segunda y se obtiene

$$h(u) = \frac{r^u - r^c}{1 - r^c} \quad (3)$$

De esta manera hemos obtenido la probabilidad de que el jugador A pierda el juego si empieza con u pesos.

Por otra parte, si M denota al evento «B pierde» el juego (equivalente a «A gana» el juego) y denotamos por

$$k(u) = \mathbb{P}(M | S_0 = c - u)$$

tenemos nuevamente dos casos: $p = q$ o $p \neq q$.

Si $p = q = 1/2$ ya sabemos que la función k es lineal y se tiene

$$k(u) = u/c \quad (4)$$

por las condiciones a la frontera que ahora son $k(0) = 0$ y $k(c) = 1$.

En el caso $p \neq q$, se resuelve de manera análoga a lo hecho en el problema anterior o simplemente se pueden invertir los papeles A y de B e intercambiar a p por q es decir, aparecerá $1/r$ en vez de r y $(c-u)$ en vez de u. Al aplicar la fórmula (3) a esta situación y hacer los cálculos se obtiene:

$$k(u) = \frac{1 - r^u}{1 - r^c}, \;\; p \neq q \quad (5)$$

y lo extraordinario es ver que de (1),(3),(4) y (5) se deduce

$$h(u) + k(u) = 1, \;\; u = 0, 1, \ldots, c \quad (6)$$

para cualquier valor de $p \in (0, 1)$.

Observación Otra forma en que se pueden escribir los resultados anteriores es mediante el uso de «tiempos de paro». Se define

$$\tau_x = \begin{cases} \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : S_n = x\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N} : S_n = x\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } \{n \in \mathbb{N} : S_n = x\} = \emptyset. \end{cases}$$

Esta es una nueva variable aleatoria y nos dice en cuanto tiempo llega cada trayectoria de la caminata por primera vez al punto $x \in \mathbb{N}$. Con esta notación, la probabilidad de que el jugador A pierda, si empezó con $u \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ pesos es

$$\mathbb{P}(\tau_0 < \tau_c | S_0 = u) := \mathbb{P}_u(\tau_0 < \tau_c)$$

ya que esa probabilidad indica que se llegó primero al nivel 0 antes que al c.

3. Consecuencias

Del simple cálculo que se ha hecho, podemos obtener propiedades notables de la caminata aleatoria:

- Por la igualdad (6) toda caminata aleatoria simple sale de un intervalo dado con probabilidad 1.
- Ahora usaremos las notaciones $h(c, u)$ y $k(c, u)$ en lugar de $h(u)$ y $k(u)$ para hacer énfasis en que el resultado depende de la barrera superior c y veremos que pasa si esta barrera superior se hace variar. No se menciona la barrera inferior porque se mantiene fija e igual a cero y como también se mantiene fijo el capital inicial de A.
  - Si $r = \frac{q}{p} < 1$, gracias a (3) se puede calcular el límite cuando c tiende al infinito:

    $$\lim_{c \to \infty} h(c, u) = r^u$$

    lo que significa que A tiene una probabilidad positiva $(1 - r^u)$ de no arruinarse, aún si la barrera superior se aleja indefinidamente.
    Esto equivale a

    $$\lim_{c \to \infty} k(c, u) = 1 - r^u,$$

    es decir B puede arruinarse con probabilidad positiva.
  - Si ahora $r = \frac{q}{p} > 1$ observemos que pasa con los mismos límites:

    $$\lim_{c \to \infty} h(c, u) = 1,$$

    lo que significa que A eventualmente se arruinará con probabilidad 1 y es también razonable esperar esto pues sabemos que en cada volado A tiene mayor probabilidad de perder que de ganar por ser q mayor que p. Es claro, además que

$$\lim_{c\to\infty} k(c,u) = 0,$$

es decir la probabilidad de que B se arruine es cero.
Esta aparente asimetría se debe a que la barrera inferior se mantuvo constante y la superior se hizo crecer indefinidamente, lo que presupone que para u fijo, B tiene un capital que crece indefinidamente, ya que sólo de esta fuente puede crecer el capital total c (recordemos que u representa el capital inicial de A y como ya se dijo, se mantiene constante).

- Si ahora consideramos el tiempo en que sale por primera vez del intervalo $(0,c)$,

$$T = \min(\tau_0, \tau_c),$$

  se puede probar (vea por ejemplo [3] o [2]) que si la cadena empieza en cualquier punto $u \in \{1, 2, \cdots (c-1)\}$, la esperanza de T es finita, es decir, no sólo es cierto que con probabilidad 1, la caminata sale de un intervalo dado, sino que lo hace en un tiempo finito (en media).
- Si se empieza en el origen, y el intervalo $(0,c)$ se traslada al $(-a,b)$, los resultados anteriores se traducen en:

$$\lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b | S_0 = 0) = \begin{cases} r^a & \text{si } \; r < 1, \\ 1 & \text{si } \; r > 1 \end{cases}$$

  es decir la probabilidad de que la caminata que empieza en 0 salga de la banda $(-a,b)$ por el extremo inferior $-a$ es r^a si $r < 1$ y es 0 si $r > 1$.

4. Caminatas aleatorias generales

Lo notable es que muchas de estas propiedades se heredarán para cualquier caminata aleatoria.

Por ejemplo, con probabilidad 1 las trayectoria de una caminata aleatoria general sale de un intervalo acotado dado.

Definición 4.1. se dice que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **caminata aleatoria** si es de la forma

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

donde $S_0 =$ constante y $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

En este caso ya no se pide que las variables X_i sean Bernoulli, sólo se les pide que sean independientes y tengan la misma distribución.

La analogía con lo anterior se ve gracias al siguiente teorema:

Teorema 4.2. *Dada una caminata aleatoria* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no trivial, sucede una y sólo una de la tres propiedades siguientes:*

1. $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$,
2. $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ *y* $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ *o bien*
3. $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$.

Y esto sucede con probabilidad 1.

Dos casos son sencillos de probar el 1 y el 3:

Si X_i tiene media finita y positiva, $\boldsymbol{E}(X_i) = m \in (0,\infty)$, la ley de los grandes números nos permite afirmar que se cumple el primer caso. En efecto, por dicha ley se tiene la convergencia (casi segura) siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

Si ahora X_i tiene media finita y negativa, la misma ley de los grandes números nos dice que se cumple el caso 3.

Para demostrar la propiedad 2 y así como la tricotomía se requiere de la ley 0–1 de Hewitt–Savage y no lo vamos a hacer aquí. Un estudio detallado con enfoque elemental, se encuentra en [7].

Un poco más difícil de probar es la situación en que la media $m = \boldsymbol{E}(X_1)$ no sea finita.

Ejemplo 4.3. Un ejemplo muy cercano a las caminatas aleatorias son las **caminatas aleatorias con retraso** o **caminatas aleatorias perezosas** [6]. El modelo es importante en aplicaciones diversas, por ejemplo en procesamiento de señales en donde dependiendo del valor del peso de la señal se envían tres posibles números a la central que está procesando toda esta información: si el peso es grande, envía el número 1, si es muy pequeño, el (-1) y no transmite nada si los pesos son intermedios. Cuando se rebasa un cierto nivel se deben tomar medidas adecuadas y al bajar de otro nivel fijo, también se deberá actuar en consecuencia.

Claro que cada modelo deberá precisar qué es grande y chico así como estos niveles de los que no podemos salirnos.

El modelo matemático para esto, es una caminata aleatoria en donde las variables aleatorias independientes X_i que se están sumando son las siguientes:

$X_i = 1$ con probabilidad $p \in (0,1)$
$X_i = -1$ con probabilidad $q \in (0,1)$
$X_i = 0$ con probabilidad $r \in (0,1)$
y donde $p+q+r=1,\ p,q,r \geq 0$. Es obvio que si $r=0$ volvemos a las caminatas aleatorias simples.

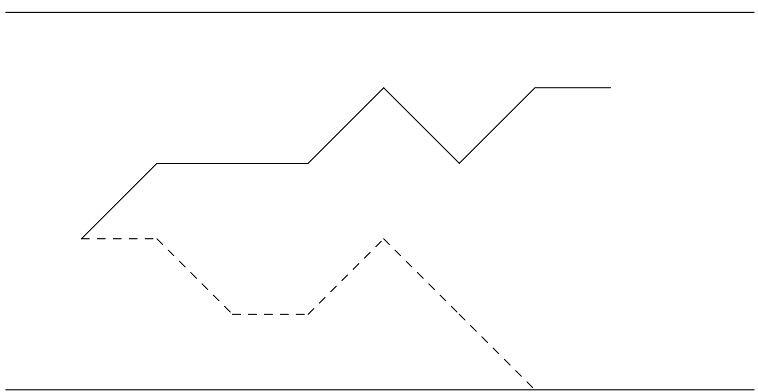

Figura 4. Dos trayectorias posibles.

Para simplificar el estudio pensemos que el nivel superior es $c > 4$ y el inferior es 0 y empezamos en un punto $u \in \{1, 2, \ldots, c-1\}$ Si aplicamos las ideas usadas para resolver el del problema de la ruina de la sección 2 a esta situación tendremos la siguiente ecuación,

$$h(u) = ph(u+1) + qh(u-1) + rh(u)$$

que es lo mismo que

$$h(u)(1-r) = ph(u+1) + qh(u-1)$$

y que

$$h(u) = \frac{p}{p+q}h(u+1) + \frac{q}{p+q}h(u-1)$$

si observamos los cálculos hechos para el problema de la ruina veremos que la probabilidad de llegar a 0 o a c, son las mismas que en el caso de la caminata simple, y esto porque el cociente r de los coeficientes es el mismo:

$$r = \frac{\frac{p}{p+q}}{\frac{q}{p+q}} = \frac{p}{q}$$

Una pregunta interesante es si la esperanza del tiempo de llegada a las barreras será también igual a la esperanza del caso anterior o si al menos será finitas y además ver si esta propiedad depende o no de los valores de p, q y r. Para ver la respuesta consulte [6].

5. Caso del movimiento browniano

Podemos plantear un problema de barreras análogo para un proceso en tiempo continuo, lo que es en general mucho más difícil de resolver pero que tiene una gran importancia en una gran variedad de modelos matemáticos ligados a los más diversos fenómenos aleatorios de la naturaleza.

Si se tiene un proceso más general que lo tratado en secciones anteriores, la pregunta es la misma: ¿se puede saber con qué probabilidad sale de un cierto intervalo dado? Veamos el caso más conocido: el del movimiento browniano:

El movimiento browniano $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ (MB) es un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que evoluciona en el tiempo de manera continua, es decir los subíndices del proceso varían en $\mathbb{R}^+$ y queda definido como sigue:

- $B_0 = 0$
- tiene trayectorias continuas.
- B_t tiene densidad normal $\mathcal{N}(0, t)$
- Es un proceso con incrementos independientes, esto significa que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, las variables aleatorias
$$(B_{t_i} - B_{t_j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$$
son variables aleatorias independientes.
- Tiene incrementos estacionarios, es decir, la distribución de $(B_{t+h} - B_t)$ es la misma que la de $(B_{r+h} - B_r)$ para cualesquiera $t, r, h \geq 0$

Observe que en este caso las trayectorias del proceso son funciones de $[0, \infty)$ en $\mathbb{R}$ y una trayectoria es, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, la función $t \to B_t(\omega)$. El proceso que empieza en $x \in \mathbb{R}$ se define como $(x + B_t : t \geq 0)$

Por lo que se ha dicho en la definición B_t tiene densidad normal de media 0 y varianza t, así que la densidad de $x + B_t$ es:

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{2t}\right)$$

y en esta fórmula la x inicial queda fija. Podemos entonces plantear preguntas similares al caso de la caminata aleatoria:

- ¿Cuál es la probabilidad que habiendo empezado en el punto $x > 0$ llegue primero a $c > x > 0$) que a cero? (el jugador A gana).
- Si tenemos un MB que empieza en 0 y $a > 0, b > 0$ son dos reales positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que salga del intervalo $(-a, b)$ por $-a$ y cuál la de que salga por b? Esto por traslación

es equivalente a pensar en el intervalo $(0, a+b=c)$ y en un MB que empiece en $a=x$.

- ¿Es cierto que con probabilidad 1 sale de cualquier intervalo finito?

Teorema 5.1. *Si MB es un movimiento browniano que empieza en $x>0$ y $c>x>0$. Entonces*

$$\mathbb{P}(\tau_c<\tau_0|B_0=x)=\frac{x}{c};\;\; \mathbb{P}(\tau_c>\tau_0|B_0=x)=\frac{c-x}{c}$$

donde

$$\tau_u := \text{ínf}\{t>0 : B_t=u\}\;\; u\in\mathbb{R}$$

Podemos de inmediato ver que es el mismo resultado que para las caminatas aleatorias simétricas. Si recordamos que existen teoremas que nos permiten aproximar al MB mediante un re-escalamiento cada vez más fino en el tiempo y el espacio de las caminatas aleatorias simples simétricas, podríamos pensar que el resultado se deduce de las propiedades correspondientes de ellas. Pero en realidad esto no es así. El tipo de convergencia de procesos que se tiene, no respeta, por lo general estas propiedades. La demostración es totalmente diferente a lo que hemos hecho aquí en el caso de caminatas aleatorias y no se hará en este texto, sólo indicaremos que se puede hacer usando el Teorema de Muestreo de Opcional para Martingalas y o bien usar propiedades de la densidad de $x+B_t$. Un cálculo elemental muestra que esta función, satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_t}{\partial y^2}.$$

y entonces para una función medible y acotada $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la función

$$U(t,x,y):=\boldsymbol{E}\left(u(x+B_t)\right)$$

también satisface esta ecuación por derivación bajo el signo de la integral. Si ahora se toma

$$u(y)=1_{\{\tau_c<\tau_0\}}(y)$$

y se hacen cálculos adicionales se obtiene el resultado. Otros métodos de prueba utilizan la teoría de las martingalas, como ya se mencionó antes.

Además de este resultado para el MB, se pueden estudiar otros modelos en la teoría de riesgo a partir de procesos en tiempo contínuo pero con trayectorias discontinuas. Algunos de estos modelos han sido desarrollados recientemente por un grupo de especialistas mexicanos en el área en colaboración con probabilistas de otros países (vea la bibliografía 4 a 9) e incluyen a procesos del tipo:

- Cramer–Lundberg
- Lévy simétricos

- Lévy espectralmente negativos

Esto ha permitido acceder a modelos más precisos y útiles en diversas aplicaciones, pero, naturalmente, es trabajo de investigación que requiere de conocimientos más avanzados de probabilidad y de procesos estocásticos.

Observaciones Finales

La solución al problema de la ruina de la primera parte de este trabajo, aparece en el libro de Kai–Lai–Chung [3]. En muchos otros libros se hace con la teoría de martingalas y con el teorema de muestreo opcional. El problema de la ruina asociado a una caminata aleatoria perezosa, lo resuelve con otros métodos A. Gut en su artículo [6].

Bibliografía

[1] M. E. Caballero, J. C. Pardo y J. L. Pérez, «Explicit identities for Lévy processes associated to symmetric stable processes», *Bernoulli*, vol. 17, núm. 1, 2011, 34–59.

[2] M. E. Caballero, V. Rivero, G. U. Bravo y C. Velarde, *Cadenas de Markov*, vol. 29, Aportaciones matemáticas, 2008.

[3] K. L. Chung, *Elementary probability theory with stochastic processes*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1979.

[4] L. Denis, B. na Fernández y A. Meda, «Estimation of value at risk and ruin probability for diffusion processes», *Mathematical Finance*, vol. 19, núm. 2, 2009, 281–302.

[5] B. Fernández, D. Hernández-Hernández, A. Meda y P. Saavedra, «An optimal investment strategy with maximal risk aversion and its ruin probability», *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 68, núm. 1, 2008, 159–179.

[6] A. Gut, «The gambler's ruin problem with delay», *Stats and Prob Letters*, vol. 83, 2013, 2549–2552.

[7] A. Hinojosa, «Caminata aleatoria asociada y la martingala de Wald», Tesis de licenciatura, FC UNAM, 2013.

[8] A. E. Kyprianou, J. C. Pardo y V. M. Rivero, «Exact and asymptotic n-tuple laws at first and last passage», *Ann. of Appl. Prob.*, vol. 20, núm. 2, 2010, 522–564.

[9] A. E. Kyprianou, J. C. Pardo y A. Watson, «Hitting distributions of alpha–stable processes via path censoring and self–similarity», *Ann. Probab.*, vol. 42, 2014, 398–430.

[10] G. F. Lawson, *Introduction to stochastic processes*, Chapman, Hall, 2006.